УДК 519.7

ОБ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Использование метода компараторной идентификации обеспечивает объективность, высокую точность и надежность математического описания поведения и внутренних состояний человека. Решение этой проблемы позволяет лучше предвидеть последствия взаимодействия человека с машинами, благодаря чему достигается повышение эффективности и экономности АСУ. Метод компараторной идентификации обеспечивает полное (с точностью до обозначений) математическое описание идентифицируемого объекта и благодаря этому не уступает по своей описательной силе классическому методу прямой идентификации.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ЦВЕТОВОЕ ЗРЕНИЕ, ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Введение

Идентификацией объекта называют определение характеристик этого объекта на базе его опытного исследования. Идентификация является наиболее трудоемкой и ответственной операцией при анализе объектов. Разработка методов идентификации – одна из важнейших проблем современной теории управления. Особо важное значение имеет задача идентификации объектов, которые можно свести к классу линейных объектов. Последние, как известно, наиболее распространены в природе и технике. К настоящему времени теория идентификации превратилась в обширное по содержанию и богатое по методам учение, тем не менее многие актуальные проблемы в ней еще ждут своего решения. В частности, актуальна задача расширения класса объектов, поддающихся эффективной идентификации.

Классическая задача идентификации состоит в том, чтобы по входным и выходным сигналам объекта определить закон преобразования сигналов этим объектом. Такую идентификацию называют прямой, поскольку она осуществляется при непосредственном доступе к выходным сигналам объекта. Вместе с тем, в ряде случаев возникает необходимость в косвенной идентификации объекта, когда у исследователя нет прямого доступа к его выходному сигналу. В данном случае эффективны для применения только методы косвенной идентификации. Наиболее удобен из них метод компараторной идентификации.

1. Об условиях применимости метода компараторной идентификации

Пусть $E(x, y)$ – предикат, заданный на декартовом квадрате непустого множества M. Будем писать xEy, если $E(x, y) = 1$, и $\overline{xEy}$, если $E(x, y) = 0$. Предикат E называется рефлексивным, если xEx для всех $x \in M$; симметричным, если для всех $x, y \in M$ из xEy следует yEx; и транзитивным, если для всех $x, y, z \in M$ из xEy и yEz следует xEz. Любой рефлексивный, симметричный и транзитивный предикат называется предикатом эквивалентности [1]. Пусть N – непустое множество, F – функция, отображающая множество M на множество N, D – предикат равенства, заданный на $N \times N$. Будем писать uDv, если $D(u, v) = 1$, и $u\overline{D}v$, если $D(8, v) = 0$.

Утверждение 1. Любой предикат E, заданный на $M \times M$ и выражающийся при любых $x, y \in M$ в виде

$$E(x, y) = D(F(x), F(y)), \qquad (1)$$

есть предикат эквивалентности.

Функцию F, фигурирующую в (1), назовем характеристической функцией предиката эквивалентности.

Доказательство. Рефлексивность, симметричность и транзитивность предиката E непосредственно следуют из (1) и из рефлексивности, симметричности и транзитивности предиката равенства D.

Утверждение 2. Для любого предиката эквивалентности E, заданного на $M \times M$, найдутся непустое множество N и функция $F : M \to N$ такие, что при любых $x, y \in M$ будет выполняться (1).

Доказательство. Для каждого $x \in M$ существует единственное множество S_x всех y таких, что xEy. В роли множества N принимаем систему всех множеств S_x. Множество N не пусто. В роли F принимаем функцию, которая ставит в соответствие каждому элементу $x \in M$ множество S_x так, что $F(x) = S_x$. Докажем, что при таком выборе функции F равенство (1) выполняется при любых $x, y \in M$. Рассмотрим случай, когда x и y таковы, что xEy. Чтобы убедиться в том, что в этом случае $F(x)DF(y)$, достаточно доказать, что $S_x = S_y$. Докажем это. Пусть $z \in S_y$, тогда xEz. По свойству симметричности предиката E из xEy выводим yEx. По свойству транзитивности предиката E из yEx и xEz выводим yEz. Отсюда следует, что $z \in S_y$. Итак, мы получили, что $S_x \subseteq S_y$. Предположим теперь, что $z \in S_y$. Тогда yEz. По свойству транзитивности из xEy и yEz выводим xEz. Отсюда следует, что $z \in S_x$. Итак, мы получили, что $S_y \neq S_x$. Вместе взятые, эти два включения дают равенство $S_y = S_x$. Рассмотрим оставшийся случай, при котором x и y таковы, что $x\overline{E}y$. Чтобы убедиться в том, что теперь $F(x)\overline{D}F(y)$, достаточно доказать, что $S_y \neq S_x$. Докажем это. Из $x\overline{E}y$ следует $y \notin S_x$. По свойству рефлексивности предиката E имеем yEy, отсюда выводим $y \notin S_x$. Следовательно, $S_x \neq S_y$. Мы доказали, что значения предикатов $E(x, y)$ и $D(F(x), F(y))$ совпадают при любых $x, y \in M$. Утверждение 2 доказано.

