УДК 519.7

О ТЕОРИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

М.Ф. Бондаренко[1], А.Д. Дрюк[2], Н.П. Кругликова[3], С.А. Пославский[4], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[5]

[1, 2, 3, 5] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[4] ХНУ им. В.Н. Каразина, г. Харьков, Украина

Предпринимается попытка формального описания категории количества. С этой целью на языке алгебры подстановочных операций дается аксиоматическая характеристика понятий натурального числа, счета, сложения, умножения и порядка на множестве натуральных чисел. Идентифицируются первичные понятия теории положительных и произвольных рациональных чисел. Средствами логической математики проводится аксиоматическая характеризация понятий теории действительных чисел и арифметических действий над ними. В статье развиваются идеи, сформулированные в работах [1, 2].

ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЕ ЧИСЛО, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА ПОДСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Введение

Сначала остановимся на интуитивном понимании действительных чисел. Ранее было сказано, что рациональные числа можно наглядно представить как точки на прямой. Хотя между двумя, даже сколь угодно близкими, точками можно вставить еще одну рациональную точку, тем не менее рациональные точки заполняют прямую не полностью. Так например, длина диагонали квадрата со сторонами длины 1 не является рациональным числом. Иными словами, уравнение $xx = 1+1$ в рациональных числах неразрешимо. Всех точек на прямой гораздо больше, чем всех рациональных точек. Чтобы иметь возможность каждой точке прямой поставить в соответствие свое число, приходится множество рациональных чисел расширить до множества действительных. Представить наглядно действительные числа можно в виде так называемых сечений.

Сечением называется любое множество рациональных чисел, обладающее следующими тремя свойствами: 1) в сечении содержатся рациональные числа, но не все; 2) каждое содержащееся в сечении число меньше не содержащегося в нем; 3) в сечении нет наибольшего числа. Сечение можно уподобить части прямой, расположенной левее некоторой точки. Интуиция подсказывает, что каждому сечению должно соответствовать вполне определенное число, ограничивающее его сверху. Однако, оказывается, что сечений больше, чем рациональных чисел, поэтому не для каждого сечения существует его верхняя рациональная граница. Это следует из того, что множество сечений континуально, а множество всех рациональных чисел лишь счетно, поэтому мощность первого множества больше мощности второго. Действительных же чисел достаточно: между сечениями и их действительными верхними границами существует взаимно однозначное соответствие.

1. Аксиомы действительных чисел

Мы рассмотрели содержательную сторону вопроса. Теперь займемся формальным введением действительных чисел. Предполагаем, что множество B всех рациональных чисел уже введено и на нем определены операции сложения и умножения и отношение порядка. Множество всех действительных чисел обозначим символом C. Вводим предикат $L(x, y)$ на $B\times C$, называемый *формирователем действительных чисел*. Предикат L требуется определить аксиомами действительных чисел так, чтобы для каждого действительного числа y множество всех корней уравнения $L(x, y) = 1$ относительно переменной x было некоторым сечением α. Сечение α должно обладать свойством: если $L(x, y) = 1$, то $x\in\alpha$, если же $L(x, y) = 0$, то $x\notin\alpha$. Иными словами, предикат $L(x, y)$ взаимно однозначно связывает действительное число y с соответствующим ему сечением. Если существует рациональная граница a сечения α, то в роли действительного числа y принимается рациональное число a, то есть $y = a$. Такое действительное число называется *рациональным*. Если для сечения α рациональная граница не существует, то соответствующее ему действительное число y называется *иррациональным*. После пополнения множества всех рациональных чисел иррациональными ось рациональных чисел превращается в ось действительных чисел. В результате у каждого сечения появляется единственная верхняя граница – рациональная или иррациональная. Каждому действительному числу соответствует единственное сечение, для которого это число является верхней границей. В силу наличия взаимно однозначного соответствия между всеми действительными числами и сечениями, действительные числа можно считать просто именами сечений.

Переходим к формулировке аксиом действительных чисел. Всего имеется семь аксиом действительных чисел, они связывают множество C и предикат L:

аксиома непустоты сечения

$$\forall\ y \in C\ \exists x \in B\ L(x,y); \tag{1}$$

аксиома неполноты сечения

$$\forall\ y \in C\ \exists x \in B \neg L(x,y); \tag{2}$$

аксиома упорядоченности сечения

$$\forall\ x,y \in B\ \forall z \in C(L(x,z) \wedge \neg L(y,z) \supset x < y); \tag{3}$$

аксиома плотности сечения

$$\forall\ z \in C\quad \forall\ x \in B(L(x,z) \supset \exists y \in B(L(y,z) \wedge x < y)); \tag{4}$$

аксиома включения рациональных чисел

$$\begin{gathered}\forall\ z \in C\quad \forall\ x \in B((\forall\ y \in B(\neg L(x,z) \wedge \\ \wedge \neg L(y,z) \supset x \leq y)) \supset x = z);\end{gathered} \tag{5}$$

аксиома единственности

$$\forall\ y,z \in C((\forall\ x \in B(L(x,y) \sim L(x,z))) \supset y = z); \tag{6}$$

аксиома существования

$$\begin{gathered}\forall\ M \subseteq B((\exists\ x \in B\ M(x) \wedge \exists\ x \in B \neg\ M(x)) \wedge \\ \wedge \forall\ x \in B\ \ \forall\ y \in B(M(x) \wedge \neg\ M(y) \supset x < y) \wedge \\ \wedge \forall\ x \in B(M(x) \supset \exists\ y \in B(M(y) \wedge x < y)) \supset \\ \supset \exists z \in C\ \ \forall\ x \in B(M(x) \sim L(x,z))).\end{gathered} \tag{7}$$

Аксиома (1) гласит, что любое сечение y не пусто. Аксиома (2) выражает мысль, что в каждом сечении y содержится не любое рациональное число. Вместе взятые, эти два свойства формально выражают первое свойство сечений. Аксиома (3) выражает второе свойство сечений: любое рациональное число из сечения z меньше любого рационального числа вне этого сечения. Третье свойство сечений формулируется аксиомой (4): для любого рационального числа из сечения z найдется еще большее. Аксиома (5) гласит: если x – рациональная граница сечения z, то $z = x$. Смысл аксиомы (6) состоит в том, что каждому сечению соответствует не более одного действительного числа. Если сечения совпадают, то совпадают и соответствующие им действительные числа. Аксиома (7) гласит: если множество M рациональных чисел обладает первым, вторым и третьим свойствами сечений, то существует действительное число, соответствующее ему. Иными словами, для каждого сечения найдется соответствующее ему действительное число. Свойства (1)–(7) называются *аксиомами действительных чисел*. Теория предикатов C и L, основанная на аксиомах (1)–(7), называется *теорией действительных чисел*.

Теорема 1 (о независимости аксиом действительных чисел). *Каждая из аксиом действительных чисел, кроме аксиомы* (2), *логически не зависит от совокупности остальных.*

