УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко[1], Н.Е. Русакова[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1-3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

О ПРЕДИКАТНОЙ КАТЕГОРИИ

В статье дано определение понятия предикатной категории и сформулирована задача разработки теории предикатных категорий, открывающей путь к построению высокопроизводительных мозгоподобных ЭВМ параллельного действия. Также рассмотрен принцип двойственности для категорий, благодаря положениям которого можно перейти от любой конкретной категории к двойственной ей категории.

КАТЕГОРИЯ, МОРФИЗМЫ, БЕЗОБЪЕКТНАЯ КАТЕГОРИЯ, КАТЕГОРНАЯ ДИАГРАММА, ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ

Введение

Понятие категории введено в 1945 году Маклейном и Эйленбергом. Как научная дисциплина теория категорий сформировалась к 60-м годам XX столетия. Она разрабатывает перспективные средства представления, анализа и синтеза математических структур произвольного вида. К 80-м годам была осознана важность теории категорий для компьютеризации и информатизации, в частности, – для автоматизации программирования.

Вначале кратко охарактеризуем *классическую категорию* [1], после чего осуществим ее *предикатную интерпретацию*. В результате получаем *предикатную категорию* – один из частных случаев классической категории. Сперва рассмотрим наиболее общее определение понятия классической категории – *классическую безобъектную категорию* [2, с. 44]. Его называют также *классической абстрактной категорией*. Оно ценно тем, что в нем удачно схвачена суть интуитивного понимания категории и, вместе с тем, в нем нет ничего сверх этого. Если исключить хотя бы одну из черт, указанных в этом определении, то от понятия категории ничего не остается. После такого исключения категория превращается в одну из известных алгебраических структур, охватывающих понятие категории.

1. Понятие категории

Охарактеризуем понятие классической безобъектной категории. Текст определения этого понятия выделен жирным шрифтом. **Пусть M – какое-нибудь множество. Его элементы, обозначаемые символами $f, g, h, \ldots$, называются *морфизмами*. Пусть, кроме того, задано однозначное, вообще говоря, частичное соответствие $fg = h$ с областью отправления $M \times M$ и областью прибытия M. Оно называется *умножением* морфизмов f и g. Морфизм h называется *произведением* морфизмов f и g. Умножение морфизмов *ассоциативно*: при любых $f, g, h \in M$, для которых существуют произведения $(fg)h$, $f(gh) \in M$, справедливо равенство $(fg)h = f(gh)$. Пусть E – *множество всех единичных морфизмов* ($E \subseteq M$). Любой морфизм $e \in M$ называется *единичным* (или *тождественным* или просто *единицей*), если он удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для каждой единицы $e \in E$ существует ее произведение; 2) при любых морфизмах $f, g \in M$ и любых единицах $e, e' \in E$, для которых существуют произведения $fe, e'g \in M$, выполняются равенства $fe = f$ и $e'g = g$. Множество морфизмов M с единицами, удовлетворяющими перечисленным выше условиям, взятое вместе с умножением морфизмов, удовлетворяющим вышеуказанным условиям, называется *классической безобъектной категорией* K.** Пишут $M = MorK$, $f \in M$, $f \in MorK$. $MorK$ – это множество всех морфизмов категории K. Если $f \in MorK$, то говорят, что морфизм f является K*-морфизмом*.

Этим определением молчаливо допускается существование в категории многих единиц. Именно наличие многих единиц (и только это) отличает категорию (понимаемую в наиболее общем смысле) от других известных математических структур. Со школьной скамьи все мы привыкли к тому, что единица всегда одна. И она была бы одна, если б на множестве M умножение было принято не частичным, а всюду определенным. Существование многих единиц в категории и требование всюду определенности умножения морфизмов находятся относительно друг друга в непримиримом противоречии. Но если ослабить требования к категорному умножению морфизмов и принять его частичным, то уже только за счет этого появляется возможность введения в категории многих единиц. Единицы e и e' называются соответственно *правой* и *левой* для морфизма $f \in M$, если $fe = f$ и $e'f = f$. Из определения понятия категории логически следует, что для любого $e \in E$ справедливо равенство $ee = e$, и что для любого морфизма $f \in M$ существуют единственная правая и единственная левая единицы (которые могут отличаться друг от друга). Последнее утверждение называется *категорным законом тождества*. Таким образом, для каждого морфизма $f \in M$ существуют единственная правая единица e и единственная левая единица e', такие, что $fe = e'f = f$. Вместе с тем, для каждой единицы $e \in E$ найдутся такие морфизмы f и g (не обязательно единственные), что для них выполнятся равенства $fe = f$ и $eg = g$. Для любой единицы $e \in E$ в роли таких морфизмов можно взять $f = g = e$.

Так, определенную категорию можно рассматривать как некую разновидность алгебры. В роли ее носителя выступает множество морфизмов M, роль базисных элементов в этой алгебре выполняют единицы, а в роли единственной базисной операции (точнее — однозначного соответствия) выступает частичное умножение морфизмов. Любую алгебру, удовлетворяющую всем перечисленным выше требованиям, будем рассматривать как безобъектную классическую категорию. Таким образом определенная категория представляет собой неполную алгебру. Не в каждой такой категории, действуя в различной последовательности умножением на единицы, можно получать любые морфизмы, имеющиеся в ее носителе. Неполные алгебры можно по-разному достраивать (доопределять), получая из каждой такой алгебры целое семейство различных полных алгебр. Описываемый здесь вариант определения классической категории — это самый общий (то есть самый бедный свойствами) из всех известных нам. Несколько позже, кроме морфизмов, мы введем в классической категории еще и объекты, но пока они в ней отсутствуют. Именно поэтому только что рассмотренная категория названа безобъектной.

Оговорка о существовании произведений $(fg)h$ и $f(gh)$ в формулировке ассоциативности умножения морфизмов была бы излишней, если б умножение морфизмов было всюду определено. Но в определении понятия категории основателями теории категорий оно принято частичным. В классической категории произведение fg морфизмов f и g существует в том и только том случае, когда правая единица морфизма f совпадает с левой единицей морфизма g. Таким образом, необходимым и достаточным условием существования произведения fg морфизмов f и g является наличие такой единицы e, для которой $fe=f$ и $eg=g$. Приведенные здесь свойства классической безобъектной категории, которые не были вынесены в ее определение, могут быть из него логически выведены. Объекты категории взаимно однозначно связаны с ее единицами. Поэтому в категории с одной единицей можно ввести лишь один объект. Однако информатизация нуждается в таком варианте теории категорий, в рамках которого можно было бы одновременно рассматривать сразу много объектов. Ввиду этого появляется необходимость введения в алгебре, ориентированной на нужды информатизации (то есть в теории категорий), многих единиц.

Рассмотрим, какое место занимает безобъектная классическая категория в иерархии алгебр, сложившейся к настоящему времени в математике. На вершине этой иерархии располагается *группоид* — алгебра на носителе M со всюду определенным умножением $fg=h$ $(f, g, h \in M)$. Под ним располагается *полугруппа*, которая определяется как группоид с умножением, обладающим для любых $f, g, h \in M$ свойством ассоциативности $(fg)h = f(gh)$. Ниже находится *моноид*, определяемый как полугруппа с единственным базисным элементом $e \in M$, который называется *единицей*. Последняя характеризуется свойством: для любого $f \in M$ $ef = fe = f$ (кстати, из него вытекает еще одно важное свойство единицы — $ee = e$, которое получаем, полагая $f = e$). Еще ниже располагается *группа*, определяемая как моноид с одноместной *операцией обращения* $f^{-1} = g$, которая характеризуется свойством: $ff^{-1} = f^{-1}f = e$ для любого $f \in M$.

Классическую безобъектную категорию можно рассматривать как одно из возможных обобщений понятия моноида. В ней вместо операции (то есть всюду определенного и однозначного соответствия) умножения, фигурирующей в определении моноида, использовано соответствие более общего вида — *частичное умножение*, с него свойство всюду определенности снято. Для некоторых пар $f, g \in M$ произведение fg в классической безобъектной категории может и не существовать. Требование единственности единицы тоже снято. Единиц в категории может быть много. **Единицы классической безобъектной категории можно определить следующими двумя свойствами: 1) для любой единицы $e \in E$ $ee = e$; 2) при любых $f, g \in M$ и любых $e, e' \in E$, для которых существуют произведения fe, $e'g \in M$, выполняются равенства $fe = f$ и $e'g = g$.** Если дополнительно потребовать, чтобы умножение морфизмов было всюду определено, то категория превратится в моноид. Действительно, предположим, что умножение в категории всюду определено и, вместе с тем, в ней имеются две отличающиеся друг от друга единицы e и $e'(e \neq e')$. Тогда должно существовать произведение $e'e$. Согласно равенству $fe = f$ получаем произведение $e'e = e'$. Согласно же равенству $e'f = f$ приходим к иному результату $e'e = e$. Но это невозможно, поскольку принято, что умножение обладает свойством однозначности для своих значений. Мы пришли к противоречию. Это значит, что при наличии по крайней мере двух единиц в некоторой категории она не может иметь всюду определенного умножения.

