УДК 519.62

Н.Т. Процай[1], И.Д. Вечирская[2]

[1]Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», Харьков, Украина, protsai.cmmm@gmail.com

[2]ХНУРЭ, Харьков, Украина, ivechir@gmail.com

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБРАЗА ЛИНЕЙНОГО ЛОГИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА И ОТОБРАЖЕНИЯ ГАЛУА ПО ПУСТОЙ ОБЛАСТИ В ТЕРМИНАХ КВАНТОРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

В статье проведен анализ определения образа линейного логического оператора и отображения Галуа по пустой области в теоретико-множественной трактовке и в терминах логики предикатов. Выявлена проблема в определении образа пустого множества на основании данных определений. Представлено решение данной проблемы с помощью аппарата кванторной алгебры предикатных операций.

ЛИНЕЙНЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР, ОТОБРАЖЕНИЕ ГАЛУА, КВАНТОРНАЯ АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ, КВАНТОР ОБЩНОСТИ, КВАНТОР СУЩЕСТВОВАНИЯ, ОБРАЗ МНОЖЕСТВА, ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МНОЖЕСТВА

Введение

В математической литературе часто встречаются два отображения вида $f:2^M \to 2^N$: линейный логический оператор $F:2^M \to 2^N$ и отображение Галуа $G:2^M \to 2^N$.

Описание этих отображений на языках теории множеств и логики предикатов однозначно предписывает алгоритм вычисления образов. Однако, возникают технические трудности, когда при помощи данной трактовки необходимо определить образ пустого множества. Это связано с тем фактом, что образ множества определяется через образы входящих в него элементов.

Для решения данной проблемы в статье предложен аппарат кванторной алгебры предикатных операций. Кванторную алгебру предикатных операций можно рассматривать как формальную систему (или теорию), которая является алгебраизированной версией исчисления предикатов [1]. Кванторная алгебра предикатных операций– алгебра для записи операций над предикатами. Наряду с наличием полного базиса кванторной алгебры предикатных операций, известна система законов данной алгебры. Законы однозначно определяют алгебру.

Формулами кванторной алгебры предикатных операций служат кванторные выражения. Кванторными выражениями называются логические формулы, представляющие собой суперпозиции булевых операций кванторов, примененные к предметным и предикатным переменным. Кванторные выражения в числовой математике используются как логический инструментарий математики. Лишь логическая математика поставила вопрос о предании им статуса операций некоторой алгебры, а именно – алгебры предикатных операций, сделала их предметом специального изучения.

1. Определение линейного логического оператора и отображения Галуа на основе аппарата теории множеств и логики предикатов

Пусть $K \subseteq M \times N$ – произвольное бинарное отношение, $K(x,y)$– заданный на $M \times N$ соответствующий ему предикат, *A* – произвольное подмножество множества *M*. В качестве образа *B* множества *A* относительно *K* можно взять либо объединение образов тех элементов, которые составляют *A*, либо их пересечение:

$$B = \bigcup_{a \in A} S_a, \tag{1}$$

$$B = \bigcap_{a \in A} S_a, \tag{2}$$

Причем *B*, очевидно, будет подмножеством множества *N*.

Представим выражения (1) и (2) на языке логики предикатов. В случае объединения образов имеем

$$B(y) = \bigvee_{a \in A} S_a(y) = \exists x \in AK(x,y). \tag{3}$$

Обозначим отображение (3) через $F:2^M \to 2^N$. Это отображение представляет собой общий вид линейного логического оператора в случае объединения образов. Свойства линейного логического оператора $F:\mathrm{B}(M) \to 2^N$:

$$1)\ F(A_1 \vee A_2) = F(A_1) \vee F(A_2)$$
$$\text{или } F(A_1 \cup A_2) = F(A_1) \cup F(A_2);$$

$$2)\ F(0) = 0 \text{ или } (F(\varnothing) = \varnothing,\ \forall A_1, A_2 \subseteq M).$$