Доказательство. Доказательство ведем методом интерпретаций. Убеждаемся в независимости аксиомы (1). Для этого примем $C = R \cup \{a\}$, где R – множество всех действительных чисел, которое, как мы полагаем, имеется в нашем логическом инструментарии (и которое содержит в качестве подмножества множество B всех рациональных чисел), a – произвольный элемент универсума, не принадлежащий R. Определяем предикат L: $\forall z \in C$ $\forall x \in B(L(x, z) \sim \neg\, z^a \wedge x < z)$, где $<$ – имеющееся в инструментарии отношение "меньше" на множестве R; z^a – предикат узнавания ($z^a \sim z = a$). Тогда аксиома (1) не выполняется, так как $\forall x \in B \neg\, L(x, a)$. Аксиома (2) выполняется: для любого числа из R найдется большее рациональное число, то есть $\forall z \in R\ \exists x \in B \neg\, L(x, z)$, кроме того, условие $\neg\, L(x, a)$ выполнено для всех $x \in B$. Аксиома (3) выполняется, так как имеем $\forall z \in C\, \forall x, y \in B(L(x, z) \wedge \neg L(x, z) \supset$ $\supset R(z) \wedge x < z \wedge \neg\, (y < z))$, но $x < z, \neg\, (y < z)$ влечет $x < y$. Аксиома (4) выполняется, так как для любых $z \in R$, $x \in B$, таких что $x < z$, найдется $y \in B$, для которого $x < y < z$. Аксиома (5) выполняется: если для некоторых $z \in R$, $x \in B$ при любом $y \in B$ условие $z \leq x$ и $z \leq y$ влечет $x \leq y$, то $x = z$, так как иначе $z < x$ и $\exists y\, x \in B$ $z < y < x$; если $z = a$, то условие $\forall y \in B(\neg L(x, z) \wedge \neg L(y, z)$ $\supset x \leq y)$ не выполняется ни при каком $x \in B$, но тогда имеем $\forall x \in B\, (\forall y \in B(\neg\, L(x, z) \wedge \neg\, L(y, z) \supset x \leq$ $\leq y) \supset x = z)$. Проверяем выполнение аксиомы (6). Если для некоторых $y, z \in C$ имеем $\forall x \in B(\neg\, y^a \wedge x <$ $< y \sim \neg\, z^a \wedge x < z)$, то либо $y = z = a$, либо $y \in R$, $z \in R$ и $y = z$ (иначе найдется такой $x \in B$, что $z < x < y$ или $y < x < z$). Поэтому $\forall y, z \in C(\forall x \in B(L(x, y) \sim L(x, z)) \supset$ $\supset y = z) = \forall y, z \in C\, (\forall x \in B\, (\neg\, y^a \wedge x < y \sim \neg\, z^a \wedge x < z) \supset$ $\supset y = z) = 1$, т.е. аксиома выполняется. Аксиома (7) выполняется, так как для любого $M \subseteq B$, удовлетворяющего посылкам этой аксиомы, найдется такой $z \in R$, что $\forall x \in B(M(x) \sim x < z)$, то есть $\exists z \in C$ $\forall x \in B(M(x) \sim \neg\, z^a \wedge x < z)$.

Покажем теперь, что аксиома (2) зависима от остальных аксиом. Для этого достаточно убедиться в том, что если условие (2) не выполнено, то нарушается и какое-то из оставшихся условий. Предположим $\exists z_1 \in C\ \forall x \in B\ L(x, z_1)$. Тогда из аксиомы (5) получаем $\forall x \in B((\forall y \in B(\neg\, L(x, z_1) \wedge \neg\, L(y, z_1) \supset$ $\supset x \leq y)) \supset x = z_1)$, $\forall x \in B(\forall y \in B(0 \supset x \leq y) \supset x = z_1)$, $\forall x \in B\, (1 \supset x = z_1)$, $\forall x \in B\ x = z_1$, что заведомо ложно. Таким образом, аксиома (2) не является независимой от остальных.

Независимость других аксиом проверяется так же, как и независимость аксиомы (1). Для проверки независимости аксиомы (3) полагаем $C = R \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\, \forall x \in B(L(x, z) \sim z^a \wedge N(x) \vee \neg\, z^a \wedge$ $\wedge\, x < z)$, где N – множество натуральных чисел; аксиомы (4) – $C = R \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\, \forall x \in B(L(x, z) \sim z^a \wedge x \leq$ $\leq 0 \vee \neg\, z^a \wedge x < z)$; аксиомы (5) – $C = (R \backslash \{0\}) \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\ \forall x \in B(L(x,\ z) \sim z^a \wedge x < 0 \vee \neg\, z^a \wedge x < z)$; аксиомы (6) – $C = R \cup \{a\}$ и $\forall z \in C\, \forall x \in B(L(x, z) \sim z^a \wedge x <$ $< \sqrt{2}\ \vee \neg\, z^a \wedge x < z)$; аксиомы (7) – $C = R \backslash \{0\}$ и $\forall z \in C$ $\forall x \in B(L(x, z) \sim x < z)$. Теорема доказана.

Следующие две леммы относятся к теории рациональных чисел [5], но они необходимы для доказательства нижеследующих утверждений.

Лемма 1. *Для любых* u, $v \in B$ *условие* $u < v$ *влечет* $\exists w \in B(u < w \wedge w < v)$.

Доказательство. Пусть u, $v \in B$ и $u < v$. Положим $w = (u+v)(1+1)^{-1}$. Тогда, в силу леммы 10 из второй части этой статьи, будем иметь $u+u<u+v<v+v$, $u(1+1)<u+v<v(1+1), u(1+1)(1+1)^{-1}<(u+v)(1+1)^{-1}<$ $<v(1+1)(1+1)^{-1}$, $u<w<v$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых x, $y\in B$ условия $x<y$ и $-y<-x$ равносильны.*

Доказательство. Пусть x, $y\in B$ и $x<y$. Тогда, по лемме 6 из [5], существует такой $z\in A$, что $y=x+z$, где A – множество положительных рациональных чисел. Используя лемму 7 из части 2, получаем $-y=(-1)(x+z)$, то есть $-y=(-x)+(-z)$, $-y+z=-x$, $-y<-x$. Лемма доказана.

Теорема 2 (о включении рациональных чисел в действительные). *Все рациональные числа являются также и действительными, и для любого $z\in B$ выполнено условие $\neg L(z, z)\wedge \forall y\in B(L(y, z)\sim y<z)$.*

Теорема означает, что множество действительных чисел является расширением множества рациональных чисел, то есть что $B\subseteq C$.

Доказательство. Выберем произвольно $z\in B$. Рассмотрим множество $M_z=\{y\in B | y<z\}$. Покажем, что это множество удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7), то есть обладает всеми свойствами, определяющими понятие сечения. а) Положим $x=z+(-1)$. Тогда $x+1=(z+(-1))+1=z+((-1)+1)=z+0=z$, то есть $x<z$ и верно $M_z(x)$. б) Положим $x=z+1$. Тогда имеем $z<x$ и $\neg M_z(x)$. в) Пусть для некоторых x, $y\in B$ выполнено условие $M_z(x)\wedge\neg M_z(y)$. Тогда $x<z$ и $z\le y$, откуда получаем $x<y$. г) Пусть $x\in B$ и $M_z(x)$. Тогда, по лемме 1, $\exists y\in B\, x<y<z$, то есть $\exists y\in B$ $(M_z(y)\wedge x<y)$. Итак, все посылки аксиомы (7) выполнены. Поэтому существует $z'\in C$ такой, что для любого $y\in B$ условия $M_z(y)$ и $L(y, z')$ равносильны. В силу определения множества M_z, получаем $\neg L(z, z')$ $\wedge\forall y\in B(\neg L(y, z')\supset z\le y)$. Используя аксиому (5), выводим отсюда $z'=z$, то есть $z\in C$ и верно $\neg L(z, z)$. Теорема доказана.

Теорема 3 (об изоморфности множеств действительных чисел). *Пусть B – множество рациональных чисел, а множества R, R_1 и предикаты L, L_1 на $B\times R$ и $B\times R_1$ соответственно удовлетворяют аксиомам (1)–(7) действительных чисел. Тогда найдется биекция φ: $R\to R_1$, такая что для любых $x\in B$ и $u\in R$ $L(x, u)=L_1(x, \varphi(u))$.*

Теорема означает, что в нашей власти – лишь менять обозначения действительных чисел (и то только тех, которые являются иррациональными, поскольку для рациональных чисел обозначения уже были выбраны заранее). Из теоремы непосредственно следует, что все множества действительных чисел равномощны. Любое множество, равномощное множеству всех действительных чисел, называется *континуальным* (*континуумом*).

Доказательство. Выберем произвольно $u\in R$. Пусть $M=\{x\in Q | L(x, u)\}$ (то есть $M(x)\sim L(x, u)$). Множество M удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7). Поэтому существует $u_1\in R_1$, такой что для любого $x\in Q$ $M(x)\sim L_1(x, u_1)$. Такой элемент u_1 – единственный (для множества M) согласно аксиоме (6). Таким образом, каждому $u\in R$ ставится в соответствие единственный $u_1=\varphi(u)\in R_1$. Покажем, что φ – биекция (φ:$R\to R_1$). Действительно, повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что для любого $u_1\in R_1$ найдется, притом единственный, $u\in R$, такой что $\forall x\in Q$ $L_1(x, u_1)=L(x, u)$, то есть $\forall u_1\in R_1$ $\exists! u\in R$ $u_1=\varphi(u)$. Поэтому φ – биекция. Теорема доказана.

