УДК 681.51.015

АЛГОРИТМЫ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ МНОГОМЕРНОГО ЛИНЕЙНОГО ДИНАМИЧЕСКОГО ОБЪЕКТА

КУНИК Е.Г., КОВАЛЕНКО А.Н., АЛЬ САДИ Ф.М.

Предлагаются рекуррентные алгоритмы последовательного уточнения оценок параметров многомерного линейного объекта в режиме его нормального функционирования.

Введение

Эффективность функционирования системы управления любым объектом в значительной мере зависит от качества используемой математической модели данного объекта, так как алгоритм управления содержит параметры этой модели. Наиболее эффективным в большинстве случаев является адаптивный подход, предполагающий наличие априорно неточной модели, параметры которой последовательно уточняются в процессе нормального функционирования исследуемого объекта управления. Задача построения математической модели (идентификации) усложняется, если исследуемый объект является многомерным. К “неприятным” особенностям таких объектов относят их сложность при большом числе каналов, следствием которой является высокий порядок соответствующих систем дифференциальных уравнений, описывающих динамику протекающих в них процессов [1].

Большинство работ, посвященных исследованию многомерных объектов, использует идею независимости отдельных каналов объекта, позволяющую применять значительно более разработанные методы анализа одномерных объектов. В настоящей работе рассматривается задача построения математической модели многомерного объекта, описываемого матричным разностным уравнением, в режиме его нормального функционирования.

1. Задача идентификации

Пусть динамика линейного многомерного динамического объекта описывается уравнением

$$x(t+1)=Ax(t)+Bu(t)\,, \tag{1}$$

где $x(t)$ – $m\times 1$ вектор состояний; $u(t)$ – $N\times 1$ вектор входов; A, B – постоянные матрицы $m\cdot m$ и $m\cdot N$ соответственно; $t - 0,1,2,\ldots$ – дискретное время.

Задача идентификации данного объекта заключается в оценивании элементов матриц A и B на основании некоторого числа n наблюдений векторов x и u и обычно сводится к минимизации квадратичного функционала [2-4]:

$$I=\sum_{i=1}^{n}\left(x(i+1)-Ax(i)-B(u_i)\right)^T\left(x(i+1)-Ax(i)-Bu(i)\right). \tag{2}$$

Уравнение модели (1) можно записать в виде

$$x(t+1)=Cz(t)\,, \tag{3}$$

здесь $C-\left(m\times(m+N)\right)$ – матрица, составленная из блоков A и B:

$$C=\left[A\ \vdots\ B\right]; \tag{4}$$

$z(t)-\left((m+N)\times 1\right)$ – расширенный вектор

$$z(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ \cdots\\ u(t)\end{bmatrix}. \tag{5}$$

После n наблюдений имеем следующие матрицы:

$$x(n)=\left[x(1),x(2),\ldots,x(n)\right] - \text{ матрица } m\times n; \tag{6}$$

$$u(n)=\left[u(1),u(2),\ldots,u(n)\right] - \text{ матрица } N\times n; \tag{7}$$

$$z(n)=\begin{bmatrix}x(1),\ x(2),\ \ldots,\ x(n)\\ \cdots\\ u(1),\ u(2),\ \ldots,\ u(n)\end{bmatrix} - \text{матрица } (m+N)\times n\ . \tag{8}$$

Тогда минимизируемый критерий (2) может быть записан так:

$$I=tr\left\{\left[X(n)-CZ(n)\right]^T\left[X(n)-CZ(n)\right]\right\}, \tag{9}$$

где $tr\{K\}=\sum_{i=1}^{n}k_{ii}$ – след матрицы K.

Оценка матрицы C, минимизирующая критерий (9), может быть записана по аналогии с [5] следующим образом:

$$\hat{C}(n)=\begin{cases}X(n)\left[Z^T(n)Z(n)\right]^{-1}Z^T(n), \text{ если } n<m+N, & (10)\\ X(n)Z^T(n)\left[Z(n)Z^T(n)\right]^{-1}, \text{ если } n\geq m+N. & (11)\end{cases}$$

Таким образом, если количество измерений меньше числа неизвестных параметров, имеет место соотношение (10), если больше – соотношение (11). Рассмотрим получение более удобных в практических приложениях рекуррентных алгоритмов вычисления оценок (10), (11).

2. Алгоритмы оценивания

Случай n < m + N

Предположим, что матрица

$$P^{-1}(n)=Z^T(n)Z(n) \tag{12}$$

невырождена. Учитывая (5)-(8), записываем матрицу $Z(n)$ в виде

$$Z(n)=\left[Z(n-1)\ \vdots\ z(n)\right], \tag{13}$$

где $Z(n-1)=\left[z(1),z(2),\ldots,z(n-1)\right]$ – матрица $(m+N)\times(n-1)$.

