УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

О СИСТЕМЕ УСЛОВИЙ ЛИНЕЙНОСТИ ПРЕДИКАТА

Рассмотрены условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора – на декартовом квадрате открытого выпуклого множества, произвольного выпуклого множества, воспроизводящего конуса и всего пространства. Доказаны соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях линейности предиката.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работы [1], в которой проанализированы результаты, полученные Ньютоном, Максвеллом, Шредингером и Грассманом в области моделирования цветового зрения человека. В качестве формального аппарата был предложен метод компараторной идентификации и модели в виде линейных предикатов. Развиты математические средства, эффективные при моделировании психофизических процессов. Источником математических задач были запросы практики моделирования функции человеческого зрения. Даны определения линейного предиката и линейного *n*-мерного предиката; доказаны необходимые и достаточные условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора – декартовом квадрате всего пространства $L^2[0,1]$, его конуса и выпуклого множества.

В данной работе продолжается рассмотрение условий линейности предиката для некоторых областей определения линейного оператора – на декартовом квадрате открытого выпуклого множества, произвольного выпуклого множества, воспроизводящего конуса и всего пространства.

1. Открытое выпуклое множество

Пусть V – выпуклое множество в $L^2[0,1]$, множество $\operatorname{aff}V$ замкнуто и множество V открыто в $\operatorname{aff}V$. Это значит, что для каждой точки $x \in V$ существует такая окрестность W, что $W \cap \operatorname{aff}V$. Для краткости будем говорить при выполнении этих условий, что множество V *относительно открыто*. В частности, если V – открытое множество, то оно, очевидно, относительно открыто. Всюду на протяжении этого параграфа Ф – обозначение для предиката, удовлетворяющего условиям *а* – *в* [1].

Теорема 1. *Для того чтобы предикат* Ф*, определенный на декартовом квадрате относительно открытого выпуклого множества* V*, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$*, то*

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1;$$

д) существует такое подмножество $u \subset V$*, открытое в* $\operatorname{aff}V$*, что если последовательность* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $x \in U$*, последовательность* $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* $y \in U$ *и* $\Phi(x_k, y_k) = 1$*, то* $\Phi(x, y) = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Напомним, что *двоично-рациональными* называются числа вида $m2^{-n}$, где m – целое число, n – натуральное. Проверим, прежде всего, что если $\Phi(x, y) = 1$, $\Phi(x', y') = 1$, γ – двоично-рациональное число из отрезка [1, 0], то

$$\Phi((1-\gamma)x + \gamma x', (1-\gamma)y + \gamma y') = 1. \qquad (1)$$

Доказательство проведем индукцией по n. При n =1 двоично-рациональными числами из отрезка [0, 1] являются 0, 1/2 и 1. Для чисел γ, равных 0 или 1, равенство (1) выполняется по условию, для γ =1/2 этот факт эквивалентен условию г. Предположим, что (1) доказана при данном *n*. Рассмотрим число γ вида $k2^{(n+1)}$. Если k – четное, то γ – число вида $m2^{-n}$ и, следовательно, выполнимость (1) вытекает из предположения индукции. Пусть γ – нечетное число. Тогда $\gamma = 2m + 1$, где m – некоторое натуральное число. Положим, $\gamma_1 = m2^{-n}$, $\gamma_2 = (m+1)2^{-n}$. Очевидно, $\gamma = 1/2(\gamma_1 + \gamma_2)$. По предположению индукции

$$\Phi((1-\gamma_1)x + \gamma_1 x', (1-\gamma_1)y + \gamma_1 y') = 1,$$

$$\Phi((1-\gamma_2)x + \gamma_2 x', (1-\gamma_2)y + \gamma_2 y') = 1.$$

Применив к двум последним равенствам условие *г*, получим для γ формулу (1). Таким образом, (1) доказана.

Обозначим через S множество всех элементов ξ из $L^2[0,1]$, представимых в виде

$$\xi = \beta(x - y);\ x, y \in V;\ \Phi(x, y) = 1;\ \beta > 0. \qquad (2)$$

Пусть для некоторой точки $\xi \in S$ имеет место равенство

$$\xi = \beta'(x' - y');\ x', y' \in V;\ \beta' > 0. \qquad (3)$$

Покажем, что тогда

$$\Phi(x', y') = 1. \tag{4}$$

Согласно определению множества S для точки ξ существует представление (2). Рассмотрим вначале частный случай, когда в (2) $x, y \in U$. Без ограничения общности можем считать, что множество U выпукло (если это не так, можно взять в качестве нового множества U любой открытый шар в $\operatorname{aff} V$, являющийся частью U). Заметим, что для точек $x, y \in U$ из равенства $\Phi(x, y) = 1$ вытекает, что

$$\Phi(u, v) = 1, \quad u, v \in [x, y]. \tag{5}$$

Действительно, пусть $z(\gamma) = (1-\gamma)x + \gamma y, \quad \gamma \in [0,1]$. Если γ – двоично-рациональное число, то в силу (1) из равенств $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(y, y') = 1$ получаем

$$\Phi(z(\gamma), y) = 1\,. \tag{6}$$

Если γ не является двоично-рациональным, то найдется последовательность двоично-рациональных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к γ. Тогда, очевидно, последовательность $\{z(\gamma_k)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к точке $z(\gamma)$. Но в силу (6) $\Phi(z(\gamma_k), y) = 1$. Поскольку $z(\gamma_k)$, $y \in U$, из условия ∂ следует (6). В частности, из (6) получаем $\Phi(u, y) = 1$, $\Phi(v, y) = 1$. Отсюда вытекает (5). Зададим числа $\delta_1, \delta_2 \in [-1,1]$ и положим (рис. 1):

$$u = \frac{x+y}{2} + \frac{\delta_1}{2}(y-x), \qquad v = \frac{x+y}{2} - \frac{\delta_2}{2}(y-x).$$

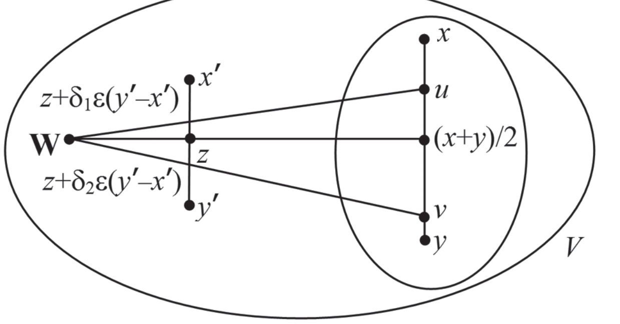

Рис. 1

Так как $u, v \in [x, y]$, то в силу (5) $\Phi(u, y) = 1$.

Пусть z – произвольная точка отрезка $[x', y']$. Зафиксируем двоично-рациональное число $\gamma \in (0,1)$, достаточно близкое к 1. Тогда точка W, определенная равенством

$$W = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{x+y}{2} + \frac{1}{\gamma}z\,, \tag{7}$$

достаточно близка к z и поскольку V – относительно открытое множество, отсюда следует, что $w \in V$. Из равенств $\Phi(u, v) = 1$, $\Phi(w, w) = 1$ с помощью (1) находим

$$\Phi((1-\gamma)u + \gamma w, (1-\gamma)v + \gamma w) = 1. \tag{8}$$

Имеем $(1-\gamma)u + \gamma w = (1-\gamma)u + (\gamma-1)(x+y)/2 + {}$ $+ z = z + (1-\gamma)(u - (x+y)/2)) = z + (1-\gamma)(\delta_1/2)(y-x)$.
Но из равенств (2) и (3) следует, что

$$y - x = (\beta'/\beta)(y' - x')\,.$$

Поэтому

$$(1-\gamma)u + \gamma w = z + \delta_1 \varepsilon (y' - x')\,,$$

где $\varepsilon = \beta'(1-\gamma)/2\gamma$. Аналогично

$$(1-\gamma)v + \gamma w = \ z + \delta_2 \varepsilon (y' - x')\,.$$

Но δ_1, δ_2 – произвольные числа отрезка $[-1, 1]$. Поэтому (8) означает, что для любой точки $z \in [x', y']$ существует такая окрестность на отрезке $[x', y']$, для любых точек которой $\Phi(u', v') = 1$. Поскольку отрезок является компактным множеством, из покрытия отрезка $[x', y']$ этими окрестностями можно выбрать конечное покрытие. Отбросим те из оставшихся отрезков, которые являются частью какого-либо другого отрезка покрытия. Пусть $\{[u_1, v_i]\}_{i=1}^{N}$ – получившееся покрытие. Тогда $u_1 = x', v_N = y', u_i < u_{i+1} \le v_i < v_{i+1}$. Поэтому $\Phi(u_i, u_{i+1}) = 1$, а следовательно, $\Phi(x', u_N) = 1$. Кроме того, $\Phi(u_N, y') = 1$. Из двух последних равенств вытекает (4).