Из утверждений 1 и 2 непосредственно следует, что любые предикаты эквивалентности и только они могут быть представлены в виде (1) при подходящем выборе множества N и функции F. Таким образом, правая часть равенства (1) представляет собой общий вид предиката эквивалентности.

С математической точки зрения полученный результат тривиален, однако, он весьма важен для теории компараторной идентификации, поскольку указывает систему необходимых и достаточных признаков, с помощью которых всегда можно установить, допускает ли объект, реализующий предикат E, идентификацию компараторным методом. Если система, имеющая два входа x, y и один выход t, реализует предикат $t = E(x, y)$, и этот предикат удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности, то ее можно идентифицировать компараторным методом. Если же хотя бы одно из этих трех условий не выполняется, то компараторный метод для такого объекта неприменим. Получаемые результаты по компараторной идентификации могут быть применены к любым физическим объектам, удовлетворяющим только что перечисленным условиям.

В применении к зрительной системе человека элементы $x, y \in M$ интерпретируются как световые излучения, предъявляемые испытуемому для восприятия, M — это множество всех таких излучений. Элементы множества N $u = F(x)$ и $v = F(y)$ интерпретируются как цвета, возбуждаемые в сознании испытуемого излучениями x и y. Устанавливая совпадение или различие цветов u и v, испытуемый реализует предикат $D(u, v)$. Реагируя на излучения x и y, испытуемый реализует предикат $E(x, y) = D(F(x), F(y))$. Значение предиката $D(u, v) = 1$ соответствует реакции испытуемого, выражающей равенство цветов u и v. Значение предиката $D(u, v) = 0$ соответствует реакции испытуемого, выражающей несовпадение цветов u и v. Множество N представляет собой совокупность всех цветов, которые могут быть возбуждены в сознании испытуемого излучениями из множества M. Функцию F содержательно интерпретируем как преобразование светового излучения в цвет, реализуемое зрительной системой испытуемого.

Требование, что E есть предикат, означает: двоичный ответ испытуемого существует и единственен для каждой пары световых излучений множества M. Рефлексивность предиката E означает, что одинаковым световым излучениям соответствуют одинаковые цвета. Симметричность предиката E означает, что изменение порядка предъявления излучений испытуемому не влияет на его реакцию. Транзитивность предиката E означает: если для некоторого испытуемого излучения x, y и y, z одноцветны, то для того же испытуемого будут одноцветными также и излучения x, z.

Постулат о том, что испытуемый в опытах со сравнением цветов световых излучений реализует вполне определенный предикат E, не будет выполняться, если во время проведения опытов менять фон, на котором предъявляется каждое из излучений. Это вызвано эффектом цветовой индукции [2], заключающейся в том, что цвет тест-поля зависит от цвета окружающего его фона. Таким образом, стабильность фона является необходимым условием корректности компараторной идентификации цветового зрения человека. Но и при достижении стабильности фона реакцию испытуемого на пару световых излучений можно считать однозначной только с определенной степенью приближения. Дело в том, что ответы испытуемого при определенных условиях наблюдения носят вероятностный характер. Когда цвета излучений оказываются на границе равенства и неравенства, испытуемый ощущает неуверенность, которая выражается в нестабильности его ответа.