Аналогично выражение (2) перепишется в виде

$$B(y) = \bigwedge_{a \in A} S_a(y) = \forall x \in AK(x,y). \tag{4}$$

Данное отображение обозначим через $G:2^M \to 2^N$. Оно является отображением Галуа, в случае, если $B = \bigcap_{a \in A} S_a$. Свойства отображения Галуа $G:\mathrm{B}(M) \to 2^N$:

$$1)\ G(A_1 \wedge A_2) = G(A_1) \wedge G(A_2)$$
$$\text{или } G(A_1 \cap A_2) = G(A_1) \cap G(A_2);$$

$$2)\ G(0) = 1 \text{ или } (G(\varnothing) = N,\ \forall A_1, A_2 \subseteq M).$$

Отображения *F* и *G*, порождаемые отношением $K \subseteq M \times N$, преобразуют подмножество $A \subseteq M$ в подмножество $B \subseteq N$. Описание этих отображений в виде (3), (4) однозначно предписывает алгоритм вычисления образов. Однако возникают технические трудности, когда при помощи выражений (3), (4) необходимо определить образ пустого множества. Это связано с тем фактом, что образ множества определяется через образы входящих в него элементов. Исходные определения, как видно, имеют тот же недостаток. Для ответа на поставленный вопрос можно обратиться к отличной от (1), (2) теоретико-множественной записи *F* и *G*.

Так, согласно [2], отображение $F: 2^M \to 2^N$ имеет вид

$$B = \left\{ y \in N \middle| (x, y) \in K \text{ для некоторого } x \in A \right\}. \quad (5)$$

Отображение $G: 2^M \to 2^N$ выглядит следующим образом

$$B = \left\{ y \in N \middle| (x, y) \in K \text{ для всех } x \in A \right\}. \quad (6)$$

Представление отображений *F* и *G* в виде (5) и (6) можно рассматривать как задание множества *B* признаком (высказыванием). Задание множества признаками является мощным инструментом теории множеств, позволяющим определить множество по задающему его свойству. Так в выражениях (5) и (6) таким свойством является выражение в фигурных скобках, стоящее справа от вертикальной черты. Множества можно определять свойствами благодаря специальной аксиоме, иногда называемой принципом свертывания [2],[3].

Поскольку

$$(x, y) \in K \Leftrightarrow K(x, y),$$

то выражения (3) и (5) практически совпадают и задают одно и то же множество *B*. То же самое можно сказать и о выражениях (4) и (6). Попытаемся на основании выражений (5) и (6) определить чему равно множество *B*, если $A = \varnothing$.

В различных математических источниках, где отображения *F* и *G* используются в качестве инструмента описания или исследования, данный вопрос не затрагивается.

Попробуем рассмотреть признак, которым задается множество *B* в этих выражениях. На первый взгляд кажется, что и в (5), и в (6) $B = \varnothing$, поскольку в обоих случаях условие (признак) кажется противоречивым, а значит такому условию не удовлетворяет ни один объект. С другой стороны можно прийти к выводу о том, что как в (5) так и в (6), $B = N$, если $A = \varnothing$. Рассмотрим, например, выражение (5).

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Тогда выражение (5) можно переписать в виде

$$B = \left\{ y \in N \middle| (a_1, y) \in K \text{ или } (a_2, y) \in K, \ldots, \text{ или } (a_k, y) \in K \right\}.$$

Логично предположить, что при $A = \varnothing$ само это условие выродится, т.е. будет пустым. Пустое условие естественно трактовать как отсутствие какихлибо ограничений на объект. Таким образом, если $A = \varnothing$, то выражение (5) можно представить в следующем виде

$$B = \left\{ y \in N \middle| \ - \ \right\} = \left\{ y \in N \middle| y - \text{любой объект} \right\} = \left\{ y \in N \right\} = N.$$

Рассуждая аналогично, к такому же выводу можно прийти и для выражения (6).