Рассмотрим теперь другой частный случай, когда в (3) $x', y' \in U$. Для произвольной точки $z \in [x', y']$ введем точку w равенством (6), где $\gamma \in (0,1)$ – какое-либо двоично-рациональное число, при котором $w \in U$. Из равенств $\Phi(x, y) = 1$, $\Phi(w, w) = 1$ с помощью (1) находим

$$\Phi((1-\gamma)x + \gamma w, (1-\gamma)v + \gamma w) = 1. \tag{9}$$

Имеем $(1-\gamma)x + \gamma w = z - \varepsilon(y' - x')$, $(1-\gamma)y + \gamma w = {}$ $= z + \varepsilon(y' - x')$, где $\varepsilon = \beta'(1-\gamma)/2\beta$. Поэтому из (9) и свойства (5) вытекает, что для каждой точки $z \in [x', y']$ существует такая окрестность на этом отрезке, для любых точек u', v' которой будет $\Phi(u', v') = 1$. Как и в предыдущем случае, отсюда вытекает, что $\Phi(x', y') = 1$.

Перейдем теперь к общему случаю. Зафиксируем произвольную точку $x'' \in U$. Подберем такое положительное число β'', чтобы точка $y'' = x + \beta(\beta'')^{-1}(x - y)$ принадлежала множеству U. Тогда

$$\xi = \beta''(y'' - x'');\ x'', y'' \in U; \beta'' > 0. \tag{10}$$

Это второй из рассмотренных ранее частных случаев. Поэтому $\Phi(x'', y'') = 1$. При сравнении ξ представления в виде (3) и (10) мы находимся в условиях первого частного случая. Это позволяет заключить, что $\Phi(x', y') = 1$. Равенство (4) полностью доказано.

Заметим теперь, что для любых точек $x, y \in V$ соотношения

$$\Phi(x, y) = 1 \ \text{ и } \ x - y \in S \tag{11}$$

эквивалентны. Действительно, из равенства $\Phi(x, y) = 1$ по определению множества S следует, что $x - y \in S$. Обратное утверждение справедливо, поскольку (3) имплицирует (4).

Множество S замкнуто. Действительно, пусть последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ сходится к некоторой точке ξ. Зафиксируем произвольную точку $a \in U$. Как видно из определения (2), множества S и формулы (28) из [1] при любом числе ε точки вида $a + \varepsilon\xi_n \in \operatorname{aff} V$. По условию $\operatorname{aff} V$ – замкнутое множество. Поэтому и точка $a + \varepsilon\xi \in \operatorname{aff} V$. Но множество U является открытым в $\operatorname{aff} V$. Поэтому если ε – достаточно мало, то отсюда следует, что $a + \varepsilon\xi \in U$. Имеем

$$\xi_n = \frac{1}{\varepsilon}[(a + \varepsilon\xi_n) - a].$$

Поскольку из (3) вытекает (4), то $\Phi(a + \varepsilon\xi_n, a) = 1$. В силу условия *д* тогда и $\Phi(a + \varepsilon\xi, a) = 1$. Отсюда и из равенства

$$\xi = \frac{1}{\varepsilon}[(a + \varepsilon\xi) - a]$$

следует, что $\xi \in S$. Итак, S – замкнутое множество. Пусть $\Phi(x, y) = 1$, $\Phi(x', y') = 1$. Покажем, что тогда равенство (1) справедливо при всех (не обязательно двоично-рациональных) числах $\gamma \in [0,1]$. Положим $\xi = x - y$, $\xi = x' - y'$, $\xi(y) = (1-\gamma)\xi + \gamma\xi'$. Очевидно,

$$\xi\,(\gamma) = ((1-\gamma)x + \gamma x') - ((1-\gamma)y + \gamma y'). \qquad (12)$$

Поэтому (1) означает, что в случае двоично-рационального числа γ точка $\xi(\gamma)$ принадлежит S. Аппроксимируя произвольное число γ сходящейся к нему последовательностью двоично-рациональных чисел и используя замкнутость множества S, получаем, что при любом $\gamma \in [0,1]$ точка $\xi(\gamma)$ принадлежит S. Таким образом, из (12) и свойства (4) вытекает (1).

Покажем теперь, что множество S является линейным многообразием. Пусть $\xi \in S$, γ – произвольное число. Если $\gamma > 0$, то из (2) следует, что

$$\gamma\,\xi = (\gamma\,\beta)(x - y), \qquad \Phi(x, y) = 1, \qquad \gamma\,\beta > 0.$$

Поэтому $\gamma\xi \in S$. Если $\gamma < 0$, то из (2) получаем

$$\gamma\,\xi = (-\gamma\,\beta)(y - x), \quad \Phi(y, x) = 1, \quad -\gamma\,\beta > 0.$$

Следовательно, $\gamma\xi \in S$. Наконец, если $\gamma = 0$, то $\gamma\xi = 0$ и, значит, $\gamma\xi = x - x$, $\Phi(x, x) = 1$, так что $\gamma\xi \in S$. Далее, для любых точек $\xi, \xi' \in S$ из соотношений $\xi = \beta(x - y)$, $\xi' = \beta'(x' - y')$, $\Phi(x, x) = 1$, $\Phi(x', x') = 1$, $\beta > 0$, $\beta' > 0$ при $\gamma = \beta'(\beta + \beta')^{-1}$ вытекают равенства

$$\xi + \xi' = (\beta + \beta')(((1-\gamma)x + \gamma\,x') - ((1-\gamma)y + \gamma\,y'))$$

и (1). Это означает, что $\xi + \xi' \in S$.

Итак, S – линейное подпространство в $L^2[0,1]$. Пусть P – ортопроектор на ортогональное дополнение $S^{\perp}$ к S. Равенство $P_x = P_y$ выполняется тогда и только тогда, когда $x - y = S$. Поэтому из эквивалентности соотношений (11) вытекает (1).

Теорема 1 доказана.

В приложениях для проверки выполнимости условий *г* и *д* в каждой конкретной ситуации следует проводить экспериментальное исследование. При этом имеющиеся средства исследования могут быть различными в различных ситуациях. Для проверки выполнения условия *г* экспериментатор должен иметь возможность для любых физических сигналов x и y формировать средний между ними сигнал $(x + y)/2$. В случае, когда этими сигналами являются излучения, сумма имеет естественную физическую интерпретацию – смешение излучений, а умножение на положительное число λ интерпретируется как увеличение интенсивности излучения в λ раз при сохранении спектрального состава. Таким образом, сигнал $(x + y)/2$ может быть сформирован в два этапа – сложение и умножение на 1/2. Для удобства приложений теоремы мы укажем различные варианты формулировки условий *г* и *д*.

Условие *г* может быть заменено совокупностью двух условий:

г') если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$, *то*

$$\Phi(x + x', y + y') = 1,$$

г") если $\Phi(x, y) = 1$, *то* $\Phi\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right) = 1.$

Действительно, из *г'*, *г"*, очевидно, вытекает условие *г*, и поэтому теорема 1 останется справедливой в сторону достаточности, если заменить *г* на *г'* и *г"*. Справедливость теоремы в сторону необходимости при такой замене также очевидна.

Легко увидеть также, что условие *г* может быть заменено условием: если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то при любом $\gamma \in [0,1]$ имеет место равенство (1).

Еще один вариант: если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то при любых α и β, для которых $\alpha x + \beta x' \in V$, $\alpha y + \beta y' \in V$, имеет место равенство $\Phi(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') = 1$.

Условие *г*, однако, не может быть заменено одним лишь условием *г'*. Это видно из следующего примера. Пусть $V = L^2[0,1]$, e – произвольный ненулевой вектор в $L^2[0,1]$. Рассмотрим предикат Φ на $V \times V$, равный 1 тогда и только тогда, когда $(e, x - y)$ – целое число. Очевидно, для этого предиката выполняются условия *а*, *б*, *в*, *г'*, *д*, но не существует ортопроектор P, для которого условия $Pz = 0$ и (e, z) – целое число эквивалентны при всех z.

Аналогично условие *г* не может быть заменено следующим более слабым условием:

если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$, *то* $\Phi\left(\frac{x + x'}{2}, y\right) = 1$.

В качестве примера рассмотрим предикат Φ, определенный на $L^2[0,1] \times L^2[0,1]$ условием: $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или $(x, e) = 0$ и $(y, e) = 0$, где e — произвольно фиксированный ненулевой вектор. Этот же пример показывает, что условие *г* не может быть заменено условием:

$$\text{если } \Phi(x, y) = 1 \text{, то } \Phi\left(\frac{x+x}{2}, y\right) = 1 .$$

Условие *д* может быть заменено условием *д*’: *существует такая точка x и такая окрестность $u \subset V$ этой точки, что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $x \in U$ и $\Phi(x_k, y) = 1$, то $\Phi(x, y) = 1$.*

Тот факт, что теорема 1 остается справедливой при замене *д* на *д*’ в сторону достаточности, виден из доказательства теоремы. Справедливость в сторону необходимости вытекает из того, что условие *д*’, очевидно, слабее условия *д*.