Сказанное проиллюстрируем следующим экспериментом. При помощи диска Максвелла [3] испытуемому предъявлялась на одном поле сравнения цветная поверхность (темно-красная), имеющая следующие трехцветные координаты МКО [4] $x_1 = 0{,}483$, $y_1 = 0{,}308$, $\rho_1 = 0{,}13$. На втором поле сравнения предъявлялась цветная поверхность, излучающая свет того же спектрального состава, но несколько иной интенсивности, отличающаяся в K раз ($x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$, $\rho_2 = K\rho_1$). Отношение интенсивности излучения второго поля к интенсивности первого равно $K = \rho_2/\rho_1$. Определение трехцветных координат поверхностей определялось с помощью атласа цветов Рабкина [4]. Значение коэффициента K регулировалось углом раствора полей на диске Максвелла. Во время опытов диск Максвелла освещался зеркальной лампой типа ЗК220-500-2 мощностью 500 Вт с расстояния 2 м под углом $45°$. В опытах использовались следующие численные значения коэффициента $K = 0{,}96; 0{,}97; 0{,}98; 0{,}99; 1{,}00; 1{,}01; 1{,}01; 1{,}02; 1{,}03; 1{,}04$. При каждом значении K опыт повторялся 100 раз и для него вычислялось среднее арифметическое σ из ответов испытуемого. При этом ответу «цвета равны» приписывалось численное значение 1, ответу «цвета не равны» — численное значение 0. Испытуемый заранее не знал, при каком значении K проводится каждый опыт.

На рис. 1 изображена полученная диаграмма. Такого рода диаграммы называют пороговыми кривыми [5]. По оси абсцисс отложено значение коэффициента K, характеризующего интенсивность излучения второго поля; по оси ординат — значение параметра σ, характеризующего вероятность формирования испытуемым ответа «цвета равны». Как видно из диаграммы, однозначность ответа испытуемого нарушается в двух зонах при $K = 0{,}96 - 0{,}99$ и $K = 1{,}01 - 1{,}04$. За пределами этих зон ответ испытуемого детерминирован и однозначно определяется предъявленными ему излучениями. Таким образом, постулат о существовании предиката E нарушается в довольно узких зонах изменения интенсивности излучения в пределах 3% ее величины. Следует учесть, что диск Максвелла является довольно грубым измерительным прибором. Проводя эти же опыты на оптическом субъективном колориметре (например, на колориметре Демкиной [6]), можно было бы зону нестабильности ответа испытуемого существенно сузить.

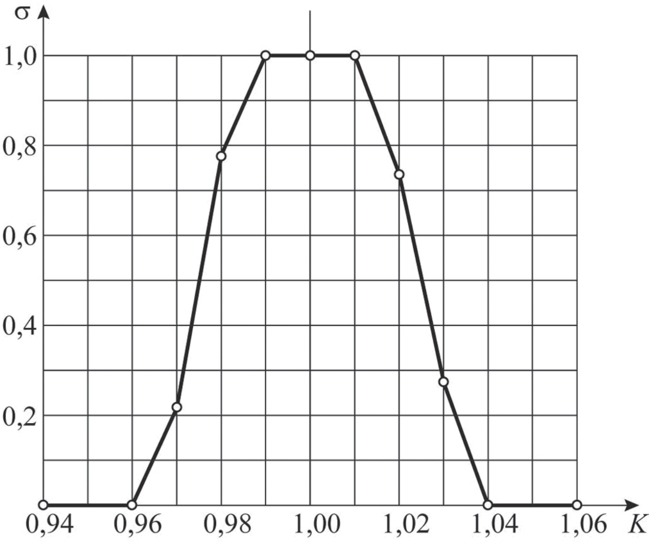

Рис. 1

С помощью опытов только что описанного типа можно оценить степень выполнения закона рефлексивности для цветового зрения человека. После того, как получена пороговая кривая, определяется ее ось симметрии (на рис. 1 – это вертикальная линия ($K = 1{,}00$). Величина отклонения оси симметрии от положения $K = 1{,}00$ характеризует степень нарушения закона рефлексивности. Специально поставленные опыты показали, что это отклонение составляет величину порядка ±0,1% от величины K. Таким образом, можно утверждать, что для цветового зрения человека закон рефлексивности выполняется по крайней мере с той точностью, с которой осуществляется в эксперименте дозирование величины K. По аналогичной методике были выполнены опыты по проверке законов симметричности и транзитивности. Они показали, что и эти законы выполняются для цветового зрения человека практически точно. Таким образом, цветовое зрение человека можно идентифицировать компараторным методом, при этом точность такой идентификации лимитируется лишь величиной зоны нестабильности ответа испытуемого.