Категория беднее свойствами, чем моноид, поэтому она представляет собой обобщение понятия моноида. Ее естественно называть еще и *квазимоноидом*. Если б мы сняли требование всюду определенности умножения также и с группоида, полугруппы и группы, то получили бы обобщения и этих алгебр (назовем их соответственно *квазигруппоидом*, *квазиполугруппой* и *квазигруппой*). Алгебры с частичным базисным умножением в современной математике широко не используются, так что введение понятия классической категории с частичным умножением морфизмов представляет собой уход в сторону с магистрального пути развития математики. Рис. 1 иллюстрирует сказанное.

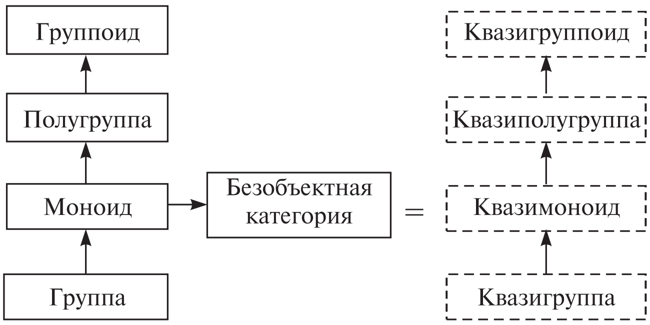


Рис. 1

Итак, если мы хотим обобщить понятие моноида до понятия категории так, чтобы в нем вместо одной единицы могло появиться большее их число, и, вместе с тем, сохранить все свойства единицы, указанные в определении категории, то, переходя от моноида к категории, будем вынуждены ослабить требования к умножению морфизмов и сделать его частичным. Но, может быть, переходя от понятия моноида к понятию категории, следовало бы отказаться от многих единиц? Нет, так делать не следует. Это не имеет смысла, ибо тогда мы “с водой выплеснем и ребенка”: пришлось бы возвратиться к понятию моноида. Это значит, что понятие категории не состоялось бы: ведь в нем в таком случае не появилось бы ничего нового по сравнению с уже имеющимся понятием моноида. Волей-неволей приходится отказаться от требования всюду определенности умножения.

В приведенном выше определении классической безобъектной категории морфизмы были представлены пока очень схематично – лишь как бесструктурные элементы некоторого множества. Немного можно извлечь из такого, очень бедного, понятия категории. Такое общее понятие категории полезно разве что только при уяснении места понятия категории в иерархии существующих алгебр. Теперь понятия категории и морфизма мы конкретизируем. В процессе конкретизации ранее введенное понятие безобъектной категории обрастает дополнительными деталями и свойствами и в результате превращается в *категорию с объектами* [2, с. 50]. К морфизмам безобъектной категории K присоединяем *объекты*. Множество всех объектов категории K записываем в виде Ob в K или в виде ObK. Объекты обозначаем буквами $A, B, C, \ldots$. Если $A \in ObK$, то говорят, что A является K*-объектом*. Говорят, что f есть морфизм из объекта A в объект B, и пишут $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Объект A называется *началом* морфизма f, а объект B – его *концом*. Вместо термина «морфизм» также используется слово *стрелка*.

Как конкретно понимать термин «объект»? Пока – никак. Здесь объекты выражают просто какие-то бесструктурные элементы множества ObK – и больше ничего. Но все же всегда имеется невысказанная мотивировка введения понятия «объект». Ее можно обнаружить, если обратиться к какой-нибудь естественной интерпретации понятия объекта. Строго говоря, при принятом нами изложении теории категорий так делать нежелательно, ввиду того что при этом теряется весьма ценное качество предельной абстрактности термина «объект». Но без какой бы то ни было интерпретации трудно понять мотивировку введения понятия «объект». А это понимание очень важно для приложений теории категорий в области компьютеризации и информатизации. Приведем одну из наиболее употребительных интерпретаций понятия «объект». Важно подчеркнуть, что такая интерпретация вовсе не обязательна. Возможны и иные варианты интерпретации термина «объект». Прелесть абстрактной теории как раз в том и состоит, что она допускает множество разных способов практического использования, но сама до них не снисходит. Но если мы не выявим мотивировку введения абстрактной теории, то такая теория будет восприниматься просто как бессодержательная словесная эквилибристика, как «абстрактная чепуха», и стремление к ее практическому применению пропадет. Каждый морфизм $f \in MorK$ будем конкретно представлять в виде некоторой функции $f: A \to B$, отображающей множество A в множество B. Подчеркнем еще раз, что такой способ интерпретации понятия морфизма вовсе не обязателен, можно понимать его и иначе. Множество A понимаем как область определения морфизма f, множество B – как область значений морфизма f. Однако в другой интерпретации понятия категории объекты $A, B, C \ldots$ не обязательно понимать как множества.

Каждой паре (A, B) объектов $A, B \in ObK$ ставится в соответствие некоторое, быть может, и пустое множество $H_K(A, B)$ морфизмов категории K. Возможен случай, когда многим разным морфизмам, например, f, g, h поставлена в соответствие одна и та же пара объектов (A, B), то есть $f, g, h: A \to B$. Такие морфизмы называются *параллельными*. А для какой-то другой пары объектов (C, D) в категории K вообще может не найтись ни одного морфизма f, такого что $f: C \to D$. Вместо записи $H_K(A, B)$ также используются обозначения $Hom_K(A, B)$, $Mor_K(A, B)$, $K(A, B)$, а если это не приводит к двусмысленности, – то и более лаконичные записи $H(A, B)$, $Hom(A, B)$, $Mor(A, B)$. Вместо записи

$f \in H_K(A, B)$ иначе пишут $f: A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Вместо выражений «объект $A \in ObK$» и «морфизм $f \in MorK$» пишут «объект $A \in K$» и «морфизм $f \in K$» или еще проще: «K-объект A» и «K-морфизм f». Для каждого морфизма $f \in MorK$ существует единственная пара объектов A и B, такая что $A, B \in ObK$ и $f \in H_K(A, B)$. Приписывание этого свойства морфизмам мотивируется тем, что при их интерпретации для каждой функции f естественно указывать ее область определения A и область значений B, иначе определение функции будет незавершенным. Пишут $A = domf$ (начало морфизма; в принятой нами интерпретации – его область определения), $B = codf$ (конец морфизма; в нашей интерпретации – его область значений).

Запишем определение классической категории с объектами. Оно выделено жирным шрифтом. ***Категория с объектами*** **K состоит из множества морфизмов $MorK$ и *множества объектов* ObK. Предполагается, что множества $MorK$ и ObK не пересекаются. Категория с объектами K характеризуется следующими пятью свойствами: 1) Каждой паре K-объектов A, B соответствует множество $H_K(A, B)$ морфизмов (быть может, даже пустое), включенное в $MorK$. 2) Для каждого морфизма $f \in MorK$ существует единственная пара A, B K-объектов, такая что $f \in H_K(A, B)$. 3) В множестве $MorK$ определено, вообще говоря частичное, однозначное соответствие –** ***умножение морфизмов*; *произведение* fg *морфизмов*** **$f: A \to B$ и $g: C \to D$ определено лишь в тех случаях, когда $B = C$, то есть когда конец морфизма f совпадает с началом морфизма g.** В этом случае произведение fg есть K-морфизм из объекта A в объект D. Иначе говорят, что для объектов $A, B, C \in K$ определено отображение $H_K(A, B) \times H_K(B, C) \to H_K(A, C)$. Знак $\times$ в данном случае обозначает декартово произведение множеств морфизмов. Морфизмы f, g категории K вида $f: A \to B$ и $g: B \to C$ называются *последовательными*, а вида $f: A \to B$ и $g: A \to B$ – *параллельными*. **4) Умножение морфизмов *ассоциативно* $(fg)h = f(gh)$ всякий раз, когда морфизмы $(fg)h$ и $f(gh)$ существуют.** Иными словами, ассоциативность справедлива всякий раз, когда $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$. Таким образом, ассоциативность выполняется во всех тех случаях, когда она имеет смысл. Равенство $(fg)h = f(gh)$ выражает *категорный закон ассоциативности.*

Закон ассоциативности можно наглядно выразить графически в виде *категорной диаграммы*, изображенной на рис. 2.