2. Произвольное выпуклое множество

Множества, фигурирующие в частных случаях, описанных выше, не являются открытыми в своих аффинных оболочках. Например, положительный конус в пространстве $L^2[0,1]$ является воспроизводящим, то есть его линейная оболочка совпадает со всем пространством, однако он не является открытым множеством. Условия *а — д* теоремы 1 не обеспечивают линейность предиката, если множество V не является относительно открытым. Это видно из следующего примера. Пусть предикат Φ определен на квадрате положительного конуса K в $L^2[0,1]$ условием $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда *x* и *y* одновременно равны или одновременно не равны нулю. Условия *а — г* для этого предиката, очевидно, выполняются. Для любого открытого множества U, не содержащего 0, верно, что если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ сходится к $x \in U$, последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ сходится к $y \in U$ и $\Phi(x_k, y_k) = 1$, то $\Phi(x, y) = 1$. Тем не менее, этот предикат не является линейным. Действительно, если бы он был линейным, то, очевидно, условие *д* выполнялось бы при $U = K$. Это, однако, не так: пусть $x_k \to x$, $x_k \neq 0$, $y_k \to y$, $x = 0$, $y \neq 0$. Тогда $\Phi(x_k, y_k) = 1$, но $\Phi(x, y) = 0$. Этот пример показывает, как следует усилить формулировку теоремы 1, чтобы она оставалась справедливой и для множеств, не являющихся относительно открытыми. А именно, следует потребовать, чтобы условие непрерывности было глобальным.

Теорема 2. *Для того чтобы предикат Φ, определенный на декартовом квадрате выпуклого множества V с замкнутой аффинной оболочкой, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1;$$

д) если последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $x \in V$, последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $y \in V$ и $\Phi(x_k, y_k) = 1$, то $\Phi(x, y) = 1$.

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть аффинная оболочка выпуклого множества V замкнута. Тогда для произвольной точки $x_0 \in V$ существует такая константа C, что любая точка $\xi \in T(V)$ представима в виде*

$$\xi = \beta(x - y); \quad \beta > 0; \quad x, y \in V, \tag{13}$$

где

$$\beta = C\|\xi\|; \quad \|x - x_0\| \le 1; \quad \|y - x_0\| \le 1. \tag{14}$$

Доказательство. Наличие представления (13) вытекает из формулы (28) из [1]. Покажем теперь, что среди представлений (13) существуют такие, которые удовлетворяют дополнительным условиям (13). Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in V$. Рассмотрим линейное пространство $T(V) \times R$, элементами которого являются упорядоченные пары (ξ; *t*), где $\xi \in T(V)$, t — действительное число. Введем в нем норму, полагая

$$\|(\xi;\, t)\| = \sqrt{\|\xi\|^2 + t^2} .$$

Поскольку $\operatorname{aff} V$ — замкнутое множество, то $T(V)$ — подпространство пространства $L^2[0,1]$. Поэтому $T(V) \times P$ с введенной таким образом нормой – гильбертово пространство. Определим множество K_0 в пространстве $T(V) \times R$ равенством (рис. 2):

$$K_0 = \{(t\,(x - x_0);\, t) \mid x \in V,\ \ t \in R\}.$$

Множество K_0 является конусом.

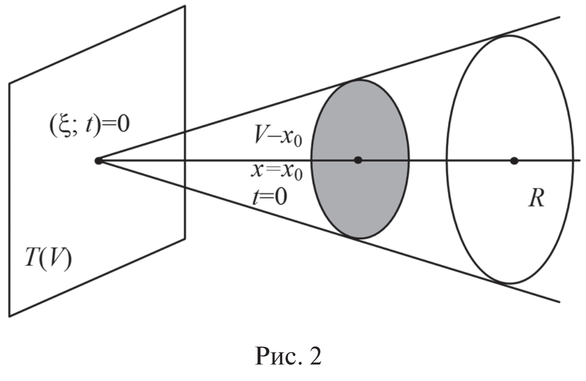

Рис. 2

Действительно, если $(t(x - x_0); t) \in K_0$ и $\lambda \ge 0$, то $\lambda(t(x - x_0); t) = (\lambda t(x - x_0); \lambda t) \in K_0$. Пусть $(t_i(x_i - x_0); t_i) \in {}_0$, $i = 1,2$. Тогда $(t_1(x_1 - x_0), t_1) + (t_2(x_2 - x_0), t_2) = (t(x - x_0), t)$, где

$$t = t_1 + t_2, \quad x = \frac{t_1}{t}x_1 + \frac{t_2}{t}x_2 \in V.$$

Покажем теперь, что конус K_0 является воспроизводящим в пространстве $T(V)\times R$. Рассмотрим вначале точки пространства $T(V)\times R$ вида $(\xi;0)$. Так как $\xi\in T(V)$, то в силу указанного выше имеет место представление (13). Равенство (13) можно переписать в виде $\xi=\beta((x-x_0)-(y-y_0))$. Поэтому

$$(\xi\,;\,0)=(\beta\,(x-x_0);\,\beta\,)-(\beta\,(y-y_0);\,\beta\,).$$

Очевидно, каждый из элементов, фигурирующих в правой части этого равенства, принадлежит конусу. Теперь рассмотрим точки пространства $T(V)\times R$ вида $(0;t)$. Для них имеет место очевидное равенство:

$$(0;\,t)=\left(t\left(x_0-x_0\right);\,t\right)-\left(0\cdot\,\left(x_0-x_0\right);\,0\right).$$

Следовательно, такие точки также содержатся в линейной оболочке конуса K_0. Осталось заметить, что любая точка $(\xi;t)$ пространства представима в виде

$$(\xi_i;\,t)=(\xi;0)+(0;t).$$

Поскольку каждая из точек, фигурирующая в правой части этого равенства, принадлежит $L(K_0)$, отсюда вытекает, что $(\xi;t)\in L(K_0)$.

Поскольку конус K_0 является воспроизводящим в гильбертовом пространстве $T(V)\times R$, то существует такая константа C, что для каждого элемента $\eta\in T(V)\times R$ имеется представление

$$\eta=\eta_1-\eta_2,\quad(\eta_1,\eta_2\in K_0),\tag{15}$$

при котором

$$\left\|\eta_1\right\|\le C\|\eta\|,\qquad\left\|\eta_2\right\|\le C\|\eta\|.\tag{16}$$

Пусть ξ — произвольная точка пространства $T(V)$. Тогда точка $\eta=(\xi;0)\in T(V)\times R$. В рассматриваемом случае представление (15), (16) примет вид

$$(\xi\,;\,0)=(\,\beta'(x'-x_0);\,\beta')-(\gamma'(y'-x_0);\,\gamma'),\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&\beta'^2\left\|x'-x_0\right\|^2+\beta'^2\le C^2\|\xi\|^2,\\&\gamma'^2\left\|y'-x_0\right\|^2+\gamma'^2\le C\|\xi\|^2,\end{aligned}\tag{18}$$

где β', γ' — некоторые положительные числа; x',y' — некоторые точки множества V. Но из равенства (17) с очевидностью следует, что $\beta'=\gamma'$. Таким образом, для точки ξ справедливо равенство $\xi=\beta'(x'-y')$, причем из (18) вытекают неравенства

$$\beta'\le C\|\xi\|,\quad\beta'\|x'-x_0\|\le C\|\xi\|;\quad\beta'\|y'-y_0\|\le C\|\xi\|.$$

Пусть $C_1=\max\{\|x-x_0\|,\ \|y-x_0\|\}$. Если $C_1\le 1$, то лемма уже доказана. Предположим, что $C_1>1$. Положим

$$x=\left(1-\frac{1}{C_1}\right)x_0+\frac{1}{C_1}x',\,y=\left(1-\frac{1}{C_1}\right)y_0+\frac{1}{C_1}y',\beta=C_1\beta'.$$

Тогда, очевидно, выполняются соотношения (13), (14).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть аффинная оболочка выпуклого множества V замкнута. Тогда для любой последовательности $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}\subset T(V)$, сходящейся к некоторой точке $\xi=\beta(x-y)\,(\beta>0,\ x,y\in V)$, существует представление*

$$\xi_k=\beta_k(x_k-y_k)\,(\beta_k>0,\ x_k,y_k\in V)\tag{19}$$

такое, что

$$\lim\beta_k=\beta;\quad\lim_{k\to\infty}x_k=x;\quad\lim y_k=y.\tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольную точку $x_0\in V$. Согласно лемме 1 при любом K имеет место равенство

$$\xi_k-\xi=t_k(u_k-v_k),\tag{21}$$

где

$$\begin{gathered}t_k>0;u_k,v_k\in V;t_k\le C\|\xi_k-\xi\|;\\\|u_k-x_0\|\le 1,\|v_k-x_0\|\le 1.\end{gathered}$$

Имеем

$$\xi_k=\beta\,(x-y)+t_k(u_k-v_k)=\beta_k(x_k-y_k).$$

Здесь

$$\beta_k=\beta+t_k,\quad x_k=\frac{\beta}{\beta_k}x+\frac{t_k}{\beta_k}u_k,\quad y_k=\frac{\beta}{\beta_k}+\frac{t_k}{\beta_k}v_k.$$

Точки x_k,y_k являются выпуклыми комбинациями точек множества V и, следовательно, сами принадлежат V. Легко видеть, что

$$x_k-x=\frac{t_k}{\beta_k}((u_k-x_0)+(x_0-x)),$$

$$y_k-y=\frac{t_k}{\beta_k}((v_k-x_0)+(y_0-y)).$$

Из (21) видно, что последовательность $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Тогда выполняется первое равенство (20). Поскольку $\beta>0$, то из последних двух равенств и неравенств (21) вытекает второе и третье равенства (20).