2. Порядок на множестве действительных чисел

Вводим *предикат порядка* $H(u, v)$ на $R\times R$, соответствующий *отношению порядка $u<v$,* следующим прямым определением:

$$\forall\ u,v\in R(H(u,v)\sim\neg(u=v)\wedge \wedge(\forall\ x\in B(L(x,u)\supset L(x,v)))). \quad (8)$$

Теорема 4 (о сравнимости действительных чисел). *Для любых u, $v\in R$ выполняется только одно из следующих условий*: а) $u=v$, б) $H(u, v)=1$, в) $H(v, u)=1$.

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in R$. Если $u=v$, то условия б) и в) не могут быть выполнены. Пусть $u\ne v$. Тогда существует $x\in B$, такой что $\neg(L(x, u)\sim L(x, v))$, – это следует из аксиомы единственности (6). Если справедливо $\neg L(x, u)\wedge L(x, v)$, то не существует такого $y\in B$, что $L(y, u)\wedge\neg L(y, v)$ (иначе, по аксиоме (3), с одной стороны, $x<y$, а с другой $-y<x$, что невозможно в силу теоремы о сравнимости рациональных чисел). Поэтому имеем $\forall y\in B(L(y, u)\supset L(y, v))$, то есть $H(u, v)=1$ и справедливо б). Если же, наоборот, верно $L(x, u)\wedge\neg L(x, v)$, то $H(v, u)=1$, то есть выполнено условие в). Теорема доказана.

Теорема 5 (о транзитивности отношения порядка на множестве действительных чисел). *Для всех u, v, $w\in C$ из $u<v$ и $v<w$ следует $u<w$.*

Доказательство. Пусть u, v, $w\in C$ и $u<v$, $v<w$. Если $u=w$, то $u<v$ и $v<u$, что противоречит теореме 4 (о сравнимости действительных чисел). Поэтому $u\ne w$. Далее, имеем $\forall x\in B((L(x, u)\supset L(x, v))\wedge(L(x, v)\supset$ $\supset L(x, w)))$, то есть $\forall x\in B(L(x, u)\supset L(x, w))$. Значит $u<w$. Теорема доказана.

3. Сложение на множестве действительных чисел

Переходим к определению сложения действительных чисел. Предикат S на R^3 называется *предикатом сложения*, если

$$\forall\ u,v,w\in R(S(u,v,w)\sim(\forall\ x,y\in B(L(x,u)\wedge L(y,v)\supset \supset L(x+y,w))\wedge(\neg\ L(x,u)\wedge\neg\ L(y,v)\supset\neg\ L(x+y,w))). \quad (9)$$

Из этого прямого определения непосредственно следует, что предикат S определен единственным образом по заданным R и L.

Теорема 6 (о функциональности предиката сложения действительных чисел). *Для любых u, $v\in R$ существует, притом единственный, $w\in R$, такой что $S(u, v, w)=1$.*

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in R$. Рассмотрим множество $M=\{z\in B | \exists x, y\in B((z=x+y)\wedge$ $\wedge L(x, u)\wedge L(y, v))\}$. Покажем, что существует $w\in R$, такой что для любого $x\in B$ $M(x) \sim L(x, w)$. Для этого проверим, что выполнены все посылки аксиомы (7) действительных чисел. а) Поскольку существуют x, $y\in B$ такие, что $L(x, u)\wedge L(y, v)$, то, положив $z = x+y$, получим $M(z) = 1$. б) Существуют x, $y\in B$, такие что $\neg L(x, u) \wedge \neg L(y, v)$. Тогда для любых x_1, $y_1\in B$ из $L(x_1, u)\wedge L(y_1, v)$ следует $(x_1< x)\wedge(y_1< y)$. Отсюда вытекает, что $x_1+y_1< x+y$, то есть $\neg M(x + y)$. Здесь была использована лемма 6. в) Пусть z_1, $z_2\in Q$ и $M(z_1) \wedge \neg M(z_2)$. Существуют x_1, y_1, $y_2\in Q$, такие что $L(x_1, u) \wedge L(y_1, v)\wedge(z_1 = x_1+y_1)\wedge(z_2 = x_1+y_2)$. Из $\neg M(z_2)$ следует $\neg L(y_2, v)$, то есть $y_1< y_2$. Отсюда вытекает $x_1+y_1< x_1+y_2$, то есть $z_1< z_2$ (см. лемму 4 из второй части этой работы). г) Пусть $z\in B$ и $M(z)$. Тогда существуют x, $y\in B$, такие что $L(x, u) \wedge L(y, v) \wedge (z = x+y)$. По аксиоме (4) существует $y_1\in B$, такой что $L(y_1, v)\wedge(y< y_1)$. Полагая $z_1 = x+y_1$, получим $(z< z_1) \wedge M(z_1)$. Итак, все посылки аксиомы (7) выполнены, то есть существует элемент $w\in R$, такой что $M(x) \sim L(x, w)$, причем для любых x, $y\in B$ условие $L(x, u)\wedge L(y, v)$ влечет $L(x+y, w)$. В силу аксиомы (6), такой элемент w – единственный. Пусть теперь $x, y\in B$, $\neg L(x, u)\wedge \neg L(y, v)$. Тогда, если предположить, что $L(x+y, w)$, то существуют x_1, $y_1\in B$, такие что $x+y = x_1+y_1$ и $L(x_1, u)\wedge L(y_1, v)$. Но последнее условие означает, что $x_1< x$, $y_1< y$, то есть равенство $x+y = x_1+y_1$ неверно (по лемме 10 из части 2). Получили противоречие с предположением $L(x+y, w)$. Поэтому $\forall x, y\in B(\neg L(x, u) \wedge \neg L(y, v) \supset \neg L(x+y, w))$. Теорема о функциональности S доказана.

Функциональность предиката S позволяет ввести на множестве $C\times C$ функцию $w = u+v$, называемую *операцией сложения действительных чисел*, следующим правилом: для любых u, v, $w\in C$ $w = u+v$ тогда и только тогда, когда $S(u, v, w) = 1$.

Теорема 7 (о сложении действительного числа с нулем). Для всех $u\in C$ $u+0 = u$.

Доказательство. Выберем произвольно $u\in C$. Для любых $x, y\in B$, удовлетворяющих условию $L(x, u)\wedge L(y, 0)$, имеем $y< 0$, $x+y< x$, $L(x+y, u)$ (в силу леммы 10 и теоремы 25 из второй части этой работы, а также аксиомы (3)). С другой стороны, для всех x, $y\in B$, удовлетворяющих условию $\neg L(x, u) \wedge \neg L(y, 0)$, получаем $0 \le y$, $x \le x+y$, $\neg L(x+y, u)$. Учитывая определение операции сложения действительных чисел и аксиому (9), приходим к выводу $u+0 = u$. Теорема доказана.

Лемма 3. *Для любых u, $v\in C$, $z\in B$ условия $L(z, u+v)$ (а) и $\exists x$, $y\in B(L(x, u) \wedge L(y, v)\wedge(z=x+y))$ (б) равносильны.*

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in C$ и рассмотрим множество M, определенное в доказательстве теоремы 6. Тогда для любого $z \in B$ условие $M(z)$ равносильно каждому из условий (а), (б) (с учетом определения операции сложения действительных чисел), то есть (а) и (б) тоже равносильны. Лемма доказана.

Теорема 8 (об ассоциативности сложения действительных чисел). *Для всех u, v, $w\in C$ $(u+v)+w = u+(v+w)$* (а).

Доказательство. Выберем произвольно u, v, $w\in C$. Используя лемму 3 и ассоциативность сложения рациональных чисел, получаем следующую цепочку равносильных для любого $z\in B$ условий: $L(z, (u+v)+w)$; $\exists x, y\in B((z = x+y)\wedge L(x, u+v) \wedge L(y, w))$; $\exists x_1, y_1, y\in B((z = (x_1+y_1) + y) \wedge L(x_1, u) \wedge L(y_1, v)\wedge L(y, w))$; $\exists x_1, y_1, y\in B((z = x_1+(y_1+y)) \wedge L(x_1, u) \wedge L(y_1, v)\wedge L(y, w))$; $\exists x_1, y_2 \in B((z = x_1+y_2) \wedge L(x_1, u) \wedge L(y_2, v+w))$; $L(z, u+(v+w))$. В силу аксиомы (6), получаем отсюда (а). Теорема доказана.

Теорема 9 (о коммутативности сложения действительных чисел). *Для всех u, $v\in C$ $u+v = v+u$* (а).