Любая категорная диаграмма образуется из объектов и стрелок (морфизмов), она представляет собой ориентированный граф с раскрашенными вершинами и дугами. В роли вершин графа в категорной диаграмме выступают объекты категории, а в роли дуг – ее морфизмы. Такого вида диаграммы широко используются в теории категорий. Они – главное средство наглядного представления внутреннего строения и свойств математических структур, связей между ними. Диаграмма, выражающая категорный закон ассоциативности, характеризует связи между любыми объектами *A, B, C, D* и морфизмами f, g, h. Эти связи выражают существо закона ассоциативности. В данном случае с помощью категорной диаграммы мы выразили один из законов теории категорий.

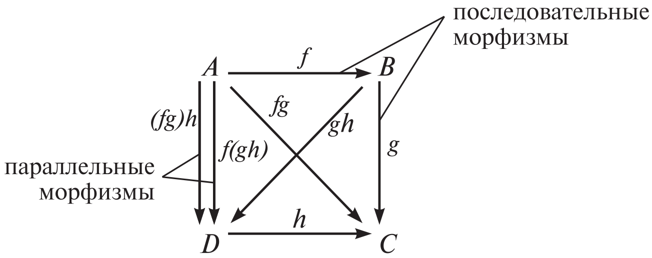


Рис. 2

Категорные диаграммы делятся на *замкнутые* и *разомкнутые*. Разомкнутые диаграммы выражают формулы категорной алгебры, замкнутые – ее равенства. Диаграмма, выражающая категорный закон ассоциативности, относится к числу замкнутых. Замкнутые диаграммы называются иначе *коммутативными*. Коммутативные диаграммы характеризуются тем, что результат действия морфизмов при их последовательном выполнении, указанном на диаграмме, получается одинаковым при движении по всевозможным путям диаграммы, если мы отправляемся от одной и той же точки диаграммы и приходим снова к одной и той же другой точке диаграммы. На языке коммутативных диаграмм выражаются общие связи между объектами и морфизмами. С помощью коммутативных диаграмм можно выражать свойства любых математических структур, даже *законы* самой *теории категорий*. Категорные диаграммы делятся на *общие* и *частные*. Общие диаграммы коммутативны для всех объектов и морфизмов данной категории. Общими коммутативными диаграммами выражаются свойства какой-либо конкретной категории. Частные категорные диаграммы относятся к конкретным объектам и морфизмам данной категории. Они выражают связи между ними и могут быть как замкнутыми, так и разомкнутыми. На рис. 3 приведен пример разомкнутой категорной диаграммы.

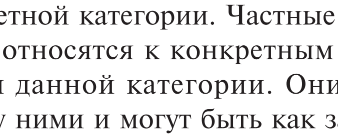


Рис. 3

В последние годы приобрело большую популярность *объектное моделирование*, в котором в качестве основного инструмента используются *диаграммы*, похожие на частные категорные диаграммы. Они тоже строятся из объектов и стрелок. С их помощью описывается *архитектура информационных систем*. Частным категорным диаграммам противостоят *общие*, с их помощью описываются *закономерности функционирования информационных систем*. На рис. 4 приведен пример диаграммы работы банковской системы [3, с. 12].

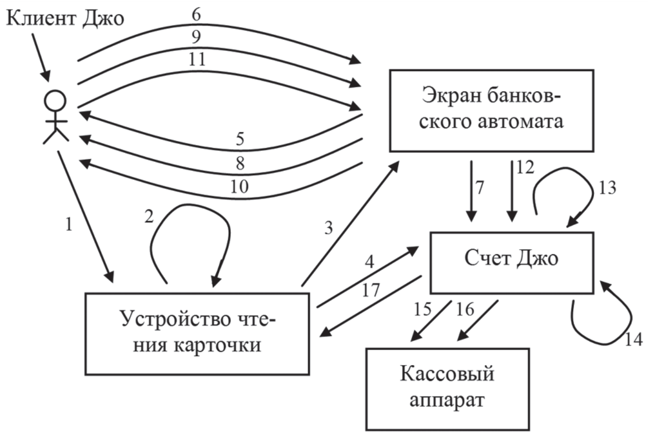


Рис. 4

Стрелки выражают следующие операции: 1) получение карточки устройством чтения; 2) чтение номера карточки; 3) инициализация экрана; 4) открытие счета; 5) запрос регистрационного номера; 6) ввод регистрационного номера; 7) проверка регистрационного номера; 8) запрос транзакции (какую финансовую операцию выполнить?); 9) выбор транзакции (снять деньги); 10) запрос требуемой суммы денег; 11) ввод суммы денег ($20); 12) снятие денег со счета ($20); 13) проверка суммы ($20); 14) вычет снятой суммы денег из счета ($20); 15) выдача наличности ($20); 16) выдача чека.

На теорию категорий можно смотреть как на учение о *категорной алгебре*, которая задана на носителе $MorK$. На нем введены базисные элементы в виде тождественных морфизмов и базисные операции – умножение морфизмов. Категорная алгебра определена не полностью. В ней выделены лишь самые главные черты, а дорисовать ее можно различными способами. Категорная алгебра в этом похожа на булеву алгебру: это не одна, а целое семейство различных экземпляров категорных алгебр. Диаграмма, составленная из объектов и морфизмов некоторой категории, называется *коммутативной*, если произведение морфизмов вдоль любого пути по стрелкам диаграммы зависит только от начала и конца пути. Можно говорить о формулах, тождествах и уравнениях категорной алгебры, с помощью которых можно аналитически описывать категорные диаграммы. Замкнутые категорные диаграммы бывают двух видов – общие и частные. Общие описываются тождествами категорной алгебры, а частные – ее уравнениями. Примером общей замкнутой категорной диаграммы может служить диаграмма, выражающая закон ассоциативности $(fg)h = f(gh)$. Слева и справа от знака равенства стоят формулы категорной алгебры. Примером уравнения категорной алгебры может служить равенство $fx = f$, где f – фиксированный морфизм. Этому уравнению удовлетворяет лишь один из единичных морфизмов $x = e$ данной категории $(fe = f)$. Разомкнутым категорным диаграммам соответствуют формулы категорной алгебры или системы таких формул. Например, диаграмме, изображенной на рис. 3, соответствует система формул *fg* и *fh*.

5) Для каждого объекта $B \in K$ существует морфизм $e_B : B \to B$, называемый *единичным* или *тождественным морфизмом* объекта B, такой что $fe_B = f$ и $e_B g = g$ для любых морфизмов $f : A \to B$ и $g : B \to C$. Тождества $fe_B = f$ и $e_B g = g$ называются *категорными законами тождества*. Они выражаются следующей *коммутативной диаграммой тождества* (рис. 5).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "e_B"] \arrow[dr, "g"] & \\ & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Рис. 5

Для морфизмов $f, g \in MorK$ произведение *fg* существует в том и только том случае, когда f, g – последовательные морфизмы категории K.

2. Предикаты

Далее кратко охарактеризуем алгебру предикатов [4], то есть именно ту алгебру, в терминах которой мы будем в дальнейшем интерпретировать понятие категории. Возьмем какое-нибудь непустое множество *U*, элементы которого называются *предметами*. Само же множество *U* называется *универсумом предметов*. Возьмем, далее, набор из m каких-нибудь необязательно различных подмножеств $A_1, A_2, ..., A_m$ универсума *U*. Декартово произведение $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ называется *предметным пространством S с координатными предметными осями* $A_1, A_2, ..., A_m$ над универсумом *U*. Число осей *m* называется *размерностью* пространства *S*. Вводим множество $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ различных переменных $x_1, x_2, ..., x_m$, которые называются *предметными переменными* пространства *S*. Множество *V* называется *универсумом переменных* пространства *S*. Значениями переменной x_i $(i = \overline{1,m})$ служат элементы множества A_i, так что $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$.

Множества $A_1, A_2, ..., A_m$ называются *областями изменения* переменных $x_1, x_2, ..., x_m$.

Если

$$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_m \in A_m$$

$$\text{и } x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, ..., x_m = a_m,$$

то пишут $(a_1, a_2, ..., a_m) \in S$ и говорят, что *предметный вектор* $(a_1, a_2, ..., a_m)$ *принадлежит* пространству $S = A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$. Элементы $a_1, a_2, ..., a_m$ вектора $(a_1, a_2, ..., a_m)$ называются его *компонентами* (первым, вторым,..., m-ным). Предметное пространство S можно рассматривать как совокупность всех векторов вида $(x_1, x_2, ..., x_m)$, компоненты которых удовлетворяют условию $x_1 \in A_1, \quad x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$. Любое подмножество пространства S называется *отношением*, образованным в (или иначе: заданным на) пространстве S. Отношение имеет размерность m. Говорят, что оно m*-местно*. Отношения, заданные на одном и том же пространстве S, называются *однотипными*. *Тип* отношения определяется набором переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ и набором множеств $A_1, A_2, ..., A_m$. Отношение $\varnothing$, не содержащее ни одного вектора, называется *пустым*, отношение S, в котором имеются всевозможные векторы, — *полным*.