Лемма 2 доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 2. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Заметим, что условие *г* можно переписать в следующем виде. Если $\Phi(x,y)=1$ и $\Phi(x',y')=1$, то при любом $\gamma\in[0,1]$

$$\Phi((1-\gamma)x+\gamma x',(1-\gamma)y+\gamma y')=1.\tag{22}$$

В случае двоично-рационального γ равенство (19) доказывается так же, как и равенство (1). В случае произвольного γ производится аппроксимация числа γ последовательностью двоично-рациональных чисел $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$. Положим

$$\begin{gathered}u_k=(1-\gamma_k)x+\gamma_k x',\,v_k=(1-\gamma_k)y+\gamma_k y',\\u=(1-\gamma)x+\gamma x',\,v=(1-\gamma)y+\gamma y'.\end{gathered}$$

Очевидно,

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u, \quad \lim_{k\to\infty} v_k = v.$$

Поскольку для двоично-рациональных чисел (19) уже доказано, то $\Phi(u_k, v_k) = 1$. Тогда по условию ∂ будет и $\Phi(u, v) = 1$. Этим заканчивается доказательство (22).

Так же, как и в теореме 1, из равенства $\Phi(a, b) = 1$ следует, что

$$\Phi(u' + v') = 1, \quad u', \ v' \in [a, b]. \tag{23}$$

Обозначим через S множество всех элементов $\xi \in L^2[0,1]$, представимых в виде

$$\xi = \beta(x - y); \quad x, y \in V; \ \Phi(x, y) = 1; \ \beta > 0. \tag{24}$$

Покажем, что соотношения

$$\xi \in S; \ \xi = \beta'(x' - y'); \quad x', y' \in V; \ \beta' > 0 \tag{25}$$

влекут равенство

$$\Phi(x, y) = 1. \tag{26}$$

В рассматриваемой ситуации нельзя пользоваться конструкцией, используемой с аналогичной целью при доказательстве теоремы 1, так как точка W, определенная равенством (7), может не принадлежать множеству V, поскольку V не является относительно открытым.

Зададим $\gamma \in [0,1]$ и положим $u = (1-\gamma)x + \gamma x'$, $v = (1-\gamma)y + \gamma y'$ (рис. 3).

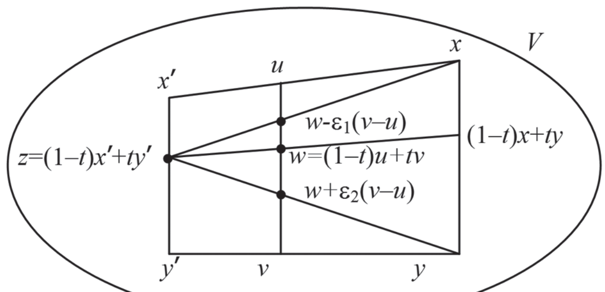

Рис. 3

Пусть W – произвольная точка отрезка $[u, v]$. Тогда $W = (1-t)u + v, \ 0 \le t \le 1$. Положим $z = (1-t)x' + ty'$. Из равенств $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(z, z) = 1$ и свойства (22) заключаем, что

$$\Phi((1-\gamma)x + \gamma z, \quad (1-\gamma)y + \gamma z) = 1. \tag{27}$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} (1-\gamma)\, x + \gamma\, z &= w - \varepsilon_1(v - u), \\ (1-\gamma)\, x + \gamma\, z &= w + \varepsilon_2(v - u), \end{aligned} \tag{28}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{t(1-\gamma)\beta'}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(1-t)(1-\gamma)\beta'}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}.$$

Проверим это. Из (24) и (25) следует, что $\beta(x - y) = \beta(x' - y')$. Поэтому

$$u - v = (1-\gamma)(x - y) + \gamma(x' - y') = \left[(1-\gamma)\frac{\beta'}{\beta} + \gamma\right](x' - y').$$

Откуда

$$x' - y' = \frac{\beta}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}(u - v).$$

Далее

$$\begin{aligned} (1-\gamma)x + \gamma\, z - w &= u - \gamma\, x' + \gamma\big[(1-t)x' + ty'\big] - \\ &- \big[(1-t)u + tv\big] = t(u - v) - \gamma t(x' - y') = \\ &= -\frac{t(1-\gamma)\beta'}{(1-\gamma)\beta' + \gamma\beta}(v - u) = -\varepsilon_1(v - u). \end{aligned}$$

Второе равенство (28) проверяется аналогично. Таким образом, можно переписать (27) в виде

$$\Phi(w - \varepsilon_1(v - u), \quad w + \varepsilon_2(v - u)) = 1.$$

Отсюда и из свойства (23) следует, что для каждой точки $w \in [u, v]$ существует такая окрестность на отрезке $[u, v]$, для любых точек u', v' которой $\Phi(u, v) = 1$. Так же, как и в теореме 1, это позволяет заключить, что $\Phi(u, v) = 1$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\gamma \to 1$, с помощью условия ∂ заключаем, что $\Phi(x', y') = 1$.

Докажем теперь, что множество S замкнуто. Пусть последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty} \subset S$ сходится к к некоторой точке ξ. Поскольку $S \subset T(V)$ и множество $T(V)$ замкнуто, то $\xi \in T(V)$. Представим точку ξ в виде (13). Согласно лемме 2, последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ может быть представлена в виде (19), (20). Поскольку из (25) вытекает (26), то из (19) вытекает равенство $\Phi(x_k, y_k) = 1$. Тогда из (20) и условия 5 можно заключить, что $\Phi(x, y) = 1$. Отсюда и из определения (24) следует, что $\xi \in S$. Замкнутость множества S доказана.

Окончание доказательства данной теоремы совпадает с окончанием доказательства теоремы 1.

Теорема 2 доказана.

3. Координатная формулировка для всего пространства

Теоремы 1 и 2 носят “безразмерный” характер – в их посылках нет каких бы то ни было указаний на размерность ортопроектора P, соответственно, их нет и в заключении. В частности, это означает, что ортопроектор P может быть как бесконечномерным, так и конечномерным. Для конечномерного случая можно получить также другую систему необходимых и достаточных условий линейности предиката Ф, носящую координатный характер. Мы начнем со случая, когда предикат определен на декартовом квадрате всего пространства $L^2[0, 1]$. В этом случае формулировка соответствующего результата имеет простой вид и доказательство также не является сложным.

Теорема 3. *Для того чтобы предикат* Φ*, определенный на декартовом квадрате пространства* $L^2[0, 1]$*, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$*, то*

$$\Phi(x + x', y + y') = 1 ;$$

д) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$*, что для каждого* $x \in L^2[0, 1]$ *есть единственный набор чисел* $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$*, удовлетворяющий условию*

$$\Phi(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k) = 1 ; \qquad (29)$$

е) функции $\alpha_k(x)$ *непрерывны.*

Доказательство. Установим сначала достаточность условий теоремы. Покажем, что векторы $e_1 + ... + e_k$ — линейно-независимы. В самом деле, пусть $\gamma_1 e_1 + ... + \gamma_n e_n = 0$. Тогда

$$\Phi(0, \gamma_1 e_1 + ... + \gamma_n e_n) = 1.$$

Согласно условию *д* это равенство может выполняться лишь при $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_n = 0$. Линейная независимость системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ доказана.

Из условия *д* имеем

$$\Phi(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k) = 1, \quad \Phi(y, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(y) e_k) = 1, \qquad (30)$$

$$\Phi(x + y, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x + y) e_k) = 1 . \qquad (31)$$

Комбинируя равенства (30), с помощью условия *г*, получаем

$$\Phi(x + y, \quad \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k(x) + \alpha_k(y)) e_k) = 1 .$$

Сравнивая последнее равенство с (31) и учитывая единственность коэффициентов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, находим

$$\alpha_k(x + y) = \alpha_k(x) + \alpha_k(y), \quad k = 1, 2, ..., n .$$

Таким образом, функционалы α_k являются аддитивными и, согласно условию *е*, непрерывными. Поэтому α_k — линейные функционалы. Проверим линейную независимость системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. Для любых чисел $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ вектор $x = \gamma_1 e_1 + ... + \gamma_n e_n$ является решением системы линейных уравнений

$$\alpha_k(x) = \gamma_k, \quad k = 1, 2, ..., n. \qquad (32)$$

Это видно из того, что по условию 1 [1] имеет место равенство

$$\Phi(x, \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ e_k) = 1 \quad ,$$

так что из *д* следует, что $\gamma_k = \alpha_k(x)$. Следовательно, система (32) разрешима при любых правых частях. Это и означает линейную независимость функционалов $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Для окончания доказательства осталось сослаться на лемму 2.