2. Единственность представления объекта при его компараторной идентификации

В предыдущем параграфе было показано, что пара (N, F), состоящая из множества N и функции $F : M \to N$, определяет единственный предикат эквивалентности $E(x, y) = D(F(x), F(y))$, заданный на множестве $M \times M$. Но справедливо ли обратное утверждение? Будет ли каждый предикат эквивалентности E единственным образом определять пару (N, F)? Оказывается, нет. Существуют такие различные пары (N, F) и (N', F'), которые задают один и тот же предикат E. Формулируемое ниже утверждение указывает необходимое и достаточное условие, при котором две пары (N, F) и (N', F') определяют один и тот же предикат эквивалентности E.

Утверждение 3. Для того чтобы две пары (N, F) и (N', F') определяли один и тот же предикат эквивалентности E, заданный на декартовом квадрате множества M, необходимо и достаточно, чтобы существовала биекция T с областью определения N и областью значений N' такая, что для всех $x \in M$ $F'(x) = T(F(x))$.

Доказательство. *Достаточность.* Предположим, что существует биекция $T : N \to N'$ такая, что для всех $x \in M$ $F'(x) = T(F(x))$. Докажем, что в этом случае значения предикатов $E(x, y) = D(F(x), F(y))$ и $E'(x, y) = D'(F'(x), F'(y))$ совпадают при любых $x, y \in M$. Пусть x и y таковы, что xEy. Тогда $F(x) = DF(y)$, $T(F(x))D'T(F(y))$, $F'(x) = D'F'(y)$, $xE'y$. Если же $x\bar{E}y$, то $F(x)\bar{D}F(y)$, $T(F(x))\overline{D'}T(F(y))$, $F'(x)\bar{D}F'(y)$, $x\overline{E'}y$. Следовательно, для любых $x, y \in M$ $E(x, y) = E'(x, y)$.

Необходимость. Пусть $E(x, y) = E'(x, y)$ для любых $x, y \in M$. Докажем, что в этом случае найдется биекция $T : N \to N'$ такая, что $F'(x)T(F(x))$ для любого $x \in M$. Рассмотрим отношение $T \subseteq N \times N'$, представляющее собой множество всех пар вида $(F(x), F'(x))$, где x – произвольный элемент множества M. Покажем, что T есть взаимно однозначная функция. Пусть x и y таковы, что $F(x)DF(y)$, тогда xEy, $F'(x)D'F'(y)$. Если же $F'(x)D'F'(y)$, то $xE'y$, xEy, $F(x)DF(y)$. Таким образом, отношение T есть взаимно однозначная функция, причем, $F'(x)T(F(x))$ для любого $x \in M$. Областью определения функции T служит область значений функции F, то есть множество N. Областью значений функции T служит область значений функции F', то есть множество N'. Отсюда, а также из определения понятия биекции [7] следует, что функция T – это биекция, отображающая все множество N на множество N'. Утверждение 3 доказано.

Из утверждения 3 непосредственно вытекает, что если при любых $x \in M$ предикат $E(x, y)$ можно представить в виде (1), то его также можно представить в виде:

$$E(x,y)=D(T(F(x)),T(F(y))), \tag{2}$$

где T – произвольно выбранная биекция. Из утверждения 3 также следует, что если предикат E представлен двумя различными способами $E(x,y)=D(F(x),F(y))=D(F'(x),F'(y))$, то всегда найдется такая биекция T, которая связывает функции F и F' зависимостью $F'(x)T(F(x))$, справедливой при любом $x\in M$. Следовательно, получается, что нельзя указать единственно возможную характеристику F для предиката эквивалентности E.

Таким образом, если найдена некоторая функция F, математически описывающая объект идентификации, то на роль описания этого объекта с тем же правом может претендовать также целое семейство других функций. Поэтому при выборе функции F имеется большой произвол. В значительной мере произволен и выбор области значений функции F. Иными словами, выходные сигналы объекта компараторной идентификации также допускают различные варианты математического описания. Такая множественность представления объекта может навести на мысль о неполноте его описания методом компараторной идентификации и, следовательно, об ущербности этого метода по сравнению с классическими методами прямой идентификации. На самом деле степень полноты описания объекта при этих двух способах идентификации абсолютно одинакова. Дело в том, что при прямой идентификации описание объекта получается единственным лишь по той причине, что способ описания его выходных сигналов был выбран еще до начала идентификации. При компараторной же идентификации способ описания выходных сигналов выбирается в самом процессе идентификации, именно это и приводит к множественности описаний объекта.