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in C$. Используя лемму 3 и коммутативность сложения рациональных чисел, получаем цепочку равносильных для любого $z\in B$ условий: $L(z, u+v)$; $\exists x, y \in B((z = x+y) \wedge L(x, u) \wedge L(y, v))$; $\exists x, y\in B((z = y+x) \wedge L(y, v) \wedge L(x, u))$; $L(z, v+u)$. В силу аксиомы (6), получаем отсюда (а). Теорема доказана.

Число $-u\in R$ называется *противоположным* числу $u\in R$, если $u+(-u) = 0$.

Лемма 4. *Для любых $u\in C$ и $x\in B$ условия $L(x, u)$ и $x< u$ равносильны.*

Доказательство. Заметим, что случай $u \in B$ был уже рассмотрен в теореме 2. Пусть для некоторых $u \in C$, $x \in B$ выполнено условие $L(x, u)$. Тогда, с одной стороны, невозможно $x = u$ (в силу теоремы 2). С другой стороны, имеем $L(x, u) \wedge L(x, x)$, то есть $\neg (L(x, u) \supset L(x, x))$. Используя определение (8) и теорему о сравнимости действительных чисел, приходим к выводу $x< u$. Если же для $u\in C$, $x\in B$ выполнено условие $x< u$, то, по определению (8), $\forall y \in B (L (y, x) \supset L(y, u))$, или $\forall y \in B(\neg L(y, u) \supset \neg L(y, x))$, $\forall y \in B(\neg L(y, u) \supset x \le y)$. Но тогда верно $L(x, u)$, поскольку в противном случае имеем $\forall y \in B(\neg L(x, u) \wedge \neg L(y, u) \supset x \le u)$ и, по аксиоме (5), получаем $x = u$, что противоречит условию $x < u$. Лемма доказана.

Теорема 10 (о противоположном действительном числе). *Для любого $u\in C$ существует, притом единственное, противоположное число $(-u)\in C$.*

Доказательство. Для произвольного $u\in C$ рассмотрим множество $M_u = \{z\in B | \neg L(-z, u) \wedge \neg (-z = u)\}$. Проверим, что M_u удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) действительных чисел. а) По аксиоме (2), существует $y\in B$ такой, что выполнено условие $\neg L(y, u)$. Если при этом оказалось, что $y = u$ (это возможно, когда $u\in B$), то положим $y = u+1$. В результате получаем, что $\exists y\in B \neg L(y, u) \wedge \neg (y = u)$. А поскольку для любого рационального числа y существует противоположное ему число $z = -y$, то $\exists z\in B$ $\neg L(-z, u) \wedge \neg (-z = u)$, иными словами, множество M_u не пусто. б) Условие $\exists z\in B \neg M_u(z)$ выполнено, так как $\exists y\in B$ $L(y, u)$, или $\exists z\in B$ $L(-z, u)$. в) Для любых x, $y\in B$ условие $M_u(x) \wedge \neg M_u(y)$ влечет $\neg L(-x, u) \wedge \neg$

$\neg(-x=u)\wedge(L(-y,u)\vee(-y=u)),(\neg L(-x,u)\wedge L(-y,u))\vee \vee(\neg L(-x,u)\wedge\neg(-x=u)\wedge(-y=u))$. В силу аксиомы (3) и теоремы 2, получаем отсюда $-y<-x$, или (по лемме 2) $x<y$. г) Покажем, что для любого $x\in B$ условие $M_u(x)$ влечет существование такого $y\in B$, что $M_u(y)\wedge(x<y)$. Сначала рассмотрим случай $u\in B$. Из $M_u(x)$ вытекает $\neg L(-x, u)\wedge\neg(-x=u)$, или (по теореме 2) $u<-x$. В силу леммы 1, существует такой $z\in B$, что $u<z<-x$. Полагая $y=-z$, получаем $\neg L(-y, u)\wedge\neg(-y=u)\wedge(-y<-x)$. Отсюда имеем (по определению множества M_u и по лемме 2) $M_u(y)\wedge(x<y)$. Пусть теперь $\neg(u\in B)$. Если для некоторого $x\in B$ выполнено $M_u(x)$, то имеем $\neg L(-x, u)$. Предположим, что не существует такого $y\in B$, что $M_u(y)\wedge(x<y)$. Тогда для любого $y\in B$ условие $\neg L(-y, u)$ влечет $\neg(x<y)$, $\neg(-y<-x)$ (по лемме 2), $-x\le -y$. Отсюда имеем $\forall y\in B\,(\neg L(-x, u)\wedge\neg L(-y, u)\supset -x\le -y)$, или (по аксиоме (5)) $-x=u$, что противоречит условиям $x\in B$ и $\neg(u\in B)$. Исходное предположение оказалось неверным. Поэтому $\exists y\in B\,(M_u(y)\wedge x<y)$. Итак, множество M_u удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) действительных чисел. Поэтому существует, притом единственный, $v\in C$ такой, что для любого $x\in B$ $M_u(x)\sim L(x, v)$. Пусть $x, y\in B$ и $L(x, u)\wedge\wedge L(y, v)$. Поскольку $L(y, v)\sim M_u(y)$, то имеем $\neg L(-y, u)\wedge\neg(-y=u)$, или $u<-y$ (в силу леммы 4 и теоремы 4). С другой стороны, $L(x, u)$ влечет $x<u$ (по лемме 4). Отсюда следует $x<-y$, то есть $x+y<0$, $L(x+y, 0)$. Аналогично доказывается, что если x, $y\in B$ и $\neg L(x, u)\wedge \mathrm{v}L(y, v)$, то $x+y\ge 0$, или $\neg L(x+y, 0)$. Поэтому (в силу определения (9)) $u+v=0$, то есть $v=-u$. Доказываем единственность противоположного числа. Пусть для некоторых $u, v, w\in C$ $u+v=0$ и $u+w=0$. Тогда $u+v=u+w$, $v+(u+v)=v+(u+w)$, $(v+u)+v=(v+u)+w$, $0+v=0+w$, $v=w$ (по теореме о сложении действительного числа с нулем). Теорема доказана.

Разностью $u-v$ действительных чисел u и v называется число $u+(-v)$.

Лемма 5. *Для любых* $u, v, w\in C$ *условие* $u>v$ *влечет* $u+w>v+w$.

Доказательство. Пусть u, v, $w\in C$ и $u>v$. *Тогда* $u\ne v$ и $\forall x\in B(L(x, v)\supset L(x, u))$ (а). Возьмем $z\in B$, такой что $L(z, v+w)=1$. Тогда (по лемме 3) $\exists x, y\in B$ $(L(x, v)\wedge L(y, w)\wedge z=x+y)$. С другой стороны, в силу условия $u>v$, имеем (а) и поэтому $\exists x, y\in B$ $(L(x, u)\wedge L(y, w)\wedge z=x+y)$, то есть $L(z, u+w)=1$. Итак, $L(z, v+w)=1$ влечет $L(z, u+w)=1$. Кроме того $u+w\ne v+w$, иначе $(u+w)+(-w)=(v+w)+(-w)$, $u+(w+(-w))=v+(w+(-w))$, $u+0=v+0$, $u=v$, а это противоречит исходному предположению $u>v$. Значит, $u+w>v+w$. Лемма доказана.

Лемма 6. Для любых x_1, y_1, x_2, $y_2\in C$ условие $(x_2>x_1)\wedge(y_2>y_1)$ влечет $x_2+y_2>x_1+y_1$.

Доказательство. По лемме 5 и теореме 9 $x_2+y_2<x_1+y_2$ и $x_1+y_2=y_2+x_1<y_1+x_1=x_1+y_1$, откуда по свойству транзитивности отношения порядка на множестве действительных чисел получаем требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 7. Для любого $u\in C$ условия $u>0$ и $-u<0$ равносильны.

Доказательство. Пусть $u\in C$ и $u>0$. Тогда, по лемме 5, $u+(-u)>0+(-u)$, $0>-u$. Лемма доказана.

Лемма 8. Для любых $u, v\in C$ условия $u<v$ и $-v<-u$ равносильны.

Доказательство. Если $u, v\in C$ и $u<v$, то невозможно $-u=-v$. Также неверно $-u<-v$, так как иначе имеем $u+(-u)<v+(-v)$, $0<0$ – противоречие. Поэтому условие $u<v$ влечет $-v<-u$, а в силу равенств $-(-u)=u$ и $-(-v)=v$ верно и обратное. Лемма доказана.