Предикатом, заданным на декартовом произведении $A_1, A_2, ..., A_m$, называется любая функция $P(x_1, x_2, ..., x_m) = \xi$, отображающая декартово произведение $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ множеств $A_1, A_2, ..., A_m$ в множество $\Sigma = \{0, 1\}$. Символы 0 и 1 называются *булевыми элементами*, Σ — множество всех булевых элементов. Переменная $\xi = \{0, 1\}$, являющаяся значением предиката P, называется *булевой*. Предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ на $A_1 \times A_2 \times ... \times A_m$ называется *конечным*, если все множества $A_1, A_2, ..., A_m$ конечны, и *бесконечным* — в противном случае. Эта же терминология переносится и на отношения, соответствующие предикатам. Переменные $x_1, x_2, ..., x_m$ называются *аргументами* предиката P.

Пусть L — множество всех отношений на S, M — множество всех предикатов на S. Между всеми отношениями множества L и всеми предикатами множества M, заданными на S, существует взаимно однозначное соответствие. Отношение Р из L и предикат P из M называются *соответствующими* друг другу, если при любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \begin{cases} 1, \text{если } (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathrm{P}, \\ 0, \text{если } (x_1, x_2, ..., x_m) \notin \mathrm{P}. \end{cases}$$

Обратный переход от предиката P к отношению Р осуществляется по правилу:

если $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$, то $(x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathrm{P}$;

если $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$, то $(x_1, x_2, ..., x_m) \notin \mathrm{P}$.

Множество всех векторов $(x_1, x_2, ..., x_m)$, удовлетворяющих уравнению $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$, образует отношение Р, которое называется *областью истинности* предиката P. Предикат $P \in M$ называется *характеристической функцией* отношения $\mathrm{P} \in L$. *Алгеброй предикатов* называется любая алгебра, заданная над носителем M. *Операции дизъюнкции, конъюнкции и отрицания над предикатами* определяются следующими равенствами: для любых $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_m \in A_m$

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, ..., x_m) = P(x_1, x_2, ..., x_m) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_m);$$

$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, ..., x_m) = P(x_1, x_2, ..., x_m) \wedge Q(x_1, x_2, ..., x_m);$$

$$(\neg P)(x_1, x_2, ..., x_m) = \neg(P(x_1, x_2, ..., x_m)).$$

Символы $\vee, \wedge, \neg$, стоящие слева от знака равенства, означают операции над предикатами, справа — операции над значениями предикатов, то есть над булевыми элементами.

Предикаты любого типа можно записывать в виде формул. Тип конечных предикатов задаем, указывая множества $V = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ и $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{k_i i}\}$, $i = \overline{1, m}$, k_i — число элементов в множестве A_i. Над носителем M вводим *дизъюнктивно-конъюнктивную алгебру предикатов*. В роли *базисных элементов* этой алгебры используем предикаты 0 и 1, а также *предикаты* x_i^a *узнавания предмета* a *по переменной* $x_i, i = \overline{1, m}, a \in A_i$

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{если } x_i = a, \\ 0, \text{если } x_i \neq a. \end{cases}$$

Символ a в записи предиката x_i^a называется его *показателем*. В роли *базисных операций* в дизъюнктивно-конъюнктивной алгебре предикатов используются дизъюнкция и конъюнкция предикатов. Любой предикат $P(x_1, x_2, ..., x_m)$ в этой алгебре можно записать формулой в виде его *совершенной дизъюнктивной нормальной формы* (*СДНФ*)

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \bigvee_{(a_1, a_2, ..., a_m) \in P} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}.$$

Выражения вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$ называются *конституэнтами единицы* предиката P. Запись $(a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathrm{P}$ под знаком $\vee$ означает, что берётся дизъюнкция всех конституэнт единицы $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}$, показатели сомножителей которой удовлетворяют условию $(a_1, a_2, ..., a_m) \in \mathrm{P}$, где Р — отношение, соответствующее предикату $P(x_1, x_2, ..., x_m)$. Это означает, что дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов полна, то есть что формулами этой алгебры можно записать любой предикат, а следовательно, можно выразить аналитически любое отношение произвольного типа.

3. Предикатная интерпретация категории

Выше мы рассмотрели понятия классической категории и предиката. Теперь обратимся к предикатной интерпретации классической категории. Получаемую в результате такой интерпретации категорию будем называть *предикатной* и снабдим ее именем $Pred$. Выберем какой-нибудь *универсум предметов U.* В роли *объектов* $A,\ B,\ C,...$ категории $Pred$ используем произвольные подмножества универсума *U.* В роли множества *Ob* категории $Pred$ берем систему всех подмножеств универсума *U.* В роли морфизмов вида $f: A \to B$ категории $Pred$ используем *линейные логические операторы* вида $F_f(P) = Q$. Каждый такой оператор преобразует одноместные предикаты *P* в одноместные предикаты *Q.* и выражается в виде:

$$\exists x \in A(K_f(x,\ y)P(x)) = Q(y)\,. \qquad (1)$$

В равенстве (1) предикаты *P* и *Q* – переменные. Предикат *P(x)* задан на множестве *A*, предикат $Q(y)$ – на множестве *B.* Предикат *P(x)* на *A* рассматриваем как *экземпляр* объекта *A*, предикат $Q(y)$ на *B* – как экземпляр объекта *B.* Таким образом, морфизм $f: A \to B$ преобразует экземпляры объекта *A* в экземпляры объекта *B.* Естественнее было бы в роли объектов брать не множества $A,\ B,\ C...$ элементов универсума, а множества всех предикатов $P(x),\ Q(y),\ R(z),\ ...,$ заданных соответственно на множествах $A,\ B,\ C...$, но это не обязательно. Поскольку между такими множествами существует взаимно однозначное соответствие, то они взаимозаменяемы. Взяв множества предикатов в роли объектов, мы могли бы элементы этих множеств брать в роли экземпляров объектов. Недостаток такой интерпретации заключается в том, что конструкция объектов в предикатной категории без необходимости переусложняется.

Предикат $K_f(x,\ y)$ называется *ядром линейного логического оператора,* он полностью определяет вид преобразования (1). Предикат $K_f(x,\ y)$ фиксирован, он задан на $A \times B$. Морфизм *f* вида (1) полностью определяется предикатом $K_f(x,\ y)$. В роли множества $Mor(A,\ B)$ всех морфизмов вида $f: A \to B$ берем систему всевозможных операций вида (1). В категории $Pred$ каждому морфизму $f \in Pred$ взаимно однозначно соответствует ядро $K_f(x,\ y)$ преобразования (1). Каждый морфизм $f: A \to B$ категории $Pred$ можно задать, указав соответствующий ему предикат $K_f(x,\ y)$ на $A \times B$. Множество $Mor(\mathrm{P}red)$ получаем объединением всех множеств вида $Mor_{\mathrm{P}red}(A,\ B)$, где $(A,\ B)$ – всевозможные пары множеств $A,\ B \subseteq U$, или же как совокупность преобразований вида (1) со всевозможными ядрами $K(x,\ y)$, заданными на всевозможных декартовых произведениях $A \times B$ множеств $A,\ B \subseteq U$.

Примером ядра морфизма категории $Pred$ может служить предикат

$$K(x,\ y) = (x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3\,, \qquad (а)$$

заданный на декартовом произведении $A \times B$ множеств $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ и $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$. На рис. 6 изображен двудольный граф предиката $K(x,\ y)$. Линейный логический оператор с этим ядром запишется в виде:

$$Q(y) = \exists x \in \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$$

$$(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3)P(x))\,. \qquad (б)$$

Определим, к примеру, реакцию $Q(y)$ морфизма (б) на предикат

$$P(x) = x^a \vee x^b \vee x^e\,. \qquad (в)$$

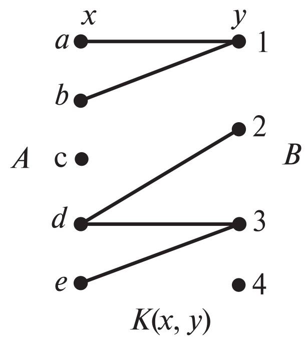


Рис. 6

По формуле (б) находим:

$$Q(y) = \exists x \in \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}\ (((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee$$

$$\vee y^3) \vee x^e y^3)(x^a \vee x^b \vee x^e)) = y^1 \vee y^3 \qquad (г)$$

Этот же результат можно получить также и графически (рис. 7). Для получения множества *Q* собираем вместе все те элементы *y*, которые связаны ребрами графа $K(x,\ y)$ с элементами *x*, образующими множество Р. В итоге получаем $Q\{1,\ 3\}$. Таким образом, морфизм (б) преобразует множество $P = \{a,\ b,\ e\}$ в множество $Q\{1,\ 3\}$.