Исходя из этого, делая выводы на основании одной лишь интуиции, можно прийти к противоположным выводам. Поэтому наибольшая ценность приведенных выше рассуждений относительно образа пустого множества состоит в том, что выявилось два типа противоположных друг другу условий при задании множества признаком. Во-первых, это противоречивое условие, которому не удовлетворяет ни один объект. Множество, заданное таким условием, будет пусто. Во-вторых, это пустое или вырожденное условие, которому удовлетворяет любой объект. Множество, заданное таким условием, будет либо ограничено некоторым условием по умолчанию – в рассмотренном случае таким условием было « $y \in N$ », – либо совпадать со всем универсумом рассматриваемой задачи. Попытаемся найти четкий ответ на поставленный вопрос, используя аппарат кванторной алгебры [1].

2. Определение линейного логического оператора и отображения Галуа в терминах кванторной алгебры предикатных операций

Кванторную алгебру предикатных операций можно рассматривать как формальную систему (или теорию), которая является алгебраизированной версией исчисления предикатов [1].

Кванторной алгеброй называется алгебра предикатных операций с базисом операций, образованным из квантора существования $\exists x_i \in A_i(\mathsf{X})$ ($i = \overline{1,m}$), отрицания $\neg X$ и дизъюнкции $\mathsf{X} \vee \mathsf{Y}$ всевозможных предикатных операций, и с базисом элементов, образованным из предикатов узнавания предметов x_i^a ($i = \overline{1,m}; a \in U$) и предикатных переменных

$$X_j \ (\mathsf{X}, \mathsf{Y} \in N;\, i, k = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n};\ \ a \in A_i).$$

Предикаты узнавания предмета a по переменной $x_i, i = \overline{1,m}, a \in A_i$ определяется следующим образом:

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i = a, \\ 0, \text{ если } x_i \neq a. \end{cases}$$

Символ a в записи предиката x_i^a называется его показателем.

Для предикатов узнавания предмета справедливы: закон отрицания:

$$\overline{x_i^a} = \bigvee_{\substack{b \in U \\ b \neq a}} x_i^b;$$

закон ложности:

если $b \neq a$, то $x_i^a x_i^b = 0$;

закон истинности:

$$\underset{b\in U}{\vee} x_i^b = 1.$$

Все эти законы справедливы при любых $x_i \in U, i = \overline{1,m}, a,b \in U$ [4].

Таким образом, несократимый базис кванторной алгебры состоит из операций дизъюнкции, отрицания и m кванторов существования, из $\sum_{i=1}^{m} k_i$ предикатов узнавания предмета, где k_i – число предметов в множестве A_i $(i=\overline{1,m})$ и из n предикатных переменных.

Кванторы общности и существования, которые широко используются в классической математике в качестве логического инструментария, можно выразить с помощью операции подстановки

$$x_i / a(X), (i=\overline{1,m};\ a \in U).$$

Квантор общности по предметной переменной, как известно, для одноместных предикатов $P(x)$ в случае конечной области изменения предметной переменной x определяется следующим образом [5]:

если $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$,

то $\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_k)$.

В общем случае

$$\forall x_i(X) = \underset{a\in U}{\wedge} x_i / a(X).$$

Аналогично определяется квантор существования:

если $U = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$,

то $\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ldots \vee P(a_k)$.

В общем случае [6]:

$$\exists x_i(X) = \underset{a\in U}{\vee} x_i / a(X).$$

Используя аппарат кванторной алгебры предикатных операций, приведем выражения (3) и (4) к такому виду, который позволит дать однозначный ответ на вопрос: чему равен образ линейного логического оператора и отображения Галуа по пустой области.

$$B(y) = \underset{a\in A}{\vee} S_a(y) = \exists x \in AK(x,y) = \\ = \underset{a\in A}{\vee} x / aK(x,y), \tag{7}$$

$$B(y) = \underset{a\in A}{\wedge} S_a(y) = \forall x \in AK(x,y) = \\ = \underset{a\in A}{\wedge} x / aK(x,y). \tag{8}$$

Для дальнейших формальных преобразований воспользуемся тождествами кванторной алгебры предикатных операций [7]

Выразим операцию подстановки через квантор существования:

$$x_i / a(\mathrm{X}) = \exists x_i \in A_i(x_i^a \wedge \mathrm{X}).$$

Используя данное тождество, преобразуем выражение (3)

$$\exists x \in AK(x,y) = \underset{a\in A}{\vee} x / aK(x,y) = \\ = \underset{a\in A}{\vee} \left(\exists x \in M\left(x^a \wedge K(x,y)\right)\right). \tag{9}$$

Далее преобразуем выражение, применяя тождества дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов [1], [7] и закон дистрибутивности для квантора существования.