Лемма 9. Для любого $u\in C$ условие $u>0$ влечет $\exists x\in A\ L(x, u)$.

Доказательство. Пусть для некоторого $u\in C$ выполнено условие $\forall x\in A\neg L(x, u)$. Тогда, очевидно, если для некоторого $x\in B$ $L(x, u)=1$, то $x\le 0$. Кроме того, $L(0, u)=0$, так как в противном случае $\exists y\in B(L(y, u)\wedge 0<y)$ (по аксиоме (4)). Поэтому имеем $\forall x\in B(L(x, u)\supset x<0)$, то есть $\forall x\in B(L(x, u)\supset L(x, 0))$ (по лемме 4), или $u\le 0$ (в силу определения (8)). Итак, доказано $\forall u\in C(\forall x\in A(\neg L(x, u)\supset u\le 0)$. Отсюда сразу следует утверждение леммы. Лемма доказана.

4. Умножение на множестве действительных чисел

Рассмотрим определение умножения действительных чисел. Введем функцию $|x|$, называемую *модулем действительного числа*: $|x|=x$, если $x\ge 0$; $|x|=-x$, если $x<0$, и функцию $\mathrm{sgn}(x)$, называемую *знаком действительного числа*: $\mathrm{sgn}(x)=1$, если $x>0$; $\mathrm{sgn}(x)=0$, если $x=0$; $\mathrm{sgn}(x)=-1$, если $x<0$. Предикат P на C^3 называется *предикатом умножения*, если

$$\begin{aligned}&\forall\ u,v,w\in C(P(u,v,w)\sim \mathrm{sgn}(w)=\mathrm{sgn}(u)\mathrm{sgn}(v)\wedge\\&\wedge(\forall\ x,y\in B(x>0\wedge y>0\supset L(x,|u|)\wedge L(y,|v|)\supset\\&\supset L(xy,|w|))\wedge\neg L(x,|u|)\wedge\neg L(y,|v|)\supset\\&\supset\neg L(xy,|w|)))))).\end{aligned}\tag{10}$$

Из этого определения непосредственно следует, что предикат P определен единственным образом по заданным C и L.

Теорема 11 (о функциональности предиката умножения действительных чисел). *Для любых* u, $v\in C$ *существует, притом единственный,* $w\in C$, *такой что* $P(u, v, w)=1$.

Доказательство. Выберем произвольно u, $v\in C$. Если $u=0$ или $v=0$, то из (10) получаем $\forall w\in\in C(P(u, v, w)\sim \mathrm{sgn}(w)=0)$, или $\forall w\in C(P(u, v, w)\sim w==0)$. Рассмотрим теперь случай $u\ne 0$ и $v\ne 0$. Образуем множество $M=\{z\in B|z\le 0\vee(\exists x, y\in A(L(x, |u|)\wedge\wedge L(y, |v|)\wedge z=xy))\}$. Проверим, что для этого множества выполнены все посылки аксиомы (7) действительных чисел. а) Очевидно, $M(0)=1$. б) Существуют $x, y\in A$, такие что $\neg L(x, |u|)\wedge\neg L(y, |v|)$. Тогда для любых $x_1, y_1\in A$, удовлетворяющих условию $L(x_1, |u|)\wedge L(y_1, |v|)$, имеем (в силу аксиомы (3)) $x_1<x$ и $y_1<y$. По лемме 9 из части 2, получа-

ем отсюда $x_1y_1 < xy$, и поэтому $M(xy) = 0$. в) Пусть $z_1, z_2 \in B$ и выполнено условие $M(z_1) \wedge \neg M(z_2)$ (а). Тогда либо $z_1 \le 0$, и в этом случае имеем $z_1 < z_2$ (так как $0 < z_2$), либо $0 < z_1$. Во втором случае существуют такие $x_1, y_1 \in A$, что $L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|) \wedge z_1 = x_1y_1$ (б), и $z_2 = x_1y_2$, где $y_2 = x_1^{-1}z_2$. Из условий (а), (б) и определения множества M следует $y_1 = y_2$ (иначе имели бы $L(y_2, |v|) = 1$ и $M(z_2) = 1$), откуда получаем $z_1 < z_2$. г) Пусть $z \in B$ и $M(z) = 1$. Покажем, что тогда $\exists z_1 \in B(M(z_1) \wedge z < z_1)$ (в). Не ограничивая общности, будем считать, что $z \in A$, так как $|u| > 0$, $|v| > 0$ и, согласно лемме ..., существуют такие $x, y \in A$, что $L(x, |u|) \wedge L(y, |v^{-1}|)$, то есть $M(xy) = 1$ и $xy \in A$. По аксиоме (4), найдутся $x_1, y_1 \in A$, такие что $L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|) \wedge x < x_1 \wedge y < y_1$. Тогда, полагая $z_1 = x_1y_1$, получаем (в). Итак, множество M удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) и поэтому $\exists w \in C\ \forall z \in B(M(z) \sim L(z, w))$. В силу аксиомы (6), такой элемент w – единственный. При этом очевидно, что $w > 0$. Согласно определению множества M, имеем $\forall x, y \in A(L(x, |u|) \wedge L(y, |v|) \supset L(xy, w))$. Пусть теперь $x, y \in A$ и $\neg L(x, |u|) \wedge \neg L(y, |v|)$. Если предположить, что $L(xy, w) = 1$, то существуют $x_1, y_1 \in A$, такие что $xy = x_1y_1$ и $L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|)$. Но тогда, согласно аксиоме (3), $x_1 < x$ и $y_1 < y$, то есть $x_1y_1 < xy$ (по лемме 9 из части 2) и равенство $xy = x_1y_1$ не выполняется. Поэтому имеем $L(xy, w) = 0$. Значит, условие $\forall x, y \in A(\neg L(x, |u|) \wedge \neg L(y, |v|) \supset \neg L(xy, w))$ выполнено. Положим $w_1 = w$, если $\mathrm{sgn}(u)\mathrm{sgn}(v) = 1$, и $w_1 = -w$ в противном случае. Тогда $|w_1| = w$ и w_1 – искомый (притом единственный) элемент множества C, для которого $P(u, v, w_1) = 1$. Теорема доказана.

Функциональность предиката P позволяет ввести *операцию умножения действительных чисел*: для любых $u, v, w \in C$ $w = uv$ тогда и только тогда, когда $P(u, v, w) = 1$.

Теорема 12 (об умножении действительного числа на нуль). *Для всех $u \in C$ $u0 = 0u = 0$ (а).*

Доказательство. Как было отмечено в начале доказательства теоремы 11, для любых $u, v \in C$ условие $u = 0 \vee v = 0$ влечет $\forall w \in C(P(u, v, w) \sim w = 0)$, то есть $uv = 0$. Отсюда выводим (а). Теорема доказана.

Теорема 13 (о коммутативности умножения действительных чисел). *Для всех $u, v \in C$ $uv = vu$.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из определения (10) предиката умножения, теоремы 11 о его функциональности и свойства коммутативности умножения рациональных чисел. Теорема доказана.

Лемма 10. *Для всех $u, v \in C$ $|u||v| = |uv|$ (а).*

Доказательство. Поскольку модуль действительного числа не меньше нуля (в силу леммы 7 и определения модуля числа), то $\mathrm{sgn}(|uv|) = 1$ тогда и только тогда, когда $uv \neq 0$, то есть когда $\mathrm{sgn}(|u|)\mathrm{sgn}(|v|) = 1$ (в силу теоремы 12). Поэтому $\mathrm{sgn}(|uv|) = \mathrm{sgn}(|u|)\mathrm{sgn}(|v|)$. Отсюда, используя определение (10) и теорему 11, выводим (а). Лемма доказана.

Лемма 11. *Для любых $u, v \in C$, $z \in A$ условия* $L(z, |uv|) = 1$ (а) и $\exists x, y \in A(L(x, |u|) \wedge L(y, |v|) \wedge z = xy)$ (б) равносильны.

Доказательство. Выберем произвольно $u, v \in C$ и рассмотрим множество $M = \{z \in B | z \le 0 \vee \exists x, y \in A(L(x, |u|) \wedge L(y, |v|) \wedge z = xy)\}$. Тогда, по определению операции умножения действительных чисел, для любого $z \in A$ условие $M(z) = 1$ равносильно каждому из условий (а), (б) (см. доказательство теоремы 11), то есть (а) и (б) равносильны. Лемма доказана.