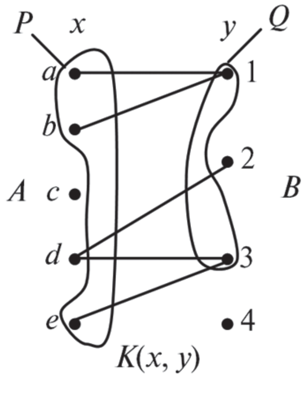


Рис. 7

Переходим теперь к предикатной интерпретации произведения морфизмов. Определим морфизм $f{:}A\to B$ как операцию (1) $F_f(P)=Q$, а морфизм $g:B\to C$ – как операцию $F_g(Q)=R$, определяемую равенством:

$$\exists y\in B(K_g(y,\,z)Q(y))=R(z)\,. \qquad (2)$$

Переменный предикат $R(z)$ задан на множестве C, а фиксированный предикат $K_g(y,\,z)$ – на $B\times C$. Образуем операцию $F_h(P)=R$ посредством суперпозиции операций $F_f(P)=Q$ и $F_g(Q)=R$: $F_h(P)=$ $=F_g(F_f(P))=R$. Подставляя (1) в (2), получаем выражение для преобразования F_h:

$$\exists y\in B(K_g(y,\,z)(\exists x\in A(K_f(x,\,y)P(x))))=R(z)\,, \quad (3)$$

которое превращает предикат $P(x)$ на A в предикат $R(z)$ на C. После тождественных преобразований равенство (3) приобретает вид:

$$\exists x\in A((\exists y\in B(K_f(x,\,y)(K_g(y,\,z)))P(x))=R(z) \quad (4)$$

Равенство (3) представляет собой линейный логический оператор. В роли его ядра выступает предикат

$$K_h(x,\,z)=\exists y\in B(K_f(x,\,y)K_g(y,\,z)) \qquad (5)$$

на $A\times C$ с аргументами $x\in A$ и $z\in C$. Теперь преобразование (3) можно записать более кратко:

$$\exists x\in A(K_h(x,\,z)P(x))=R(z)\,. \qquad (6)$$

Преобразование (6) будем понимать как морфизм $h:A\to C$ категории *Pred*. Его мы принимаем в роли произведения *fg* морфизмов *f* и *g*. Таким, образом, $fg=h$.

Найдем, к примеру, произведение каких-нибудь двух морфизмов категории *Pred*. Находим $K_h(x,\,z)$ *графически* (рис. 8):

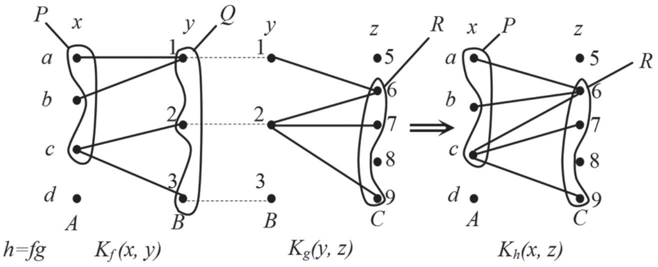


Рис. 8

Двудольные графы ядер $K_f(x,\,y)$ и $K_g(y,\,z)$ морфизмов *f* и *g* изображены на рис. 8 слева. Они могут быть преобразованы в двудольный граф ядра $K_h(x,\,z)$ произведения *fg* морфизмов *f* и *g* следующим образом. На первом этапе вводим горизонтальные связи (прочерчены пунктиром) между одноименными точками одинаковых множеств *B*, расположенных рядом в соседних графах $K_f(x,\,y)$ и $K_g(y,\,z)$. На втором этапе превращаем пару графов $K_f(x,\,y)$ и $K_g(y,\,z)$, которые мы соединили последовательно, в равносильный им один граф $K_h(x,\,z)$. Для формирования ребер графа $K_h(x,\,z)$ выявляем все пути от точек множества *A* к точкам множества *C* в цепочке графов $K_f(x,\,y)$ и $K_g(y,\,z)$. Каждому из таких путей ставим в соответствие ребро графа $K_h(x,\,z)$. Полученный в результате этих действий граф $K_h(x,\,z)$ изображен на рис. 8 справа.

То же самое ядро $K_h(x,\,z)$ морфизма *h* можно получить для рассматриваемого примера также и *аналитически*, производя вычисления по формуле (5). Имеем: *A*={*a*, *b*, *c*, *d*}; *B*={1, 2, 3}; *C*={5, 6, 7, 8, 9};

$$K_f(x,\,y)=(x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee y^3)\,; \qquad (\text{д})$$

$$K_g(y,\,z)=y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9)\,. \qquad (\text{е})$$

Отыскиваем предикат K_h:

$$K_h(x,\,z)=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^c(y^2\vee$$
$$\vee y^3))(y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9)))=(x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee$$
$$\vee z^7\vee z^9)\vee x^c\cdot 0=(x^a\vee x^b)z^6\vee x^c(z^6\vee z^7\vee z^9). \quad (\text{ж})$$

Мы получили то же самое ядро $K_h(x,\,z)$, которое изображено на рис. 8 в виде двудольного графа.

Определим теперь реакцию рассмотренных в вышеприведенном примере произведения мофизмов *fg* и равносильного ему морфизма *h*. Пусть, к примеру, $P(x)=x^a\vee x^a$. Сначала находим реакцию морфизма *fg* на предикат $P(x)$. Вычисляем реакцию $Q(y)$ морфизма *f* на предикат $P(x)$ по формуле (1):

$$Q(y)=\exists x\in\{a,\ b,\ c,\ d\}(K_f(x,\,y)P(x))=$$
$$=\exists x\in\{a,\ b,\ c,\ d\}(((x^a\vee x^b)y^1\vee x^A(y^2\vee y^3))(x^a\vee x^c)=$$
$$y^1\cdot 1\vee y^1\cdot 0\vee(y^2\vee y^3)\cdot 1\vee 0\cdot 0=y^1\vee y^2\vee y^3=Q(y). \quad (\text{з})$$

Вычисляем реакцию $R(z)$ морфизма *g* на предикат

$$Q(y)=y^1\vee y^2\vee y^3 \qquad (\text{и})$$

по формуле (3):

$$R(z)=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}(K_g(y,\,z)Q(y))=\exists y\in\{1,\ 2,\ 3\}$$
$$((y^1z^6\vee y^2(z^6\vee z^7\vee z^9))(y^1\vee y^2\vee y^3))=$$
$$=z^6\cdot 1\vee(z^6\vee z^7\vee z^9)\cdot 1\vee 0\cdot 1=z^6\vee z^7\vee z^9\,. \qquad (\text{к})$$

Итак:

$$R(z)=z^6\vee z^7\vee z^9\,. \qquad (\text{л})$$

Теперь вычислим реакцию $R(z)$ морфизма *h* по формуле (6):

$$R(z)=\exists x\in\{a,\ b,\ c,\ d\}(K_h(x,\,z)P(x))=\exists x\in\{a,\ b,$$
$$c,\ d\}(((x^a\vee x^b)z^6\vee x^A(z^6\vee z^7\vee z^9))(x^a\vee x^c)= \quad (\text{м})$$
$$=z^6\cdot 1\vee z^6\cdot 0\vee(z^6\vee z^7\vee z^9)\cdot 1\vee 0\cdot 0=z^6\vee z^7\vee z^9\,.$$

Получили совпадение реакций морфизмов *fg* и *h*, демонстрирующее их тождественность.

Введем, далее, тождественные морфизмы в категории $Pred$. В роли ядра тождественного морфизма $e_A : A \to A$ в категории $Pred$ принимаем предикат равенства $D_A(x, y)$ на $A \times A$:

$$D_A(x, y) = \bigvee_{a \in A} x^a y^a \qquad (7)$$

Приведем пример тождественного морфизма в категории $Pred$. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. По формуле (7) находим:

$$D_A(x, y) = x^1 y^1 \vee x^2 y^2 \vee x^3 y^3 . \qquad (н)$$

Тождественных морфизмов в предикатной категории много. Их столько же, сколько предикатов равенства $D_A(x, y)$. Каждому подмножеству A универсума U соответствует свой тождественный морфизм $e_A : A \to A$. Для каждого морфизма $f : A \to B$ категории $Pred$ существует единственный правый тождественный морфизм e и единственный левый тождественный морфизм e', такие, что $fe = f$ и $e'f = f$, причем $e = e_B$ и $e' = e_A$. Любой тождественный морфизм e предикатной категории обладает свойством $ee = e$. Произведение fg морфизмов $f : A \to B$ и $f : B \to C$ в категории $Pred$ всегда существует, причем $domf = A$ и $codf = C$. Закон ассоциативности для умножения морфизмов в предикатной категории выполняется. Его справедливость можно наглядно продемонстрировать на двудольных графах. Присоединяем справа второй двудольный граф к первому, а затем к полученной цепочке графов справа присоединяем третий граф. В результате получаем некоторый двудольный граф. Точно такой же граф получится, если присоединить справа ко второму графу третий, а затем полученную цепочку графов присоединить справа к первому графу. Остановимся на схемной реализации предикатных морфизмов.