Законы дистрибутивности для кванторов существования и общности:

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) = \forall x (P(x) \wedge Q(x)),$$

$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) = \exists x (P(x) \vee Q(x)).$$

Эти равенства верны для любых предикатов P и Q. Это – дистрибутивные свойства кванторов, регулирующие раскрытие скобок и вынос кванторов за скобки. $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – под символом x можно понимать также и целый набор переменных. После раскрытия скобок первое условие становится более сильным, а второе – более слабым. Поэтому имеют место такие следования:

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x (P(x) \vee Q(x)),$$

$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x (P(x) \wedge Q(x)).$$

Обратные следования неверны.

Используя все вышеперечисленные законы, проведем тождественные преобразования над выражением (3):

$$\underset{a\in A}{\vee}\left(\exists x \in M\left(x^a \wedge K(x,y)\right)\right) = \\ = \exists x \in M\left(\underset{a\in A}{\vee}\left(x^a \wedge K(x,y)\right)\right) = \\ = \exists x \in M\left(\left(\underset{a\in A}{\vee} x^a\right) \wedge K(x,y)\right) = \exists x \in M\left(A(x) \wedge K(x,y)\right).$$

Т.о., отображение (9) можно представить в виде

$$B(y) = \exists x \in M\left(A(x) \wedge K(x,y)\right). \tag{10}$$

Для преобразования выражения (4) понадобятся все вышеперечисленные тождества, а также законы де Моргана (законы отрицания) для кванторов [7].

Кванторные законы де Моргана имеют следующий вид

$$\overline{\forall x P(x)} \Leftrightarrow \exists x \overline{P(x)};$$

$$\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall x \overline{P(x)}.$$

При переброске отрицания через знак квантора он заменяется на противоположный. С помощью этих законов и закона двойного отрицания получают зависимости, выражающие один квантор через другой

$$\overline{\overline{\forall x P(x)}} \Leftrightarrow \overline{\exists x \overline{P(x)}};$$

$$\overline{\overline{\exists x P(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x \overline{P(x)}}.$$

Преобразуем выражение (4), учитывая законы, приведенные выше.

$$\forall x \in A K(x,y) = \overline{\overline{\forall x \in A K(x,y)}} = \overline{\exists x \in A \overline{K(x,y)}} =$$
$$= \overline{\underset{a\in A}{\vee} x/a \overline{K(x,y)}} = \underset{a\in A}{\vee}\overline{\left(\exists x \in M \left(x^a \wedge \overline{K(x,y)}\right)\right)} =$$
$$= \overline{\exists x \in M \left(\underset{a\in A}{\vee}\left(x^a \wedge \overline{K(x,y)}\right)\right)} =$$
$$= \overline{\exists x \in M \left(\left(\underset{a\in A}{\vee} x^a\right) \wedge \overline{K(x,y)}\right)} =$$
$$= \overline{\exists x \in M \left(A(x) \wedge \overline{K(x,y)}\right)} = \forall x \in M \overline{\left(A(x) \wedge \overline{K(x,y)}\right)} =$$
$$= \forall x \in M \left(\overline{A(x)} \vee K(x,y)\right).$$

Тогда выражение $G: 2^M \to 2^N$ можно представить в виде

$$B(y) = \forall x \in M \left(\overline{A(x)} \vee K(x,y)\right). \qquad (11)$$

3. Линейный логический оператор и отображения Галуа по пустой области в терминах кванторной алгебры предикатных операций

Возвращаясь к вопросу: чему равны $F(\varnothing)$ и $G(\varnothing)$, видим, что в выражениях (10) и (11) содержится ясный ответ, т.к. эти выражения позволяют подставить характеристический предикат $A(x)$ любого подмножества $A \subseteq M$. При $A = \varnothing$, $A(x) = 0$.