Пусть обратно предикат Φ является n-мерным линейным. Тогда выполнимость условия 4 очевидна. Выполнимость *д* и *е* вытекает из леммы 2.

Теорема 3 доказана.

4. Координатная формулировка для конуса

Теорема 4. *Для того чтобы предикат* Φ*, определенный на квадрате воспроизводящего конуса* K*, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x, y) = 1$ *и* $\Phi(x', y') = 1$*, то*

$$\Phi(x + x', y + y') = 1 ;$$

д) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$*, что для каждого* $x \in K$ *есть единственный набор неотрицательных чисел* $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n$ *и единственное подмножество* $I(x) \subset \{1, 2, ..., n\}$ *такие, что (сумма по пустому множеству индексов предполагается равной нулю)*

$$\Phi(x + \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{i \notin I} \alpha_i e_i) = 1 ; \;\; \alpha_i > 0, i \in I ; \qquad (33)$$

е) если $x, y \in K, \quad \gamma > 0$ *и при некотором i*

$$\Phi(x + \gamma e_i, y + \gamma e_i) = 1 \text{, то } \Phi(x, y) = 1 ;$$

ж) функции $\alpha_i(x)$ *непрерывны на* K.

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая

Лемма 3. *Пусть* f *— аддитивный функционал на воспроизводящем конусе* K *пространства* $L^2[0, 1]$ *и функция* $|f(x)|$ *непрерывна на* K*. Тогда существует единственный линейный функционал* F *на* $L^2[0, 1]$ *такой, что*

$$F(x) = f(x), \qquad x \in K . \qquad (34)$$

Доказательство. Пусть x — произвольный вектор L. Тогда для него имеет место представление

$$x = x_1 - x_2, \qquad x_1, x_2 \in K . \qquad (35)$$

Положим

$$F(x) = f(x_1) - f(x_2) . \qquad (36)$$

Покажем, что это определение корректно в том смысле, что не зависит от выбора x_1 и x_2 в представлении (35). Действительно, пусть $x = x'_1 - x'_2$; $x'_1, x'_2 \in K$. Тогда $x_1 + x'_2 = x_2 + x'_1 \in K$. Следовательно, $f(x_1 + x'_2) = f(x_2 + x'_1)$. Но f — аддитивный функционал. Поэтому $f(x_1) + f(x'_2) = f(x_2) + f(x'_1)$, то есть $f(x'_1) - f(x'_2) = f(x_1) + f(x_2)$, что и требовалось доказать.

Функционал F является аддитивным. Действительно, пусть $x, y \in L^2[0, 1]$, x — представлен в виде (35) и $y = y_1 - y_2, y'_1, y'_2 \in K$. Тогда $x + y = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2), x_1 + y_1 \in K$. Поэтому $F(x + y) = f(x_1 + y_1) - f(x_2 + y_2) = (f(x_1) + f(y_1)) -$

$(f(x_2)+f(y_2)) = (f(x_1)-f(x_2))+(f(y_1)-f(y_2)) = (f(x_1)-f(x_2))+(f(y_1)- f(y_2)) = F(x)+F(y)$.

Поскольку K – воспроизводящий конус, то существует такая константа C, что для любого $z \in L^2[0,1]$ имеет место представление

$$z = x-y; x, y \in K; \|x\| \le C\|z\|, \|y\| \le C\|z\|. \tag{37}$$

Покажем, что функционал F непрерывен в нуле. Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. В соответствии с (37) существуют последовательности $\{x_k\}_1^{\infty}, \{y_k\}_1^{\infty} \subset K$ такие, что

$$z_k = x_k - y_k, \ \lim_{k\to\infty} x_k = 0, \ \lim_{k\to\infty} y_k = 0. \tag{38}$$

Но $|f(x)|$ – непрерывная функция. Поэтому из (38) следует, что

$$\begin{gathered} F(z_k) = f(x_k) - f(y_k), \\ \lim_{k\to\infty} |f(x_k)| = |f(0)|, \quad \lim_{k\to\infty} |f(y_k)| = |f(0)|. \end{gathered} \tag{39}$$

Заметим теперь, что $f(0)=0$. Действительно, пусть $x \in K$, $x \ne 0$. Так как f – аддитивный функционал, то при любом натуральном n будет

$$\left| f\left(\frac{x}{n}\right) \right| = \frac{1}{n} |f(x)|.$$

Поскольку $|f(x)|$ – непрерывная функция, в последнем равенстве можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Получаем $|f(0)| = 0$. Тогда из (39) следует, что функционал F непрерывен в нуле. Но аддитивный функционал, непрерывный в нуле, является линейным. Значит, F – линейный функционал.

Единственность продолжения очевидна.

Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Установим сначала достаточность условий теоремы. Покажем, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ – линейно-независимые. В самом деле, пусть $\gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n = 0$. Положим $J = \{i \mid \gamma_i < 0\}$. Тогда

$$\sum_{i\in J} (-\gamma_i) e_i = \sum_{i \notin J} \gamma_i e_i \quad \text{и} \quad \Phi\left(0 + \sum_{i\in J}(-\gamma_i)e_i, \quad \sum_{i\notin J} \gamma_i e_i\right) = 1.$$

В силу условия *д* последнее равенство может иметь место лишь при $\gamma_i = 0; i = 1, \dots, n.$

Равенство (33) ставит каждому вектору $x \in K$ в соответствие пару векторов (x_1, x_2) по правилу

$$x_1 = \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) e_i, \quad x_2 = \sum_{i \notin I(x)} \alpha_i(x) e_i. \tag{40}$$

Положим

$$Ax = x_2 - x_1. \tag{41}$$

Тогда

$$\Phi(x, y) = D(Ax, Ay). \tag{42}$$

Действительно, пусть $\Phi(x, y) = 1$. Вместе с равенством $\Phi(x_1, x_2) = 1$ это дает $\Phi(x + x_1, y + y_1) = 1$. Но (40) означает, что $\Phi(x + x_1, x_2) = 1$. В силу условий *б*, *в* тогда $\Phi(y + x_1, x_2) = 1$. Из условия *д* следует, что последнее равенство может выполняться лишь при $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Поэтому $Ax = Ay$. Пусть, обратно, $Ax = Ay$. Так как система $\{e_i\}_{i=1}^n$ – линейно-независимая, отсюда вытекает, что $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Значит, вместе с равенством $\Phi(x + x_1, x_2) = 1$ справедливо равенство $\Phi(y + x_1, x_2) = 1$. Но тогда $\Phi(x + x_1, y + y_1) = 1$. Применяя условие *е*, получаем $\Phi(x, y) = 1$.

Покажем, что оператор A аддитивен. Пусть x, y – произвольные точки конуса. Для векторов x_1, x_2, y_1, y_2, определенных формулой (40), имеют место равенства $x_1 + y_1 = \delta_1 e_1 + \dots + \delta_n e_n$, $x_2 + y_2 = \delta'_1 e_1 + \dots + \delta'_n e_n$, где δ_i, δ'_i – некоторые неотрицательные числа. Положим $N = \{i \mid \delta_i > \delta'_i\}$ и

$$\begin{gathered} u = \sum_{i\in N} (\delta_i - \delta_i') e_i, \quad v = \sum_{i \notin N} (\delta_i' - \delta_i) e_i, \\ z = \sum_{i\in N} \delta_i' e_i + \sum_{i\notin N} \delta_i e_i. \end{gathered} \tag{43}$$

Тогда $x_1 + y_1 = u + z_1, x_2 + y_2 = v + z$. Из равенств $\Phi(x + x_1, x_2) = 1$ и $\Phi(y + y_1, y_2) = 1$ следует, что $\Phi(x + y + x_1 + y_1, x_2 + y_2) = 1$, то есть $\Phi(x + y + u + z, v + z) = 1$. Применяя условие *е*, получаем $\Phi(x + y + u, v) = 1$. Но последнее есть равенство (33) для вектора $x + y$. Поэтому $A(x + y) = v - u = (x_2 + y_2) - (x_1 + y_1) = Ax + Ay$.

Равенства (40), (41) можно переписать в виде

$$Ax = \sum_{i=1}^n \beta_i(x) e_i, \quad \beta_i(x) = \begin{cases} \alpha_i(x), i \notin I(x), \\ -\alpha_i(x), i \in I(x). \end{cases} \tag{44}$$

Из аддитивности оператора A вытекает аддитивность функционалов β_i. Но $|\beta_i(x)| = \alpha_i(x)|$ и функции α_i непрерывны. Поэтому на основании леммы 3 можно заключить, что функционалы β_i допускают единственное продолжение до линейных функционалов на $L^2[0, 1]$. Чтобы не усложнять обозначений, будем продолженные функционалы обозначать теми же символами β_i.