Произвольное отображение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = y(y \in N, N =$$

$$= (b_1, b_2, ..., b_k))\ M_1 \times M_2 \times ... \times M_n \to N$$

ставит в соответствие набору значений аргументов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ множество $B \subseteq N$, равное $B = \{y \mid F(x_1, x_2, ..., x_n, y) = 1\}$, где F – предикат, соответствующий отображению f. Пусть $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ – координаты множества B. Тогда:

$$\beta_1 = F(x_1, x_2, ..., x_n, b_1);$$
$$\beta_2 = F(x_1, x_2, ..., x_n, b_2);$$
....
$$\beta_k == F(x_1, x_2, ..., x_n, b_k).$$

Набор $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ характеризует множество B.

Построим, к примеру, схему, реализующую какое-нибудь отображение. Берем предикат, связывающий буквы некоторых окончаний имен прилагательных (двухбуквенных):

$$F(x, y) = x^{а} y^{я} \vee x^{я} y^{я} \vee x^{у} y^{ю} \vee x^{ю} y^{ю} \vee x^{о} y^{ю} \vee x^{е} y^{ю} \vee$$

$$\vee x^{ы} y^{е} \vee x^{и} y^{е} \vee x^{о} y^{е} \vee x^{е} y^{е}.$$

Строим соответствующее ему отображение $f(x) = y$. Принимаем $N = \{я, ю, е\}$. Имеем:

$$\beta_{я} = x^{а} \vee y^{я};\ \beta_{ю} = x^{у} \vee x^{ю} \vee x^{о} \vee x^{е};$$
$$\beta_{е} = x^{ы} \vee x^{и} \vee x^{о} \vee x^{е}.$$

Схема, реализующая отображение *f*, имеет вид (рис. 9):

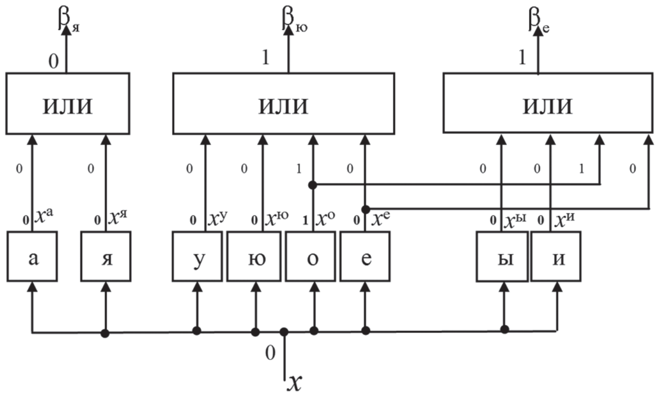


Рис. 9

Переключательную цепь легко строить по двудольному графу (рис. 10). Узлы на выходе графа заменяются элементами разделения. Узлы на входе графа заменяются разветвлением проводов. При переходе от исходной схемы к схеме, действующей в обратную сторону, элементы разделения заменяются разветвлениями проводов, а разветвления проводов – элементами разделения. Узлы на выходе графа превращаются в узловые точки схемы.

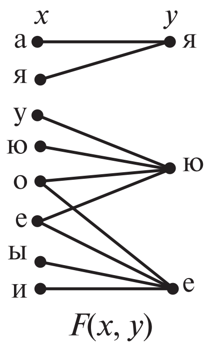


Рис. 10

Отыщем полный образ какого-нибудь предмета по схеме данного отображения. Дано: $x = 0$. Имеем: $\beta_{я} = 0,\ \beta_{ю} = 1,\ \beta_{е} = 1;\ y \in \{ю, у\};\ \{у = ю\}$ или $\{е\}$. То есть $\{ою\}$ или $\{ое\}$.

Построим схему, отыскивающую образ множества относительно некоторого отображения. В предыдущем примере заменяем $x^{а}, x^{я}, ..., x^{ы}, x^{и}$ на

$\alpha_а, \alpha_я, ..., \alpha_ы, \alpha_и$. Элементы узнавания предмета убираем. В результате получаем следующую схему (рис. 11):

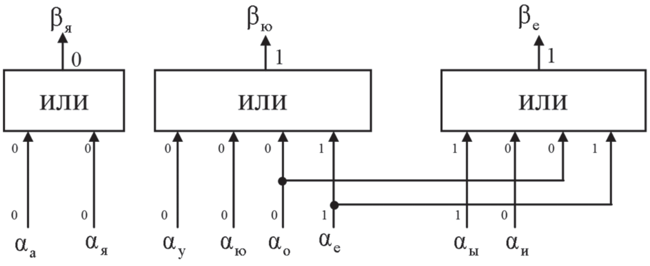


Рис. 11

Отыщем образ какого-нибудь множества по схеме полученного отображения. Берем множество окончаний с первой буквой {е} и {ы}. Схема порождает множество возможных вторых букв окончаний: {е, ы} $\rightarrow$ {ю, е}. Схема порождает не только реальные окончания {ею}, {ее}, {ые}, но и фиктивные {ыю}.

Строим схему, реализующую отображение, обратное заданному (рис. 12):

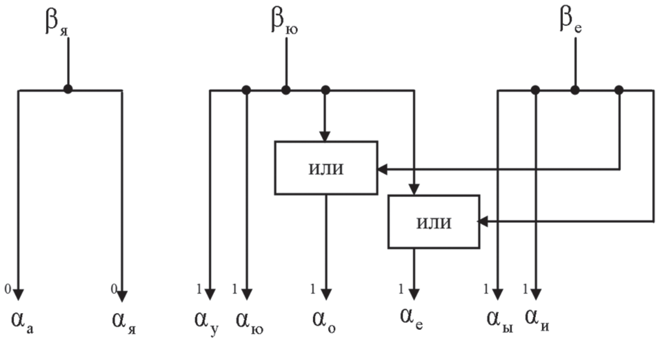


Рис. 12

Возвращаясь назад, получаем иной прообраз. Последние два вида схем (туда и обратно) очень важны. Так реализуются линейные логические операторы преобразования (морфизмы). Объекты – это множества. Наконец, построим схему, реализующую произведение каких-нибудь морфизмов категории *Pred* (рис.13).

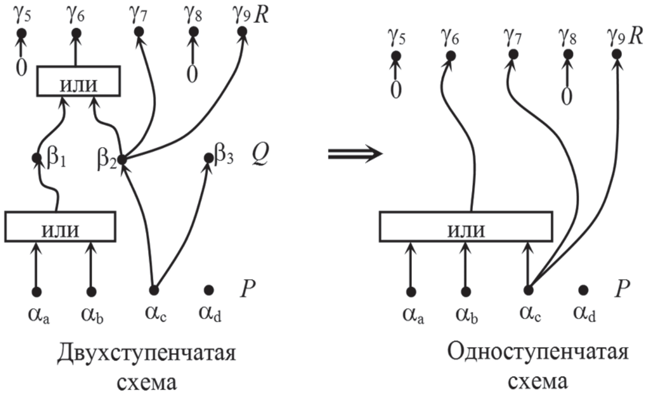


Рис. 13

4. Принцип двойственности

Принцип двойственности (*дуальности*) гласит: для каждой категории K существует *двойственная ей* (*дуальная*) *категория* K^*. Двойственная категория K^* строится по исходной категории K с помощью т.н. *двойственных высказываний*. Определим понятие двойственного высказывания. Пусть Σ – высказывание о категории K, Σ^* – высказывание о категории K^*. Высказывание Σ^* называется *двойственным (дуальным)* высказыванию Σ, если оно получается из высказывания Σ заменой в нем всех вхождений имени K исходной категории на имя K^* двойственной категории; заменой всех записей dom на запись cod и наоборот – cod на dom;

Это значит, что

$$codf^* = domf\,;\, domf^* = codf\,;$$

$$A \xrightarrow{f} B \Leftrightarrow A \xleftarrow{f^*} B \Leftrightarrow B \xrightarrow{f^*} A\,.$$

Поворачиваем стрелку в обратную сторону. На выход морфизма f смотрим теперь как на вход морфизма f^* и наоборот. Вход морфизма f делаем выходом морфизма f^* и наоборот.