Теорема 14 (об ассоциативности умножения действительных чисел). *Для всех $u, v, w \in C$ $(uv)w = u(vw)$* (а).

Доказательство. Для любых $u, v, w \in C$ имеем $(\mathrm{sgn}(u)\mathrm{sgn}(v))\mathrm{sgn}(w) = \mathrm{sgn}(u)(\mathrm{sgn}(v)\mathrm{sgn}(w))$ (б), в силу свойства ассоциативности умножения рациональных чисел. Используя снова это свойство и леммы 10, 11, получаем цепочку равносильных для любого $z \in A$ условий: $L(z, |(uv)w|)$; $L(z, |uv||w|)$; $\exists x, y \in A(L(x, |uv|) \wedge L(y, |w|) \wedge z = xy)$; $\exists x_1, y_1, y \in A(L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|) \wedge L(y, |w|) \wedge z = (x_1y_1)y)$; $\exists x_1, y_1, y \in A(L(x_1, |u|) \wedge L(y_1, |v|) \wedge L(y, |w|) \wedge z = x_1(y_1y))$; $L(z, |u||vw|)$; $L(z, |u(vw)|)$. *Но тогда* $|(uv)w| = |u(vw)|$. С учетом условия (б), получаем (а). Теорема доказана.

Для доказательства теоремы о дистрибутивности умножения действительных чисел введем понятие А-сечений и действий над ними. При этом несколько отойдем от заданного стиля, и будем ссылаться на книгу Э. Ландау «Основы анализа» [3].

А-сечением назовем любое множество X положительных рациональных чисел, которое обладает следующими свойствами:

а) $\exists x \in A\ x \in X$;

б) $\exists x \in A\ x \notin X$;

в) $\forall x, y \in A\ (x \in X \wedge y \notin X) \supset x < y$;

г) $\forall x \in X\ \exists y \in X\ y > x$.

Если $x \in X$, будем называть его *нижним числом* относительно X, а если $x \notin X$ – соответственно *верхним числом* относительно X.

А-сечения X и Y называются *равными* (обозначается $X = Y$), если $\forall x \in A\ (x \in X) \sim (x \in Y)$. В противном случае А-сечения X и Y *не равны* (обозначается $X \neq Y$).

А-сечение X *больше* А-сечения Y (обозначается $X > Y$), если $\exists x \in A: (x \in X) \wedge (x \notin Y)$.

Пусть X и Y – А-сечения. Множество положительных рациональных чисел, представимых в виде $x + y$, где $x \in X$, а $y \in Y$, называется *суммой А-сечений* X и Y и обозначается $X + Y$.

Пусть X и Y – А-сечения. Множество положительных рациональных чисел, представимых в виде xy, где $x \in X$, а $y \in Y$, называется *произведением* А-сечений X и Y и обозначается XY.

Сумма и произведение сечений также являются сечениями [3].

Лемма 12 (дистрибутивность для А-сечений). *Пусть X, Y и Z – А-сечения. Тогда выполняется соотношение $X(Y + Z) = XY + XZ$.*

Доказательство.

1) Каждое нижнее число относительно $X(Y+Z)$ имеет вид $x(y+z) = xy + xz$, где $x \in X$, а $y \in Y$, $z \in Z$. Но $xy + xz$ – нижнее число относительно $XY+XZ$.

2) Каждое нижнее число относительно $XY+XZ$ имеет вид $xy + x'z$, где $x, x' \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$. В случае $x \geq x'$ обозначим через x'' число x; в случае $x < x'$ – число x'. В обоих случаях $x'' \in X$ и, значит, $x''(y+z)$ – нижнее число относительно $X(Y+Z)$. Из неравенств $xy \leq x''y$, $x'z \leq x''z$ следует $xy+x'z \leq x''y+x''z = x''(y+z)$, а значит, $xy+x'z$ будет нижним числом и относительно $X(Y+Z)$. Лемма доказана.

Следующие три леммы относятся к теории действительных чисел.

Лемма 13. *Для всех* $u,v \in C$ $-(u+v) = -u + (-v)$.

Доказательство. Из коммутативности сложения действительных чисел следует, что $-(u+v) = -(v+u)$ и $-u+(-v) = -v + (-u)$, поэтому без ограничения общности можно предполагать, что $u \geq v$.

1) Если $u>0$, $v>0$, то $-u+(-v) = -(u+v)$.

2) Если $u>0$, $v=0$, то $-u+(-v) = -u+0 = -u = -(u+0) = -(u+v)$.

3) Если $u>0$, $v<0$, то либо а) $u>|v|$, и, следовательно, $u+v = u-|v|$, $-u+(-v) = -u+|v| = -u(-|v|) = -(u+v)$; либо б) $u=|v|$, и, следовательно, $-u+v=0$, $-u+(-v) = -u+|v| = 0 = -(u+v)$; либо в) $u<|v|$, и, следовательно, $u+v = -(|v|-u)$, $-u+(-v) = -u+|v| = |v|-u = -(u+v)$.

4) Если $u=0$, то $-u+(-v) = 0+(-v) = -v = -(0+v) = -(u+v)$.

5) Если $u<0$, то $v<0$, $u+v = -(|u|+|v|)$ и $-u+(-v) = |u|+|v| = -(u+v)$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Для всех* $u,v \in C$ $-(u-v) = v-u$.

Доказательство. По лемме 13 имеем $-(u-v) = -(u+(-v)) = -u+(-(v)) = -u+v = v+(-u) = v-u$. Лемма доказана.

Лемма 15. *Любое действительное число* $u \in C$ *может быть представлено в виде разности двух положительных чисел.*

Доказательство. Если $u>0$, то $u = (u+1)-1$. Если $u=0$, то $u=1-1$. Если $u<0$, то $-u = |u| = (|u|+1)-1$ и $u = -((|u|+1)-1) = 1-(|u|+1)$. Лемма доказана.

Поскольку между А-сечениями и положительными действительными числами существует взаимно однозначное соответствие, положительные действительные числа можно считать именами А-сечений. Таким образом, под разностью двух А-сечений будем понимать разность двух соответствующих положительных действительных чисел. Эти числа будем обозначать так же, как и А-сечения, заглавными латинскими буквами.

Лемма 16. *Из* $u = X_1-X_2$, $v = Y_1-Y_2$, *следует* $u+v = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

Доказательство.

1) Пусть $u>0$, $v>0$. Поскольку для произвольных положительных чисел K, L, M, N $(K+L)+(M+N) = (K+L)+(N+M) = ((K+L)+N)+M = M+((K+L)+N) = (M+K)(L+N)$, то $(u+v)+(X_2+Y_2) = X_1+Y_1$, и, значит, утверждение леммы справедливо.

2) Пусть $u<0$, $v<0$. Тогда, по лемме 13, $X_2-X_1 = -u>0$, $Y_2-Y_1 = -v>0$ и, значит, в силу 1), $-u+(-v) = (X_2+Y_2)-(X_1+Y_1)$, $u+v = -(-u+(-v)) = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

3) Пусть $u>0$, $v<0$, так что $X_1-X_2>0$, $Y_2-Y_1>0$.

а) Если $u>|v|$, то $X_1-X_2 > Y_2-Y_1$ и, следовательно, $X_1+Y_1 = ((X_1+X_2)-X_2)+Y_1 = (X_1-X_2)+(X_2+Y_1) = (X_2+Y_1)+(X_1-X_2) = (X_2+Y_1)+((Y_2-Y_1)+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1))) = ((X_2+Y_1)+(Y_2-Y_1))+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1)) = (X_2+(Y_1+(Y_2-Y_1)))+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1)) = (X_2+Y_2)+((X_1-X_2)-(Y_2-Y_1))$, откуда $(X_1+Y_1)-(X_2+Y_2) = (X_1-X_2)-(Y_1-Y_2) = -u-|v| = u+v$.

б) Если $u<|v|$, то, в силу а), $-((Y_2-Y_1)+(X_2-X_1)) = u+v = -(-u+(-v)) = -((Y_2+X_2)-(Y_1+X_1)) = (Y_1+X_1)-(Y_2+X_2) = (X_1+Y_1)-(X_1+Y_2)$.