При любых неотрицательных числах для вектора $x = \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n$ имеет место равенство $\Phi(x, \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_n e_n) = 1$. Следовательно, $\beta_i(x) = \gamma_i$ и $Ax = x$. Это значит, что $\operatorname{Im} A$ содержит положительный конус L^+ линейной оболочки L системы векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$. Поскольку L^+ – воспроизводящий конус в L, то отсюда следует, что $\operatorname{Im} A = L$. Следовательно, система $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ – линейно-независимая. Для окончания доказательства достаточности осталось сослаться на лемму 3.

Докажем необходимость. Если предикат Φ является n-мерным линейным, то условия *г* и *е*, очевидно, выполняются. Выполнимость условий *д* и *ж* вытекает из леммы 3.

Теорема 4 доказана.

5. Координатная формулировка для открытого выпуклого множества

Теорема 5. *Для того чтобы предикат* Φ, *определенный на квадрате открытого выпуклого множества* $V \subset L^2[0,1]$, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ *и* $\Phi(x',y')=1$, *то*

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)=1;$$

д) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$, *что для каждого* $x \in V$ *есть единственный набор неотрицательных чисел* $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ *и единственное подмножество* $I(x) \in \{i=1,2,\ldots,n\}$ *такие, что*

$$\Phi(\alpha_0 x + \sum_{i\in I}\alpha_i e_i, \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i)=1; \qquad (45)$$

$$\alpha_0>0; \alpha_i>0; i\in I, \alpha_0+\sum_{i\in I}\alpha_i=1; \sum_{i\notin I}\alpha_i=1; \qquad (46)$$

е) функции $\alpha_i(x)$ *непрерывны.*

Доказательство. *Достаточность.* Зафиксируем произвольные положительные числа $\{\alpha_i^0\}_{i=1}^{n+1}$, сумма которых равна 1, и положим

$$a=\alpha_1^0 e_1+\ldots+\alpha_{n+1}^0 e_{n+1}. \qquad (47)$$

Тогда a принадлежит V. Из рефлексивности предиката Φ и условия *д* следует, что $\alpha_i(x)=\alpha_i^0$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$, $\alpha_0(x)=1$, $I(a)=\varnothing$. Тогда существует такая окрестность $u\subset V$ точки a, что

$$\alpha_i(x)>0, \quad I(x)=\varnothing \quad (i=1,2,\ldots,n+1; x\in u). \qquad (48)$$

Неравенства для α_i вытекают из непрерывности этих функций. Предположим, что вопреки доказательству существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к точке a, для которой $I(x_n)\neq\varnothing$. Поскольку функция $x\to I(x)$ принимает лишь конечное число значений, из этой последовательности можно отобрать такую подпоследовательность, для которой $I(x_n)=I$, где I — какое-нибудь непустое подмножество множества $\{1,2,\ldots,n+1\}$. На этой последовательности по условию д будет

$$\alpha_0(x_n)+\sum_{i\in I}\alpha_i(x_n)=1.$$

В пределе по подпоследовательности, используя условие *е* и равенство $\alpha_0(a)=1$, получаем

$$1+\sum_{i\in I}\alpha_i^0=1, \quad I\neq\varnothing.$$

Но это противоречит положительности чисел $\alpha_i^0,\ldots,\alpha_{n+1}^0$. Заметим теперь, что для всех $x,y\in V$ из равенства $\Phi(x,y)=1$ вытекают равенства

$$\alpha_i(x)=\alpha_i(y), \quad i=0,1,2,\ldots,n+1; \quad I(x)=I(y). \qquad (49)$$

Действительно, из равенств $\Phi(x,y)=1$ и $\Phi(e_i,e_i)=1$ на основании условия *г* получаем

$$\Phi(\alpha_0(x)x+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \quad \alpha_0(x)y+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i)=1.$$

Сравнивая это равенство с (45), находим

$$\Phi(\alpha_0(x)y+\sum_{i\in I(x)}\alpha_i(x)e_i, \quad \sum_{i\notin I(x)}\alpha_i(x)e_i)=1.$$

В силу единственности чисел $\alpha_i(y)$ и множества $I(y)$ отсюда вытекает (49).

Покажем теперь, что выполняется условие *д* теоремы 1. В качестве U возьмем любое открытое множество, для которого справедливо (48). Пусть последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\subset U$ сходятся к точкам $x,y\in U$ соответственно и $\Phi(x_n,y_n)=1$. В силу равенства (49) тогда $\alpha_i(x_n)=\alpha_i(y_n)$. По непрерывности отсюда заключаем, что $\alpha_i(x)=\alpha_i(y)$, $i=0,1,\ldots,n+1$. Кроме того, в силу (48) $I(x)=I(y)=\varnothing$. Таким образом,

$$\Phi(x,\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i)=1, \Phi(y,\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i)=1 \ (\beta_i=\alpha_i(x)=\alpha_i(y)).$$

Тогда по условиям *б*, *в* будет $\Phi(x,y)=1$.

В силу теоремы 1 имеет место равенство (3) с некоторым ортопроектором *P*. Тогда

$$Px=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)Pe_i, \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)=1 \ (x\in V), \qquad (50)$$

где $\beta_i(x)=-\alpha_i(x)/\alpha_0(x)$ при $i\in I(x)$ и $\beta_i(x)=-\alpha_i(x)/\alpha_0(x)$ при $i\notin I(x)$. Первое равенство (50) вытекает из (45), второе — из (46). Поскольку V — телесное множество, из (50) следует, что $\operatorname{Im} P$ совпадает с аффинной оболочкой множества точек $Pe_1,\ldots,Pe_{n+1}$. Проверим, что $\operatorname{rg} P=n$. Для этого достаточно убедиться в аффинной независимости системы точек $Pe_1,\ldots,Pe_{n+1}$. Предположим, что эта система аффинно зависима, то есть существуют такие числа γ_i, что

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i Pe_i=0, \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=0, (\gamma_1,\ldots,\gamma_{n+1})\neq(0,\ldots,0). \qquad (51)$$

Пусть a — точка, определенная равенством (47). Подберем число $\lambda\neq 0$ так, чтобы $\alpha_i^0+\lambda\gamma_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$. Используя (3), имеем

$$Pa=P\left(\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^0+\lambda\gamma_i)e_i\right), \quad \Phi\left(a\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^0+\lambda\gamma_i)e_i\right)=1.$$

Значит, $\alpha_i(a)=\alpha_i^0+\lambda\gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,n+1)$, что противоречит установленным ранее равенствам $\alpha_i(a)=\alpha_i^0$. Достаточность доказана.

Необходимость вытекает из леммы 1.

Теорема 5 доказана.

6. Координатная формулировка для произвольного выпуклого множества

Нам не известно, остается ли верной теорема 5 в случае, когда множество V не является открытым, но $\operatorname{aff} V=L^2[0,1]$. Верен, однако, вариант этого результата, отличающийся усилением условия *г* и одним дополнительным условием.

Теорема 6. *Для того чтобы предикат* Φ*, определенный на квадрате выпуклого множества* V *с* $\operatorname{aff} V = L^2[0,\,1]$*, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:*

г) если $\Phi(x,y)=1$ *и* $\Phi(x',y')=1$ *,* $\gamma\in(0,1)$ *, то*

$$\Phi((1-\gamma)x+\gamma x',(1-\gamma)y+\gamma y')=1;$$

д) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ *, что для каждого* $x\in V$ *есть единственный набор неотрицательных чисел* $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ *и единственное подмножество* $I(x)\subset\{1,2,...,n+1\}$ *такие, что*

$$\Phi(\alpha_0 x+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\quad \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i)=1; \tag{52}$$

$$\alpha_0>0;\alpha_i>0; i\in I;\ \ \alpha_0+\sum_{i\in I}\alpha_i=1,\sum_{i\notin I}\alpha_i=1; \tag{53}$$

е) если $x,y\in V$ *,* $\gamma\in(0,1)$ *и при некотором i* $\Phi(\gamma x+(1-\gamma)e_i,\gamma y+(1-\gamma)e_i)=1$ *, то* $\Phi(x,y)=1$ *;*

ж) функции $\alpha_i(x)$ *непрерывны.*

Лемма 4. *Пусть* V *— выпуклое множество, аффинная оболочка которого совпадает со всем пространством; функция* f *, определенная на* V *, удовлетворяет условию*

$$f(\frac{x+y}{2})=\frac{1}{2}(f(x)+f(y)),\ x,y\in V \tag{54}$$

и функция $|f(x)|$ непрерывна в какой-либо точке $x_0\in V$. Тогда существует единственный функционал F на $L^2[0,1]$ и единственное число C такие, что

$$f(x)=F(x)+C,\ x\in V. \tag{55}$$

Доказательство. Из равенства (54) вытекает, что при любом двоично-рациональном числе $\gamma\in[0,1]$ имеет место равенство

$$f((1-\gamma)x+\gamma y)=(1-\gamma)f(x)+\gamma f(x)\ \ x,y\in V. \tag{56}$$

Поскольку $\operatorname{aff} V = L^2[0,\,1]$, то, как это следует из формулы (22), каждая точка $\xi\in L^2[0,\,1]$ может быть представлена в виде

$$\xi=\beta(x-y);\ \beta>0;\ x,y\in V. \tag{57}$$

Более того, число β можно считать двоично-рациональным. Действительно, исходя из (57), возьмем любое рациональное число $\beta>\beta$ '. Точка $y'=(1-\frac{\beta}{\beta'})x+\frac{\beta}{\beta'}y\in V$ и имеет место равенство $\xi=\beta'(x-y')$.