Заменяем имена f, g, h, ... морфизмов категории K на имена f^*, g^*, h^*, ... *двойственных морфизмов* категории K^*, а также заменяем произведения морфизмов $f \cdot g$ категории K на *двойственные произведения морфизмов* $g^* \circ f^*$ категории K^*.

Точка $\cdot$ обозначает умножение морфизмов в категории K, кружок $\circ$ – двойственное умножение в категории K^*. Изменение порядка умножения морфизмов является следствием поворота стрелок в обратную сторону.

$$A \xrightarrow{f} BC \xrightarrow{g} D \Leftrightarrow A \xleftarrow{f^*} BC \xleftarrow{g^*} D \Leftrightarrow D \xrightarrow{g^*} CB \xrightarrow{f^*} A$$

В паре BC объекты B и C меняются местами. f обменивается с f^*, g – с g^*, A с D и D с A, если мы хотим сохранить то же направление стрелок. Если B=C, то BC заменяется на BB, для краткости BB заменяем на B.

$$A \xrightarrow{f} BB \xrightarrow{g} C \Leftrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \Leftrightarrow A \xrightarrow{f^*} B \xleftarrow{g^*} C \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C \xrightarrow{g^*} B \xrightarrow{f^*} A \Leftrightarrow C \xrightarrow{g^*} B \xrightarrow{f^*} A\,.$$

Больше никаких изменений в высказывании Σ не производится. Так что все изменения сводятся лишь к обращению стрелок.

В остальном содержание высказывания Σ без каких-либо изменений переходит в высказывание Σ^*. Принцип двойственности также гласит: каждому истинному высказыванию Σ о категории K соответствует двойственное ему истинное высказывание Σ^* о категории K^*.

Этих положений, содержащихся в принципе двойственности оказывается достаточно, чтобы от любой конкретной категории перейти к двойственной ей категории. Некоторые переходы можно совершать на уровне общего понятия категорий, но в других случаях надо обращаться к определению конкретной категории, чтобы перейти к двойственной ей категории. Рассмотрим примеры перехода от высказываний, понятий и структур категории K к двойственным высказываниям, понятиям и структурам категории K^* на общем уровне (т.е. без обращения к конкретным экземплярам категорий).

Пусть фраза «А есть объект категории K » – истинное высказывание о категории K . Тогда фраза «А есть объект категории K^* » будет истинным двойственным высказыванием о категории K^* .

Точно так же устанавливаем, что если объект A не является объектом категории K , то он также и не будет объектом категории K^* . Отсюда следует, что множество всех объектов категории K^* совпадает с множеством всех объектов категории K , то есть: O в $K^* = O$ в K .

Можно также доказать, что множество всех морфизмов категории K^* совпадает с множеством всех морфизмов категории K : $MorK^* = MorK$.

Доказывается также, что категория K^{**} двойственная категории K^* , совпадает с категорией K : $K^{**} = K$.

То же относится и к морфизмам: $f^{**} = f$, а также и к любым другим высказываниям, понятиям и структурам категорий K и K^{**} .

Пусть верно, что $h = f \cdot g$. Тогда, переходя к двойственному высказыванию, получаем $h^* = g^* \circ f^*$. Отсюда следует: $(f \cdot g)^* = g^* \circ f^*$.

Найти морфизм f^* , двойственный морфизму f , на уровне общего понятия категории невозможно, поскольку в общем понятии категории определение морфизма не дается, перечисляются лишь общие для всех категорий свойства морфизмов. Определение морфизма (и объекта – тоже) в каждой конкретной категории, мы находим по морфизму f морфизм f^* . Мы такой переход совершим ниже для предикатной категории.

Каждой диаграмме категории K соответствует *двойственная* ей *диаграмма* категории K^* , которая получается заменой исходных морфизмов двойственными и изменением направления стрелок на противоположное.

К примеру, для какой-нибудь конкретной диаграммы некоторой категории построим соответствующую ей диаграмму двойственной категории. Имеем:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$
$$\Downarrow$$
$$A \xleftarrow{f^*} B \xleftarrow{g^*} C.$$

Закону ассоциативности $(fg)h = f(gh)$, который является высказыванием о категории K, соответствует двойственное высказывание $h^* \circ (g^* \circ f^*) = (h^* \circ g^*) \circ f^*$ о категории K^* . Ему отвечает следующая диаграмма, двойственная к ранее приведенной диаграмме (рис. 14):

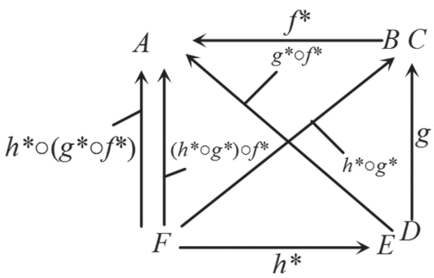


Рис. 14

Начало и конец каждой стрелки меняются местами:

$$A \xrightarrow{f} B \Rightarrow B \xrightarrow{f^*} A \text{, и т.д.}$$

Найдем свойства, двойственные свойствам тождественных морфизмов:

а) $e_B \cdot e_B = e_B \Leftrightarrow e_{B^*} \circ e_{B^*} = e_{B^*}$;

б) $f \cdot e_B = f \Leftrightarrow e_{B^*} \circ f^* = f^*$;

в) $e_B \cdot g = g \Leftrightarrow g^* \circ e_{B^*} = g^*$.

для любых морфизмов $f^* : A \to B$ и $g^* : C \to B$ категории K^* .

Получили такие же три свойства, однако свойства б) и в) теперь поменялись местами. Приведенной ранее диаграмме, выражающей свойства б) и в) тождественных морфизмов категории K , теперь соответствует двойственная диаграмма (рис. 15):

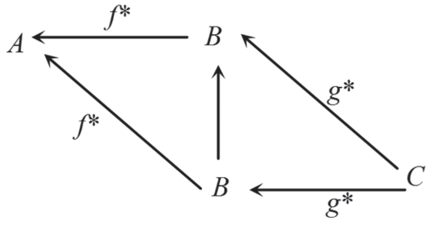


Рис. 15

Возьмем морфизм $f \in MorK$, ему соответствует морфизм $f^* \in MorK^*$. Поскольку $MorK = MorK^*$, то морфизм f^* имеется также и в категории K , то есть $f^* \in MorK$. Морфизмы f и f^* из K называются *двойственными морфизмами* категории K . Точно так же любому понятию категории K соответствует двойственное ему понятие в этой же категории. Таким образом, с помощью принципа двойственности мы можем посредством чисто механической процедуры для каждой категории K построить новую категорию K^* и для каждого понятия категории K построить новое двойственное ему понятие в той же категории и сформулировать его свойства. Любому утверждению категории K соответствует двойственное утверждение в той же категории K. Таким образом, за счет использования принципа двойственности, можно удвоить число категорий, а также число понятий и утверждений в одной и той же категории.

Теперь мы построим с помощью принципа двойственности категорию $Pred^*$, двойственную рассмотренной нами ранее предикатной категории $Pred$. Начиная с этого пункта, мы оставляем в покое классический вариант теории категорий и будем развивать только модифицированный вариант.

Объектами и морфизмами в категории $Pred^*$ будут те же объекты и морфизмы, что и в категории $Pred$.

Объектами в категории $Pred^*$ являются подмножества универсума U. В категории $Pred$ морфизм $f: A \to B$ определяется формулой:

$$\exists x \in A(K_f(x, y) \cdot P(x)) = Q(y) . \qquad (8)$$

Здесь $x \in A$, $y \in B$, $K_f(x, y)$ – ядро морфизма f. $P(x)$ – предикат на A, $Q(y)$ – предикат на B, $K_f(x, y)$ – предикат на Ax.