Тогда

$$P^{-1}(n)=\begin{bmatrix} P^{-1}(n-1) & \vdots & Z^{T}(n-1)z(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z^{T}(n)Z(n-1) & \vdots & z^{T}(n)z(n) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Воспользовавшись правилами обращения блочных матриц [4], получаем

$$P(n)=\begin{bmatrix} Q(n) & \vdots & a(n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b(n) & \vdots & d(n) \end{bmatrix}, \qquad (15)$$

здесь

$$Q(n)=P(n-1)+P(n-1)Z^{T}(n-1)z(n)\times$$
$$\times z^{T}(n)Z(n-1)P(n-1)d(n);$$

$$a(n)=-P(n-1)Z^{T}(n-1)z(n)d(n);$$

$$b(n)=-z^{T}(n)Z(n-1)P(n-1)d(n);$$

$$d(n)=\left\{z^{T}(n)\left[I-Z(n-1)P(n-1)Z^{T}(n-1)\right]z(n)\right\}^{-1};$$

I – единичная матрица $(m+N)\times(m+N)$.

Принимая во внимание, что X(n) также блочная матрица, т.е. $X(n)=\left[X(n-1) \;\vdots\; x(n)\right]$, подставляя (15) в (10) и учитывая, что

$$\hat{C}(n-1)=X(n-1)\left[Z^{T}(n-1)Z(n-1)\right]^{-1}Z^{T}(n-1),$$

после несложных преобразований получаем

$$\hat{C}(n)=\hat{C}(n-1)+d(n)\left[x(n)-\hat{C}(n-1)z(n)\right]\times$$
$$\times z^{T}(n)R(n-1), \qquad (16)$$

где $R(n-1)=I-Z(n-1)P(n-1)Z(n-1)$.

Входящая в данное соотношение, а также в выражение для $d(n)$ матрица $R(n-I)$ также может быть вычислена рекуррентно. Для этого разобьем $Z(n-1)$ на блоки $Z(n-1)=\left[Z(n-2) \;\vdots\; z(n-1)\right]$ и после ряда преобразований получаем

$$R(n-1)=R(n-2)-$$
$$-\frac{R(n-2)z(n-1)z^{T}(n-1)R(n-2)}{z^{T}(n-1)R(n-2)z(n-1)}. \qquad (17)$$

Подстановка (17) в (16) дает

$$\hat{C}(n)=\hat{C}(n-1)+$$
$$+\frac{\left(x(n)-\hat{C}(n-1)Z(n)\right)Z^{T}(n)R(n-1)}{z^{T}(n)R(n-1)z(n)}. \qquad (18)$$

Легко заметить, что алгоритм начинает работать при поступлении первого измерения и выборе начального значения матрицы $R(0)=I$.

Таким образом, соотношения (17), (18) описывают потактовую коррекцию элементов матрицы $\hat{C}(n)=\left[\hat{A}(n) \;\vdots\; \hat{B}(n)\right]$.

Случай n = m + N

Предположим, что матрица $P^{-1}(n)=Z(n)Z^{T}(n)$ не вырождена. С учетом блочного представления $Z(n)$ имеем

$$P^{-1}(n)=P^{-1}(n-1)+z(n)z^{T}(n), \qquad (19)$$

а использование леммы об обращении матриц дает

$$P(n)=P(n-1)-\frac{P(n-1)z(n)z^{T}(n)P(n-1)}{1+z^{T}(n)P(n-1)z(n)}. \qquad (20)$$

Подстановка (20) в (11) и несложные преобразования приводят к следующему рекуррентному соотношению:

$$\hat{C}(n)=\hat{C}(n-1)+\left[x(n)-\hat{C}(n-1)z(n)\right]\times$$
$$\times z^{T}(n)P(n), \qquad (21)$$

где матрица $P(n)$ вычисляется по формуле (20).

В заключение необходимо отметить, что если исследуемый объект является нестационарным, т.е. элементы матриц A и B изменяются во времени, следует применять модификации полученных алгоритмов, использующие либо экспоненциальное взвешивание информации, либо некоторое скользящее окно [2].

Литература: 1. *Ивановский Р.И., Таранов А.Г.* Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭЦВМ. М.: Наука, 1970. 172 с. 2. *Ядыкин И.Б., Шумский В.М., Овсепян Ф.А.* Адаптивное управление непрерывными технологическими процессами. М.: Энергоатомиздат, 1985. 240 с. 3. *Изерман Р.* Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. 541 с. 4. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с. 5. *Альберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977. 224 с. 6. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М.-Л.: ГИФМЛ, 1963. 734 с.

Поступила в редколлегию 12.07.2001

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Руденко О.Г.

Куник Евгений Григорьевич, канд. техн. наук, профессор кафедры БМЭ ХНУРЭ. Научные интересы: идентификация и оптимизация стохастических систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-75.

Коваленко Александр Николаевич, нач. отдела телекомпании “Право А/ТВК”. Научные интересы: идентификация и оптимизация стохастических систем. Адрес: Украина, 61024, Харьков, ул. Петровского, 38.

Аль Сади Ф.М., аспирант кафедры ЭВМ ХНУРЭ. Научные интересы: идентификация и оптимизация стохастических систем. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-54.