Положим для ξ , представленного в виде (57),

$$F(\xi)=\beta(f(x)-f(y)). \tag{58}$$

Проверим корректность этого определения. Пусть одновременно с (58) имеет место равенство $\xi=\beta_1(x_1-y_1)$, $\beta_1>0$ — двоично-рациональное, $x_1,y_1\in V$. Тогда $\beta_1(x_1-y_1)=\beta(x-y)$ и, следовательно,

$$\frac{\beta}{\beta+\beta_1}x+\frac{\beta_1}{\beta+\beta_1}y_1=\frac{\beta}{\beta+\beta_1}y+\frac{\beta}{\beta+\beta_1}x.$$

Точки, фигурирующие в каждой части этого равенства, являются выпуклыми комбинациями точек из V и поэтому сами принадлежат V . Применяя к обеим частям равенства функцию f , получаем с учетом (56)

$$\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(x)+\frac{\beta_1}{\beta+\beta_1}f(y_1)=\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(y)+\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(x).$$

Отсюда $\beta_1(f(x_1)-f(y_1))=\beta(f(x)-f(y))$. Таким образом, определение (58) корректно.

Функция F является аддитивной. Действительно, пусть ξ_1,ξ_2 — произвольные точки пространства $L^2[0,\,1]$. Представим их в виде (57):

$$\xi_1=\beta_1(x_1-y_1);\xi_2=\beta_2(x_2-y_2).$$

Тогда

$$\xi_1+\xi_2=(\beta_1+\beta_2)((\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_1+\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_2)-$$
$$-(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}y_1+\frac{\beta_2}{\beta_2+\beta_2}y_2))$$

и (58) и (56) дают

$$F(\xi_1+\xi_2)=(\beta_1+\beta_2)(f(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_1+\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_2)-$$
$$-f(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}y_1+\frac{\beta_2}{\beta_2+\beta_2}y_2))=$$
$$=\beta_1 f(x_1)+\beta_2 f(x_2)-\beta_1 f(y_1)-\beta_2 f(y_2)=$$
$$=\beta_1(f(x_1)-f(y_1))-\beta_2(f(x_2)-f(y_2)).$$

Таким образом, $F(\xi_1+\xi_2)=F(\xi_1)+F(\xi_2)$.

Покажем, что функция F непрерывна в нуле. Пусть последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Воспользуемся леммой 1:

$$\begin{gathered}\xi_k=\beta_k(u_k-v_k);u_k,v_k\in V;\beta_k>0;\\ \|u_k-x_0\|\le 1;\|v_k-x_0\|\le 1;\beta_k\le C\|\xi_k\|.\end{gathered} \tag{59}$$

Рассуждая так же, как и в начале доказательства этой леммы, покажем, что в представлении (59) в качестве β_k можно брать числа, являющиеся квадратами двоично-рациональных чисел. Итак, считаем $\sqrt{\beta_k}$ двоично-рациональными числами. Положим

$$x_k=x_0+\sqrt{\beta_k}(u_k-x_0),\quad y_k=x_0+\sqrt{\beta_k}(v_k-x_0).$$

Из последнего неравенства (59) следует, что при достаточно больших k будет $\sqrt{\beta_k}\le 1$. Поэтому $x_k,y_k\in V$. Имеем из (59)

$$\begin{gathered}\xi_k=\sqrt{\beta_k}(x_k-y_k),\ \|x_k-x_0\|\le\sqrt{C\|\xi_k\|},\\ \|y_k-x_0\|\le\sqrt{C\|\xi_k\|}.\end{gathered} \tag{60}$$

Тогда

$$F(\xi_k)=\sqrt{\beta_k}\,(f(x_k)-f(y_k)) \text{ и } \\ |F(\xi_k)|\le\sqrt{\beta_k}\,(|f(x_k)|-|f(y_k)|). \quad (61)$$

Из неравенств (60) следует, что последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к точке x_0. Тогда по условию леммы последовательности $\{|f(x_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{|f(y_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к точке $|f(x_0)|$ и, следовательно, ограничены. Поэтому из неравенства (61) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}|F(\xi_k)|=0.$$

Поскольку F – аддитивный функционал, то отсюда вытекает, что $F(0)=0$ и, следовательно, функционал непрерывен в нуле. В таком случае F – линейный функционал.

Для любой точки $x\in V$ в силу (58) будет $F(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$. Функционал F линеен, так что $F(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$. Поэтому при $C=f(x_0)-F(x_0)$ имеем $f(x)=F(x-x_0)+f(x_0)=$ $=F(x)+(f(x_0)-F(x_0))=F(x)+C$. Равенство (55) доказано.

Проверим единственность функционала F и числа C. Пусть

$$f(x)=F_1(x)+C_1,\quad x\in V, \quad (62)$$

где F_1 – линейный функционал; C_1 – число. Поскольку F_1 – линейный функционал, для числа ξ, представленного в виде (57), будет $F_1(\xi)=\beta(F_1(x)-F_1(y))$. Тогда (62) дает

$$F_1(\xi)=\beta(f(x)-f(y)).$$

Сравнивая это равенство с (58), получаем $F_1=F$. Тогда из (55) и (62) следует, что $C_1=C$.

Лемма 4 доказана.

Замечание. Утверждение о продолжаемости функции *f* остается в силе, если взамен равенства $\operatorname{aff}V=L^2[0,1]$ потребовать лишь замкнутость множества $\operatorname{aff}V$. Утверждение о единственности продолжения при этом перестает быть верным.

Доказательство теоремы 6. *Достаточность.* Покажем, что точки $e_1,e_2,\ldots,e_{n+1}$ – аффинно-независимые. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=0. \quad (63)$$

Положим

$$\beta_1=\gamma_1+1;\quad \beta_i=\gamma_i;\quad i=2,3,\ldots,n+1. \quad (64)$$

Тогда

$$e_1=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i=1, \quad (65)$$

То есть точка e_1 представима в виде (53). Перейдем от этого представления к представлению (56) по формуле (55):

$$\alpha_0 e_1+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i=\sum_{i\notin I}\alpha_i e_i. \quad (66)$$

Тогда

$$\Phi\left(\alpha_0 e_1+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\quad \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i\right)=1.$$

Кроме того, согласно условию 1,

$$\Phi(e_1,e_1)=1.$$

Поэтому из условия *д* следует, что

$$I=\varnothing,\quad \alpha_0=1,\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_i=0$$

при $i=2,\ 3,\ldots,\ n+1$. Переходя от (66) назад к (65) по формулам (58), получаем $\beta_1=1,\ \ \beta_i=0$ при $i=2,\ 3,\ldots,\ n+1$. Тогда из (64) видно, что $\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_{n+1}=0$. Аффинная независимость точек $e_1,e_2,\ldots,e_{n+1}$ доказана.

Заметим теперь, что условие *е* обобщается в следующей форме, именуемой в дальнейшем условием *е*': *если*

$$x,y\in V,\quad \Phi\left(\gamma_0 x+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i,\quad \gamma_0 y+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i\right)=1, \\ \gamma_0>0,\quad \gamma_i\ge 0,\quad \gamma_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=1, \quad (67)$$

то $\Phi(x,y)=1$. Действительно, заменим в (67) *n* на k и проверим по индукции справедливость утверждения при $k=0,1,\ldots,n+1$. Если $k=0$, утверждение вытекает из *е*. Пусть утверждение выполняется при некотором k. Перейдем к $k+1$. Положим

$$x'=(1-\gamma_{k+2})^{-1}\left(\gamma_0 x+\sum_{i=1}^{k+1}\gamma_i e_i\right),$$

$$y'=(1-\gamma_{k+1})^{-1}\left(\gamma_0 y+\sum_{i=1}^{k+2}\gamma_i e_i\right).$$

Посылка утверждения имеет вид

$$\Phi((1-\gamma_{k+2})x'+\gamma_{k+2}e_{k+2},\quad (1-\gamma_{k+2})y'+\gamma_{k+2}e_{k+2})=1.$$

Тогда из е следует, что $\Phi(x',y')=1$, то есть

$$\Phi\left(\gamma'_0 E+\sum_{i=1}^{k+1}\gamma'_i e_i,\gamma'_0 y+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma'_i e_i\right)=1,\ \gamma'_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma'_i=1,$$

где $\gamma'_i=(1-\gamma_{k+2})^{-1}\gamma_i$. Предположение индукции позволяет заключить, что $\Phi(x,y)=1$. Выполнимость условия *е*' доказана.