Пользуясь принципом двойственности, отыскиваем морфизм f^* категории $Pred^*$, двойственный морфизму f категории $Pred$. Строим высказывание Σ^*, двойственное высказыванию Σ. В роли Σ берем равенство (8), так как именно оно определяет вид морфизма f. Заменяем f на f^*, а также обмениваем местами объекты A и B, то есть меняем местами начало и конец морфизма f. Вместе с A и B приходится обменивать местами также и переменные x и y, поскольку они подчинены множествам A и $B(x \in A,\ y \in B)$. Приходится также обменивать местами и предикаты $P(x)$ и A и $Q(y)$ на B, которые тоже подчинены множествам A и B, так как они заданы на A и B и выполняют роль экземпляров объектов A и B. В результате получаем высказывание Σ, т.е. определение морфизма f^*:

$$\exists y \in B(K_{f^*}(y, x) \cdot Q(y)) = P'(x) . \qquad (9)$$

При предикате P приходится ставить отметку $'$, так как если мы этого не сделаем, то получится, что морфизм $f^* = f^{-1}$, то есть, что он является обратным по отношению к морфизму f, так как возвращает нас к исходному предикату P. Но так может и не получиться. По этому из осторожности надо указать P', давая понять, что морфизм f^* может и не возвратить нас к прежнему предикату P. В равенстве (9) остается неясным, что понимать под ядром $K_{f^*}(y, x)$ морфизма f^*. В правиле перехода от Σ к Σ на этот счет ничего не говорится. Но в принципе двойственности сказано, что все, что мы не поменяли должно остаться неизменным. Ядро $K_f(x, y)$ задает связь между переменными x и y для морфизма f, а ядро $K_{f^*}(y, x)$ – связь (то есть отношение) между теми же переменными для морфизма f^*. Эта связь должна остаться прежней. А это значит, что предикаты $K_f(x, y)$ и $K_{f^*}(y, x)$ должны совпадать.

Таким образом, пишем

$$K_{f^*}(y, x) \overset{x,\,y}{=} K_f(x, y) .$$

Окончательно, получаем определение для морфизма f^*:

$$\exists y \in B(K_f(x, y) \cdot Q(y)) = P'(x) . \qquad (10)$$

К примеру, для некоторого морфизма какой-нибудь предикатной категории найдем двойственный морфизм.

Морфизм f задаем двудольным графом (рис. 16):

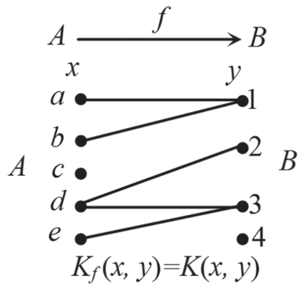
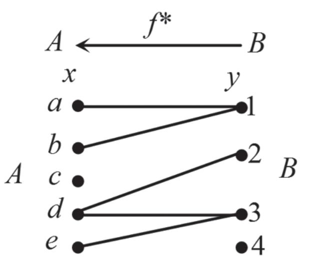


Рис. 16

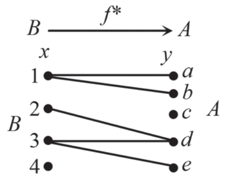
Двойственный морфизм f^* задаем тем же графом, но направление стрелки меняем на обратное (рис. 17). В результате получаем:



$$K_{f^*}(y, x) = K_f(x, y) = K(x, y)$$

Рис. 17

Можно изобразить двойственный морфизм и иначе (рис. 18):



$$K_{f^*}(y, x) = K^*(x, y) = K(x, y)$$

Рис. 18

Запишем формулой двойственный морфизм предикатной категории по формуле исходного морфизма.

В качестве исходного берем морфизм:

$$Q(y) = \exists x \in \{a, b, c, d\}$$

$$(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3)P(x)).$$

Двойственный морфизм имеет вид:

$$P'(x) = \exists y \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee x^e y^3)Q(y)).$$

К примеру, вычислим значение двойственного морфизма, сравнив его с исходным предикатом первоначального морфизма.

Графически (рис. 19):

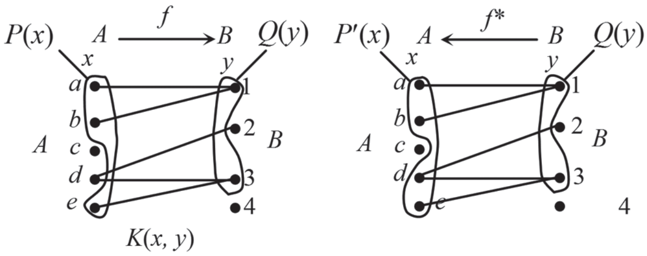


Рис. 19

Мы видим, что $P' \neq P$.

Аналитически:

$$P'(x) = \exists y \in \{1, 2, 3, 4\}(((x^a \vee x^b)y^1 \vee x^d(y^2 \vee y^3) \vee$$

$$\vee x^e y^3)(y^1 \vee y^3)) = (x^a \vee x^b) \vee x^d \vee x^e = x^a \vee x^b \vee x^d \vee x^e.$$

Нам осталось рассмотреть, как в категории $Pred^*$ выражается двойственное произведение морфизмов. Напомним, что ядро произведения $h = fg$ морфизмов f и g в исходной категории $Pred$ определяется равенством:

$$K_h(x, z) = \exists y \in B \cap C(K_f(x, y) \wedge K_g(y, z)) \qquad (11)$$

Здесь $K_f(x, y)$ – предикат на $A \times B$; $K_g(y, z)$ – предикат на $C \times D$; $K_h(x, z)$ – предикат на $A \times D$.

На коммутативной диаграмме (рис. 20) связь морфизмов f, g, h выражается так:

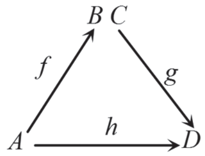


Рис. 20

Поворачивая стрелки в этой диаграмме, получаем двойственную диаграмму (рис. 21), характеризующую связь морфизмов f^*, g^*, h^*:

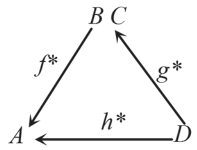


Рис. 21

Для записи равенства, двойственного равенству (11), заменяем в (11) предикат $K_f(x, y)$ на $A \times B$ предикатом $K_{f^*}(y, x)$ на $B \times A$; предикат $K_g(y, z)$ на $C \times D$ предикатом $K_{g^*}(z, y)$ на $D \times C$; предикат $K_h(x, z)$ на $A \times D$ предикатом $K_{h^*}(z, x)$ на $D \times A$. Кроме того, в выражении $\exists y \in B \cap C$ обмениваем местами B и C, а также обмениваем местами K_{f^*} и K_{g^*}. В результате получаем:

$$K_{h^*}(z, x) = \exists y \in B \cap C(K_{g^*}(z, y) \wedge K_{f^*}(y, x)). \qquad (12)$$

Мы знаем, что

$$K_{g^*}(z, y) = K_g(y, z), \quad K_{f^*}(y, x) = K_f(x, y).$$

Подставляя в (12), получаем:

$$K_{h^*}(z, x) = \exists y \in C \cap B(K_g(y, z) \wedge K_f(x, y)) =$$

$$= \exists y \in B \cap C(K_f(x, y) \wedge K_g(y, z)) = K_h(x, z).$$

Так, что операции умножения в категориях $Pred$ и $Pred^*$ согласуются друг с другом. Произведение морфизмов в категории $Pred^*$ можно без вычисления найти по соответствующему произведению двойственных морфизмов категории $Pred$ одним только поворотом стрелок.

Выводы

За счет использования принципа двойственности, можно удвоить число категорий, а также число понятий и утверждений в одной и той же категории. Часто такие двойственные категории, а также двойственные понятия и утверждения одной и той же категории бывают мало похожими друг на друга. Таким образом, принцип двойственности оказывается мощным средством получения новых результатов в теории категорий. Казалось бы, переход к двойственным (дуальным) структурам – это чисто механическая процедура, и ее можно было бы поручить вычислительной машине. Но, как мы видим, на практике такой переход совершается не очень просто. Принцип двойственности требует сохранения содержания высказывания Σ (высказывание о категории K) в высказывании Σ^* (высказывание о категории K^*), за исключением всего того, что связано с поворотом стрелок. Чтобы такой перенос содержания совершить, необходимо глубоко проникнуть в содержание высказывания Σ, ЭВМ такую работу пока не способна выполнять. Простое посимвольное преобразование высказывания Σ в высказывание Σ^* не получается.

Список литературы: 1. *Голдблатт.* Топосы. Категорный анализ логики [Текст]/ *Голдблатт* – М.: Мир, 1983. 486 с. **2.** *Маклейн, С.* Гомология [Текст]/ *С. Маклейн* – М.: Мир, 1966. 543 с. **3.** *Боггс, У., Боггс М.* UML и Rational Rose [Текст]/ *У. Боггс*, *М. Боггс* – М.: ЛОРИ, 2001. 590 с.

Поступила в редколлегию 10.02.2011.

УДК 519.7

Про предикатну категорію / М. Ф. Бондаренко, Н. Є. Русакова, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 10-23.

У статті розглянуто принцип подвійності для категорій, завдяки положенням якого можна перейти від будь-якої конкретної категорії до подвійної їй категорії.

Іл. 21. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

About predicate category / M. F. Bondarenko, N. E. Rusakova, Yu. P. Shabanov-Kushnarenko, // Bionics of Inteligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 10-23.

In the article principle of duality is considered for categories, due to positions of which it is possible to pass from any concrete category to the ambivalent it category.

Fig. 21. Ref.: 3 items.