в) Если $u=|v|$, так что $X_1-X_2 = Y_2-Y_1$, то $X_1 = X_2+(Y_2-Y_1)$, $X_1+Y_1 = X_2+Y_2$, и $u+v=0 = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

4) Пусть $u<0$, $v>0$. Тогда, в силу 3), $u+v = (Y_1+X_1)-(Y_2+X_2)$ и $u+v = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

5) Пусть $u=0$. Тогда $X_1 = X_2$, $u+v = v$.

а) При $Y_1>Y_2$ имеем $(Y_1-Y_2)+(X_1+Y_2) = ((Y_1-Y_2)+Y_2)+X_1 = Y_1+X_1 = X_1+Y_1$, $v = Y_1-Y_2 = (X_1+Y_1)-(X_1+Y_2) = (X_1+Y_1)-(X_1+Y_2)$.

б) При $Y_1 = Y_2$ имеем $v=0 = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

в) При $Y_1>Y_2$, в силу а), имеем $-v = Y_2-Y_1 = (X_2+Y_2)-(X_1+Y_1)$ и $v = -(-v) = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$.

6) Пусть $v=0$. Тогда, в силу 5), $u+v = v+u = (Y_1+X_1)-(Y_2+X_2) = (X_1+Y_1)-(X_2+Y_2)$. Лемма доказана.

Лемма 17. *Для произвольных положительных чисел* X, Y, Z *выполняется соотношение* $X(Y-Z) = (XY-XZ)$.

Доказательство.

1) При $X>Z$ имеем $(Y-Z)+Z = Y$, и, следовательно, по лемме 12, $X(Y-Z)+XZ = XY$, откуда $X(Y-Z) = XY-XZ$.

2) При $Y=Z$ имеем $XY = XZ$, откуда получаем $X(Y-Z) = X0 = 0 = XY-XZ$.

3) При $Y<Z$, в силу 1), имеем $X(Z-Y) = XZ-XY$, откуда $X(Y-Z) = X(-(Z-Y)) = -(X(Z-Y)) = -(XZ-XY) = XY-XZ$. Лемма доказана.

Теорема 15 (о дистрибутивности умножения действительных чисел). *Для всех* $u, v, w \in C$ $u(v+w) = uv+uw$.

Доказательство.

1) Пусть $u>0$. По лемме 15, $v = Y_1-Y_2$, $w = Z_1-Z_2$. Тогда, по лемме 16, $v+w = (Y_1+Z_1)-(Y_1+Z_2)$, следовательно, по леммам 12 и 17, $u(v+w) = u(Y_1+Z_1)-u(Y_1+Z_2) = (uY_1+uZ_1)-(uY_2++uZ_2)$ и, значит, по леммам 16 и 17, $u(v+w) = u(Y_1-Y_2)+u(Z_1-Z_2) = uv+uw$.

2) Пусть $u=0$. Тогда $u(v+w) = 0 = uv+uw$.

3) Пусть $u<0$. Тогда, в силу 1), $(-u)(v+w) = (-u)v+(-u)w$, следовательно, $(-u(v+w)) = (-u)v+(-u)w$, и $u(v+w) = -((-u)v+(-u)w) = -((-u)v)+(-((-u)w)) = uv+uw$. Теорема доказана.

Теорема 16 (о соответствии операций сложения, умножения и отношения порядка на множествах рациональных и действительных чисел). *Для любых z_1, z_2, $z \in B$ условия $z_1 + z_2 = z$ (а), $z_1 z_2 = z$ (б), $z_1 < z_2$ (в) равносильны, соответственно, условиям $S(z_1, z_2, z) = 1$ (аг), $P(z_1, z_2, z) = 1$ (бг), $H(z_1, z_2) = 1$ (вг), где S, P, H — предикаты сложения, умножения и порядка на множестве действительных чисел.*

Доказательство. Пусть z_1, z_2, $z \in B$. Тогда, по теореме 2 $z_1, z_2, z \in C$. Предположим, что выполнено условие (а). Выберем $x, y \in B$ так, что $x < z_1$, $y < z_2$, то есть $L(x, z_1) = L(y, z_2) = 1$. Тогда (по лемме 10 из второй части этой работы) $x+y < z_1+z_2$, то есть $L(x+y, z) = 1$. Если же $z_1 \le x$, $z_2 \le y$, то есть $L(x, z_1) = L(y, z_2) = 0$, то $z_1+z_2 \le x+y$, $L(x+y, z) = 0$. Поэтому условие (а) влечет (аг). В силу теоремы о функциональности предиката S, последнее означает равносильность условий (а) и (аг). Предположим, что выполнено условие (б). Тогда, если $x, y \in A$ и $x < |z_1|$, $y < |z_2|$, то, по лемме 9 из части 2, $xy < |z_1||z_2| = |z|$, то есть условие $L(x, |z_1|) = L(y, |z_2|) = 1$ влечет $L(xy, |z|) = 1$. Если же $|z_1| \le x$, $|z_2| \le y$, то $|z| = |z_1||z_2| \le xy$, то есть условие $L(x, |z_1|) = L(y, |z_2|) = 0$ влечет $L(xy, |z|) = 0$. Легко убедиться также в том, что $\operatorname{sgn}(z) = \operatorname{sgn}(z_1)\operatorname{sgn}(z_2)$. Например, если $z_1 < 0$, $z_2 > 0$, то есть $\operatorname{sgn}(z_1) = -1$, $\operatorname{sgn}(z_2) = 1$, то $(-z_1) > 0$ (по лемме 8 из части 2), $(-z_1)z_2 = ((-1)z_1)z_2 = (-1)(z_1 z_2) = -z_1 z_2 > 0$, $z_1 z_2 < 0$, $\operatorname{sgn}(z) = \operatorname{sgn}(z_1 z_2) = -1 = \operatorname{sgn}(z_1)\operatorname{sgn}(z_2)$. Таким образом, условие (б) влечет (бг). В силу теоремы о функциональности предиката P, выводим отсюда равносильность (б) и (бг). Предположим, наконец, что выполнено условие (в). Тогда $z_1 \ne z_2$ и для любого $x \in B$ условие $x < z_1$ влечет $x < z_2$ (в силу транзитивности отношения порядка на множестве рациональных чисел), то есть $L(x, z_1) = 1$ влечет $L(x, z_2) = 1$. Значит (вг) следует из (в). Аналогично, условие $z_2 < z_1$ влечет $H(z_2, z_1) = 1$. Используя теорему о сравнимости действительных чисел, приходим к выводу о равносильности условий (в) и (вг). Теорема доказана.

Теорема 17 (об упорядоченности множества действительных чисел). *Множество действительных чисел с определенным на нем отношением нестрогого порядка является цепью.*

Доказательство. Отношение нестрогого порядка рефлексивно, так как для любого $u \in C$ имеем $u = u$, а значит $u \le u$. Доказываем антисимметричность этого отношения. Пусть u, $v \in C$ и одновременно $u \le v$, $v \le u$, то есть выполнены условия $(u < v) \vee (u = v)$ и $(v < u) \vee (v = u)$. Из теоремы о сравнимости действительных чисел следует, что такое возможно лишь в случае $u = v$. Поэтому нестрогий порядок обладает свойством антисимметричности. Свойство транзитивности нестрогого порядка выводится из теоремы 5 с учетом того, что для любых u, v, $w \in C$ условие $(u < v) \wedge (v = w)$ или $(u = v) \wedge (v < w)$ влечет $u < w$, а условие $(u = v) \wedge (v = w)$ влечет $u = w$. Наконец, по теореме о сравнимости действительных чисел, для любых u, $v \in C$ всегда либо $u = v$, либо $u < v$, либо $v < u$, и поэтому условие $(u \le v) \vee (v \le u)$ выполнено. Теорема доказана.

Покажем теперь, что среди действительных чисел имеются такие, которые не являются рациональными числами.