Подставляя в (10) вместо $A(x)$ ноль, и учитывая $x_i / a(0) = 0$, получим:

$$B(y) = \exists x \in M \left(0 \wedge K(x,y)\right) =$$
$$= \exists x \in M(0) = \underset{a\in M}{\vee} x/a(0) = 0.$$

Таким образом, $F(\varnothing) = \varnothing$ при любом $K \subseteq M \times N$.

Подставляя $A(x) = 0$ в (11), получим:

$$B(y) = \forall x \in M \left(\overline{0} \vee K(x,y)\right) =$$
$$= \forall x \in M \left(1 \vee K(x,y)\right) =$$
$$= \forall x \in M(1) = \underset{a\in M}{\wedge} x/a(1) = 1.$$

Последнее равенство получено с учетом $x_i / a(1) = 1$. Так как $B(y) = 1$ при любом $y \in N$, то $B = N$. Таким образом, $G(\varnothing) = N$ при любом $K \subseteq M \times N$.

Выводы

В статье решен вопрос определения образа пустого множества при помощи аппарата кванторной алгебры предикатных операций. На поставленный вопрос получен однозначный ответ, однако ответ был получен на основании чисто формальных преобразований. Трудно осознать, почему были получены именно такие результаты. Почему, согласно выражению (5), пустому множеству соответствует пустое множество, а, согласно (6), пустому множеству соответствует все множество N, если эти выражения столь похожи. В связи с этим, данные результаты требуют отдельного осмысления и истолкования.

Список литературы: **1.** *Процай Н.Т.* Алгебра предикатов и предикатних операций / М.Ф. Бондаренко, З.В. Дударь, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, В.А. Чикина, Н.Т. Процай, В.В. Черкашин. Радіоелектроніка та інформатика. Харків: ХНУРЕ. –2005. –№1. – С. 80–86. **2.** *Голдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики / Голдблатт Р. – М.: Мир, 1983. – 487 с. **3.** *Коэн П. Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза / Коэн П. Дж. – М.: Книжный дом "ЛИБРОКОМ", 2010. – 344 с. **4.** *Бондаренко М. Ф.* Теория интеллекта / Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнаренко Ю. П. – Х.: СМИТ, 2006. – 563 с. **5.** *Newell A.* Computer science as empirical inquiry: symbols and search / A. Newell, H. Simon // Communications of the ACM. – 1976. – № 19(3). – P. 113-126. **6.** *Кравец Н. С.* Алгебры предикатных операций и их применение в системах искусственного интеллекта: дис. ... кандидата техн. наук: 01.05.02 / Кравец Наталья Сергеевна. – Харьков, 2000. –164 с. 7. *Процай Н.Т.* Анализ и синтез логических сетей на основне алгебры предикатов и предикатных операций: дисс. ... кандидата техн. наук: 01.05.02 / Процай Наталья Тимофеевна. – Харьков, 2010. – 155 с.

Поступила в редколлегию 18.06.2014

УДК 519.62

Визначення образу лінійного логічного оператора та відображення Галуа по пустій області у термінах кванторної алгебри / Н.Т. Процай, І.Д. Вечірська // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2014. – № 2 (83). – С. 30–33.

У статті розглядається проблема визначення образу лінійного логічного оператора та відображення Галуа по пустій області. Запропоновано вирішення цієї проблеми за допомогою апарату кванторної алгебри.

Бібліогр.: 7 найм.

UDK 519.62

Definition of appearance linear boolean operator and reflection of Galois to on empty area in terms of quantifier algebra / N.T. Protsai, I.D. Vechirska // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2014. – № 2 (83). – P. 30–33.

In article the problem of definition of appearance linear boolean operator and reflection of Galois is examined to on empty area. Solution of this problem is offered by the terms of quantifier algebra.

Ref.: 7 items.