Точно такая же множественность описаний объекта может возникнуть и при его прямой идентификации. Дело в том, что и при прямой идентификации выходные сигналы объекта могут описываться самыми различными способами. Так, компоненты вектора выходного сигнала можно нумеровать по-разному. Численные значения каждого из компонентов изменяются, если перейти к новой шкале при их измерении. При этом шкалу эту не обязательно брать линейной. Для каждого компонента можно брать свою собственную шкалу. Изменение же способа описания выходных сигналов объекта автоматически влечет за собой также и изменение описания самого объекта. После такого изменения описания линейный объект может даже превратиться в нелинейный. Таким образом, и при прямой идентификации математическое описание объекта может оказаться многовариантным. Это означает, что математическое описание объекта всегда получается лишь с точностью до произвольного биективного отображения. Требовать от компараторной или некомпараторной идентификации, чтобы она давала единственно возможное описание объекта – это значит считать, что имеется единственная истинная система обозначений его выходных сигналов, что, конечно, неверно.

Нижеследующее утверждение доказывает, что методом компараторной идентификации объект описывается с точностью до изоморфизма. Содержательно это означает, что компараторная идентификация (так же, как и прямая) дает с точностью до обозначений единственное описание объекта. Рассмотрим два предиката эквивалентности $E(x,y)$ и $E'(x',y')$. Первый из них задан на декартовом квадрате множества M, второй – на декартовом квадрате множества M'. Выразим предикаты E и E' в виде:

$$E(x,\ y)=D(F(x),F(y)), \tag{3}$$

$$E'(x',y')=D'(F'(x),F'(y)). \tag{4}$$

Согласно утверждению 2 это всегда можно сделать. Здесь D – предикат равенства, заданный на декартовом квадрате множества N; D' – предикат равенства, заданный на декартовом квадрате множества N'. Символами F и F' обозначены характеристические функции предикатов E и E'. Первая из них определена на множестве M и принимает значения на множестве N, вторая определена на M' и принимает значения на множестве N'.

Утверждение 4. Если модели $\langle M,E\rangle$ и $\langle M',E'\rangle$ изоморфны, то также изоморфны модели $\langle N,D\rangle$ и $\langle N',D'\rangle$.

Доказательство. Изоморфность моделей $\langle M,E\rangle$ и $\langle M',E'\rangle$ означает [8], что существует биекция $G:M\to M'$ такая, что

$$E(x,\ y)=E'(G(x),G(y)) \tag{5}$$

при любых $x,y\in M$. Существование биективной функции G означает, что множества M и M' равномощны. Рассмотрим отношение H, заданное на декартовом произведении $N\times N'$ и образованное всеми парами вида $(F(x),F'(G(x)))$. Покажем, что отношение H функционально. Возьмем какие-нибудь элементы $x,y\in M$ и предположим, что $F(x)DF(y)$. Тогда в силу (3) справедливо xEy. Из (5) следует, что $G(x)E'G(y)$, откуда согласно (4) получаем $F'G(x))$, $(F(x),F'(G(x)))$. Итак, отношение H есть функция.

Покажем, что функция H взаимно однозначна. Пусть $x,y\in M$ таковы, что $F'(G(x))D'F'G(y))$. Тогда в силу (4) $G(x)E'G(y)$. Отсюда согласно (5) выводим xEy. Последнее соотношение в силу (3) влечет $F(x)DF(y)$. Итак, H – взаимно однозначная функция. Область значений функции F совпадает с множеством N, поэтому функция H определена на всем множестве N. Поскольку область значений функции F' совпадает с множеством N', то областью значений функции H служит все множество N'. Итак, отношение H есть биекция, заданная на множестве N со значениями на множестве N'. Она может быть представлена равенством

$$F'(G(x)) = H(F(x)), \qquad (6)$$

справедливым для всех $x \in M$. Из биективности отношения H следует, что множества N и N' равномощны.

Доказываем изоморфность предикатов D и D'. Для любых $u, v \in N$ из uDv следует $G(u)D'G(v)$. Точно так же $u\overline{D}v$ из следует $G(u)\overline{D'}G(v)$. Итак,

$$D(u, v) = D'(G(u), G(v)) \qquad (7)$$

при любых $u, v \in N$. Утверждение 4 доказано.