Лемма 18. *При любом $a \in A$ уравнение $xx = a$ имеет решение $x \in C$.*

Доказательство. Выберем произвольно $a \in A$ и рассмотрим множество $M = \{y \in B | y < 0 \vee yy < a\}$. Покажем, что это множество удовлетворяет всем посылкам аксиомы (7) действительных чисел. а) Множество M не пусто, так как содержит 0. б) Выбирая $y \in A$ так, чтобы выполнялось условие $a < y \wedge 1 < y$ (например, полагая $y = a+1$), получаем, по лемме 9 из части 2, что $a < yy$, то есть $\neg M(y)$. в) Пусть $z_1, z_2 \in B$ и выполнено условие $M(z_1) \wedge \neg M(z_2)$. Тогда имеем $0 \le z_2 \wedge a \le z_2 z_2 \wedge \wedge (z_1 < 0 \vee z_1 z_1 < a)$. Если $z_1 < 0$, то сразу получаем $z_1 < z_2$ Если же $z_1 z_1 < a$ (и $0 \le z_1$), то из условия $a \le z_2 z_2$ и леммы 9 из части 2 следует $z_1 z_1 < z_2 z_2$, $z_1 < z_2$. г) Пусть для некоторого $y \in B$ верно $M(y)$. Если $y < 0$, то достаточно заметить, что $M(0) = 1$. Рассмотрим случай $0 \le y$. Определим такой $u \in A$, чтобы удовлетворить условию $(y+u)(y+u) < a$. Так как $yy < a$, то $L(yy, a)$ (по лемме 4) и существует $w \in A$ такой, что $yy < w < a$ (в силу аксиомы (4)). Выберем в качестве u меньшее из чисел 1 и $(a + (-w))\,(y+y+1+1)^{-1}$. Тогда будем иметь $(y+u)(y+u) = yy+yu+yu+uu \le yy+yu+yu+u = = yy+(y+y+1)u \le yy + (y+y+1)(a+(-w))(y+y+1+1)^{-1} \le \le yy + (a + (-w)) = a + (yy + (-w)) < a$. Здесь было использовано очевидное условие $y+y+1 < y+y+1+1$, $(y+y+1)(y+y+1+1)^{-1} < 1$. Полагая $z = y + u$, получим $y < z$ и $M(z)$. Все посылки аксиомы (7), таким образом, выполнены. Поэтому существует $x \in C$ такой, что для любого $y \in B$ $M(y) \sim L(y, x)$. Пусть какие-то u, $v \in A$ удовлетворяют условию $L(u, x) \wedge L(v, x)$. Тогда $uu < a \wedge vv < a$ и если, например, $u \le v$, то $uv \le vv < a$, то есть верно $L(uv, a)$. Пусть теперь для некоторых u, $v \in A$ имеем $\neg L(u, x) \wedge \neg L(v, x)$. Тогда $a \le uu$, $a \le vv$ и если, например, $u \le v$, то $a \le uu \le uv$, а значит $\neg L(uv, a)$. Из определения (10) предиката умножения выводим, что $xx = a$. Лемма доказана.

Лемма 19. *Для любого $z \in A$ найдутся такие x, $y \in N$, что $zy = x$* (а).

Доказательство. Выберем произвольно $z \in A$. По аксиоме (2) из части 2, существуют x, $y \in N$ такие, что $R(x, y, z) = 1$. Поскольку $R(y, 1, y) = 1$ (теорема 2 из части 2), то, по определению умножения положительных рациональных чисел, имеем $R(xy, y1, zy) = 1$ (б). Тогда из условий (б), $R(x, 1, x) = 1$, $(xy)1 = x(y1)$ и аксиом (2), (4) положительных рациональных чисел (в части 2 настоящей работы) выводим (а). Лемма доказана.

Теорема 18. *Существует действительное число, не принадлежащее множеству рациональных чисел.*

Доказательство. По лемме 18, найдется такой $x \in C$, $x > 0$, который удовлетворяет условию $xx = 1+1$

(а). Предположим, что $x \in A$. Тогда, в силу леммы 19, существует такой $q \in N$, что $xq \in N$ (б). Выберем среди всех натуральных q, удовлетворяющих условию (б), наименьшее (это можно сделать, по лемме 2 из части 2). Обозначим $xq = p$. Тогда $pp = (xq)(xq) = (xx)(qq) = (1+1)(qq)$, то есть $qq + qq = pp$ (в). Поскольку $q < q+q$, то из (в) получаем $q < p < q+q$ и $p + (-q) < q$. С другой стороны, непосредственной проверкой из (а), (б) и (в) выводим условие $xx(p + (-q))(p + (-q)) = (q+q + (-p))(q+q + (-p))$. Поэтому $x(p + (-q)) = q+q + (-p)$, и q не есть минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию (б). Получили противоречие с исходным предположением о том, что x – рациональное число. Теорема доказана.

Действительные числа, не принадлежащие множеству рациональных чисел, называются *иррациональными*.

Выводы

Полученные здесь результаты по идентификации понятия числа имеют много общего с известными положениями из учения об основаниях арифметики, поэтому необходимо проанализировать различие между ними. В нашей постановке речь идет только об идентификации (то есть о математическом описании) понятия числа, вопрос об обосновании этого понятия не ставится. При решении задачи идентификации объектов все средства формального описания хороши, лишь бы они были надежны; нет необходимости их ограничивать, как это делается в математической логике при обосновании понятий арифметики. Снятие запрета на средства формального описания дает возможность идентифицировать именно ту арифметику, которая фактически используется в математической практике, а не тот ее вариант, который носит название *формальной арифметики*.

Наиболее близкую к формулируемой здесь постановку задачи мы находим в классической работе Ландау [3], опубликованной впервые в 1930 году. Насколько нам известно, до настоящего времени результаты этой работы не пересматривались и не улучшались. Главный недостаток данной работы, оцениваемой нами с точки зрения задачи идентификации (а такая задача в ней не ставится, поскольку речь там идет только об обосновании арифметики), заключается в том, что в ней все аксиомы арифметики записаны на неформализованном логическом языке, то есть на том языке, который был общепринятым среди математиков в то время, когда эта работа была написана. При решении задачи идентификации этого недостаточно. Для этой цели мы использовали язык алгебры подстановочных операций [1]. Аксиомы (1)-(5), (15), (16), (20) и (21) из первой части настоящей работы, по существу, повторяют формулировки Ландау, различие заключается лишь в языке описания. Аксиомы (1)-(4) из второй части этой работы у Ландау вовсе отсутствуют. Это обусловлено тем, что он не различает дроби как пары натуральных чисел и как положительные рациональные числа и поэтому не вводит связывающий их предикат R. Однако при использовании языка алгебры подстановочных операций сделать это необходимо. То же самое относится и к аксиомам (7)-(10) из второй части работы, в которых фигурирует отсутствующий у Ландау предикат T, связывающий пары положительных рациональных чисел с соответствующими им рациональными числами. У Ландау отсутствует также предикат L, связывающий сечения с соответствующими им вещественными числами. Введение предиката L потребовало существенно иной системы аксиом для теории действительного числа (аксиомы (1)-(7)).

Список литературы: 1. *Баталин, А.В.* О теории натурального ряда [Текст] / *А.В. Баталин, З.В. Дударь, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. – С. 135-144. 2. *Баталин, А.В.* О теории рациональных и вещественных чисел [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // АСУ и приборы автоматики. Науч.-техн. журнал – 1998. № 107. С. 155-164. 3. *Ландау, Э.* Основы анализа. [Текст] / *Э. Ландау.* – М.: ИЛ, 1947. – 182 с. 4. *Баталин, А.В.* Идентификация категории количества. 1 [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика. Науч.-техн. журнал – 1999. № 1. С. 95-104. 5. *Баталин, А.В.* Идентификация категории количества. 2 [Текст] / *А.В. Баталин, С.А. Пославский, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко* // Радиоэлектроника и информатика.. Науч.-техн. журнал – 2001. № 5. С. 136-148.

Поступила в редколлегию 22.04.2010

УДК 519.7

Про теорію дійсних чисел / М.Ф. Бондаренко, О.Д. Дрюк, Н.П. Круглікова, С.О. Пославський, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 150–158.

Категорія кількості представлена поняттями натурального, раціонального та дійсного числа. Мовою алгебри предикатних операцій описані характеристичні властивості цих понять, доказана повнота опису. З визначень понять, які розглянуті виведені їх основні властивості, на яких базується будова математичного аналізу.

Бібліогр.: 5 назв.

UDC 519.7

On the real numbers theory / M.F. Bondarenko, A.D. Dryuk, N.P. Kruglikova, S.A. Poslavsky, Ju.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 150–158.

The category of a quantity represented by concepts natural, rational and real quantities. In language of algebra of predicate operations the characteristic properties of these concepts are described, the completeness of the descriptions is proved. From definitions of considered concepts their main properties are introduced, on which the building of a calculus bases.

Ref.: 5 items.