Поставим в соответствие каждому $x\in V$ точки x_1,x_2 и Ax, определенные равенствами

$$E_1=\sum_{i\in I(x)}\alpha_k(x)e_i, \\ x_2=\sum_{i\notin I(x)}\alpha_k(x)e_i,\alpha_0(x)Ax+x_1=x_2. \quad (68)$$

Пусть числа $\beta_i(x)$ связаны с числами $\alpha_i(x)$ равенствами (53). Тогда

$$Ax=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)e_i. \quad (69)$$

Покажем, что

$$\Phi(x,y) = D(Ax, Ay). \tag{70}$$

Действительно, пусть $\Phi(x,y)=1$. Тогда из условия *г* следует, что

$$\Phi(\alpha_0(x)x + x_1, \alpha_0(x)y + x_1) = 1. \tag{71}$$

Но (52) означает, что

$$\Phi(\alpha_0(x)x + x_1, x_2) = 1. \tag{72}$$

Сравнивая (71) с (72) и используя условия *б* и *в*, получаем

$$\Phi(\alpha_0(x)y + x_1, x_2) = 1. \tag{73}$$

Согласно условию *д*, последнее равенство может выполняться лишь при $\alpha_0(x) = \alpha_0(y)$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$. Значит, и $Ax = Ay$. Пусть обратно $Ax = Ay$. Поскольку система точек $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая, представление (49) для любой точки из aff $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ является единственным. Поэтому из третьего равенства (68) следует, что

$$\alpha_0(x) = \alpha_0(y), \quad x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2.$$

Значит, из равенства $\Phi(\alpha_0(y)y + y_1, y_2) = 1$ вытекает (73). Вместе с (72) это дает (70). Применив к (71) условие *е*', получаем $\Phi(x, y) = 1$. Равенство (70) доказано.

Покажем теперь, что отображение A является аффинным. Пусть x, x' — произвольные точки множества $V; \lambda, \lambda'$ — положительные числа, $\lambda + \lambda' = 1$. Нужно проверить, что

$$A(\lambda x + \lambda' x') = \lambda Ax + \lambda' Ax'. \tag{74}$$

Согласно условию *д* имеют место равенства

$$\begin{gathered}\Phi(\alpha_0 x + x_1, x_2) = 1, \quad \Phi(\alpha'_0 x' + x'_1, x'_2) = 1,\\ \alpha = \alpha_0(x), \quad \alpha' = \alpha_0(x').\end{gathered} \tag{75}$$

Положим

$$\gamma = \frac{\lambda\alpha'_0}{\lambda\alpha'_0 + \lambda'\alpha_0}, \qquad \gamma' = \frac{\lambda'\alpha_0}{\lambda\alpha'_0 + \lambda'\alpha_0}.$$

Числа γ и γ' — положительные, $\gamma + \gamma' = 1$. Как видно из (68) и (53), при некоторых неотрицательных числах δ_i, δ'_i $(i = 1,..., n+1)$ будет

$$\begin{gathered}\gamma x_1 + \gamma' x'_1 = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i e_i, \qquad \gamma x_2 + \gamma' x'_2 = \sum_{i=1}^{n+1} \delta'_i e_i,\\ \alpha_0\gamma + \alpha'_0\gamma' + \sum_{i=1}^{n+1}\delta_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n+1}\delta'_i = 1.\end{gathered} \tag{76}$$

Положим

$$N = \{i \mid \delta_i > \delta'_i\}, \nu = \sum_{i\in N}(\delta_i - \delta'_i), \mu = \sum_{i\notin N}(\delta'_i - \delta_i).$$

Из (76) вытекает равенство

$$\alpha_0\gamma + \alpha'_0\gamma' + \nu = \mu.$$

Пусть

$$u = \sum_{i\in N}(\delta_i - \delta'_i)e_i, v = \sum_{i\notin N}(\delta'_i - \delta_i)e_i, z = \sum_{i\in N}\delta'_i e_i + \sum_{i\notin N}\delta_i e_i.$$

Тогда

$$\begin{gathered}\gamma_1 x_1 + \gamma'_1 x'_1 = u + z, \quad \gamma_2 x_2 + \gamma'_2 x'_2 = v + z,\\ v - u = \gamma_1(x_2 - x_1) + \gamma'_1(x'_2 - x'_1).\end{gathered} \tag{77}$$

Условие (66) и третье равенство (77) дают

$$v - u = \gamma\alpha_0 Ax + \gamma'\alpha'_0 Ax'. \tag{78}$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\lambda = \frac{\gamma\alpha_0}{\gamma\alpha_0 + \gamma'\alpha'_0} = \frac{\gamma\alpha_0}{\mu - \nu}, \qquad \lambda' = \frac{\gamma'\alpha'_0}{\gamma\alpha_0 + \gamma'\alpha'_0} = \frac{\gamma'\alpha'_0}{\mu - \nu}.$$

Поэтому из (78) следует, что

$$\begin{gathered}\frac{v-u}{\mu - v} = \lambda Ax + \lambda' Ax',\\ \frac{\alpha_0\gamma x + \alpha'_0\gamma' x'}{\mu - v} = \lambda x + \lambda' x'.\end{gathered} \tag{79}$$

В силу условия *г* из (75) вытекает равенство

$$\Phi(\alpha_0\gamma x + \alpha'_0\gamma' x' + \gamma x_1 + \gamma' x'_1,\ \gamma x_2 + \gamma' x'_2) = 1.$$

Комбинируя его с (77) и (79), получаем

$$\Phi(\mu\frac{(\mu-\nu)(\lambda x + \lambda' x') + u}{\mu} + z,\ \mu\frac{\nu}{\mu} + z) = 1. \tag{80}$$

Положим $\gamma_0 = \mu; \gamma_i = \min\{\delta_i, \delta'_i\}$, $i = \overline{1, n+1}$. Тогда

$$z = \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_e, \qquad \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i = 1.$$

Кроме того, $\mu^{-1}((\mu - v)(\lambda x + \lambda' x') + u) \in V$. Действительно, если $v = 0$, то $u = 0$ и утверждение очевидно. Если же $v > 0$, то и этот факт вытекает из представления в виде выпуклой комбинации

$$\mu^{-1}((\mu-\nu)(\lambda x + \lambda' x') + u) = \frac{\mu - v}{\mu}(\lambda x + \lambda' x') + \frac{v}{\mu}\cdot\frac{u}{v}.$$

Наконец, $\mu^{-1}u \in V$. Таким образом, для равенства (80) выполняется посылка условия *е*'. Его заключение дает

$$\Phi\left(\frac{\mu - v}{\mu}(\lambda x + \lambda' x') + \frac{u}{\mu},\ \frac{v}{\mu}\right) = 1.$$

Но последнее равенство является соотношением (72) для точки $\lambda x \neq \lambda' x'$. Поэтому

$$A(\lambda x + \lambda' x') = \left(\frac{\mu - v}{\mu}\right)^{-1}\left(\frac{v}{\mu} - \frac{u}{\mu}\right) = \frac{v - u}{\mu - v}.$$

Вместе с первым равенством (79) это дает требуемую формулу (74).

Поскольку точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимые, из равенств (69) и (74) вытекает, что β_i — аффинные функционалы на V. Из (58) и условия *ж* следует, что функции $\beta_i|(x)|$ — непрерывные. Тогда по лемме 4 функционалы допускают однозначное продолжение до аффинных функционалов на всем пространстве. Проверим теперь, что уравнения (54) разрешимы при условии $s_1 + ... + s_{n+1} = 1$. Пусть

$s_1,\ldots,\ s_{n+1}$ удовлетворяют этому условию. Покажем, что точка

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} s_i e_i$$

является решением (54). Из равенств $\Phi(e_i, e_i) = 1$ и условия *д* следует, что $I(e_i) = \varnothing,\ \ \alpha_0(e_i) = 1,\ \alpha_j(e_i) = \delta_{ij}$. Поэтому из (58) вытекает, что $\beta_j(e_i) = 1$. Так как β_j – аффинные функционалы и $s_1 + \ldots + s_{n+1} = 1$, то $\beta_j(x) = s_i$.

Таким образом, выполняется первое условие леммы 4. Выполнимость второго вытекает из условий *г* и *е*'. Утверждение теоремы в сторону достаточности вытекает из леммы 4.

Проверим *необходимость*. Пусть Ф – *n*-мерный линейный предикат. Тогда выполнимость условий *г* и *е* очевидна. Выполнимость условий *д* и *ж* вытекает из леммы 4.

Теорема 6 доказана.

Выводы

Рассмотрены условия линейности предиката для некоторых областей определения линейного оператора – на декартовом квадрате открытого выпуклого множества, произвольного выпуклого множества, воспроизводящего конуса и всего пространства.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51.

Поступила в редколлегию 15.04.2011.

УДК 519.7

Про систему умов лінійності предиката / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64.

Сформульовані і доведені системи необхідних і достатніх умов лінійності предиката для деяких практично важливих областей визначення лінійного оператора.

Іл. 3. Бібліогр.: 1 найм.

UDC 519.7

About the predicate linearness terms system / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 52-64.

The systems of necessary and sufficient terms of predicate linearness are formulated and well-proven for some practically important ranges of linear operator definition.

Fig. 3. Ref.: 1 items.