Пусть $u = F(x)$ – математическое описание объекта, заданного предикатом $E(x, y)$; $u' = F'(x')$ – описание того же объекта, заданного предикатом $E'(x', y')$. Функция F отображает множество M на множество N, а функция F' отображает множество M' на множество N'. Если множество M отличается от множества M', а множество N — от множества N', то это может означать лишь то, что входные сигналы x, x' и выходные сигналы u, u' объекта описаны в различных системах обозначений. Поэтому должны существовать биекции G и H такие, что $x' = G(x)$ и $u' = H(u)$. Они задают переход от одной системы обозначений сигналов объекта к другой. Пользуясь только что записанными соотношениями, можем равенство $u' = F'(x')$ переписать в виде $H(u) = F'(G(x))$. Учитывая (6), имеем $H(u) = H(F(x))$. Так как отображение H биективно, то $u = F(x)$. Мы превратили описание F объекта в описание F'. Аналогичным способом можно превратить описание F' объекта в описание F. Полученный результат означает, что объект компараторной идентификации может иметь различные описания F и F' только за счет того, что его входные и выходные сигналы представлены в различных системах обозначений. Если потребовать, чтобы входные и выходные сигналы объекта всегда описывались в одной и той же системе отсчета (то есть каким-то стандартным способом), то при компараторной идентификации, так же как и при прямой, описание объекта будет единственным.

3. Слабый и сильный изоморфизмы предикатов

Ввиду важности вопроса об изоморфности характеристических функций эквивалентностей в следующих двух параграфах дается его более глубокая проработка. Предикаты P и P' на $A \times B$ и $A' \times B'$ называются слабо изоморфными (или просто изоморфными), если существуют биекции $\varphi : A \to A'$ и $\psi : B \to B'$ такие, что для всех $x \in A$ и $y \in B$ выполняется равенство

$$P(x, y) = P'(\varphi(x), \psi(y)). \qquad (8)$$

Будем говорить также, что предикат P (φ, ψ) изоморфен предикату P'. Биекции φ и ψ, удовлетворяющие условию (8), называются левым и правым изоморфизмами предикатов P и P'.

Предикаты $P(x, y)$ и $P'(x', y')$ на $A \times B$ и $A' \times B'$ называются сильно изоморфными, если существует биекция $\varphi : A \cup B \to A' \cup B'$ такая, что для всех $x \in A$ и $y \in B$ выполняется равенство

$$P(x, y) = P'(\varphi(x), \varphi(y)). \qquad (9)$$

Будем говорить также, что предикат P φ-изоморфен предикату P'. Биекция φ, удовлетворяющая условию (9), называется изоморфизмом предикатов P и P'.

Понятия слабого и сильного изоморфизмов предикатов играют в теории компараторной идентификации важную роль. Дело в том, что выбор обозначений для сигналов идентифицируемой системы находится всецело во власти исследователя и определяется принятой им системой единиц. Если два исследователя, изучая поведение одной и той же системы, используют разные обозначения для ее входных сигналов, то они получат для нее различные предикаты. Если все входные сигналы одной и той же изучаемой системы каждым исследователем записываются в единой (но своей) системе единиц, то получаемые ими предикаты будут сильно изоморфными, если же в разных, то предикаты будут слабо изоморфными. В этом случае будем говорить, что изучаемые системы идентифицированы с точностью до обозначений (общих или раздельных). В случае сильного изоморфизма предикатов будем говорить, что индуцируемые системы совпадают с точностью до обозначений в единой системе единиц. В случае слабого изоморфизма предикатов будем говорить, что идентифицируемые системы совпадают с точностью до обозначений в разных системах единиц.

Утверждение 5. Изоморфизм φ предикатов P и P', определенных соответственно на $A \times B$ и $A' \times B'$, биективно отображает $A \cap B$ на $A' \cap B'$, $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$ и $B \setminus A$ на $B' \setminus A'$.

Доказательство. Доказываем, что φ отображает $A \cap B$ на $A' \cap B'$. Поскольку $A \cap B \subseteq A \cup B$, то, по определению сильно изоморфных предикатов P и P' для всех $x \in A \cap B$, $y \in B$ и $z \in A$ имеют место равенства $P(x, y) = P'(\varphi(x), \varphi(y))$ и $P(z, x) = P'(\varphi(z), \varphi(x))$. Следовательно, $\varphi(x) \in A'$ и $\varphi(x) \in B'$, то есть $\varphi(x) \in A' \cap B'$. Так как φ — биекция, то для всех $x \in A' \cap B', y \in B', u\, z' \in A'$ имеют место равенства $P'(x, y) = P(\varphi^{-1}(x'), \varphi^{-1}(y'))$, $P'(z, x) = P(\varphi^{-1}(z'), \varphi^{-1}(x'))$. Следовательно, $\varphi^{-1}(x') \in A' \cap B'$. Таким образом, ограничение функции φ на $A \cap B$ имеет значения в множестве $A' \cap B'$ и сюръективно. Кроме того, φ инъективна. Поэтому φ биективно отображает множество $A \cap B$ на множество $A' \cap B'$.

Доказываем, что φ отображает $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$. Пусть $x \in A \setminus B$. Предположим, что $\varphi(x) \in B'$. Тогда для всех $z' \in A'$ имеет место равенство $P'(z', \varphi(x)) = P(\varphi^{-1}(z'), x)$. Следовательно, $x \in B$, что противоречит условию. Таким образом, имеем: $\varphi(x) \in A' \setminus B'$. Аналогично выводим, что для всех $x \in A' \setminus B'$ $\varphi^{-1}(x) \in A' \setminus B'$. Значит, φ сюръективно отображает $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$. Будучи инъективной по определению, φ биективно отображает $A \setminus B$ на $A' \setminus B'$. Доказательство того, что φ биективно отображает $A' \setminus B'$ на $A \setminus B$ аналогично предыдущему. Утверждение 5 доказано.

Содержательно утверждение 5 означает, что если сигналы x и y системы $P(x, y)$ имеют имена в единой системе обозначений, то при переобозначении этих имен необходимо имена из области $A \cap B$ превратить в имена из области $A' \cap B'$, имена из $A \setminus B$ – в имена из $A' \setminus B'$ и имена из $B \setminus A$ – в имена из $B' \setminus A'$. Если сделать иначе, то предикат P', получаемый из предиката P в результате переобозначения его входных сигналов, может оказаться неизоморфным предикату P, что недопустимо.

Утверждение 6. Если $A \cap B = \varnothing$ и $A' \cap B' = \varnothing$, то слабо изоморфные предикаты P и P', определенные на $A \times B$ и $A' \times B'$, будут также и сильно изоморфными.

Доказательство. Если предикаты P и P' слабо изоморфны, то существуют биекции $\psi_1 : A \to A'$ и $\varphi_2 : B \to B'$ такие, что для всех $x \in A$ и $y \in B$ выполняется равенство $P(x, y) = P'(\psi_1(x), \psi_2(y))$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), \text{ если } E\in A; \\ \psi_2(x), \text{ если } E\in B. \end{cases}$$

Очевидно, что φ биективно отображает $A \cup B$ на $A' \cup B'$, и для всех $x \in A$ и $y \in B$ выполняется равенство $P(x, y) = P'(\varphi(x), \varphi(y))$. Это означает, что предикаты P и P' сильно изоморфны. Утверждение 6 доказано.

Содержательно утверждение 6 означает: два различных описания одной и той же идентифицируемой системы $P(x, y)$, входные сигналы которой определены на непересекающихся областях, всегда совпадают с точностью до сильного изоморфизма, то есть совпадают с точностью до обозначений входных сигналов x и y системы P, описываемых в единой системе обозначений.

Утверждение 7. Пусть P и P' – предикаты, определенные на $A \times B$ и $A' \times B'$; $A \cap B$ не пусто; $\varphi_1 : A \to A'$ и $\varphi_2 : B \to B'$ – левый и правый изоморфизмы предикатов P и P'. Если образом множества $A \cap B$ при отображениях φ_1 и φ_2 является множество $A' \cap B'$ и на множестве $A \cap B$ значения биекций φ_1 и φ_2 совпадают, то предикаты P и P' сильно изоморфны.

Доказательство. Так как предикаты P и P' слабо изоморфны, то для всех $x \in A$ и $y \in B$ $P(x, y) = P'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. Положим

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), \text{ если } x \in A, \\ \varphi_2(x), \text{ если } x \in B \setminus A. \end{cases}$$

Поскольку $\varphi_1(x)$ биективно отображает множество A на множество A', а $\varphi_2(x)$ – множество $B \setminus A$ на $B' \setminus A'$, то $\varphi(x)$ биективно отображает $A \cup B$ на $A' \cup B'$. Докажем, что для всех $x \in A$ и $y \in B$ $P(x, y) = P'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. Пусть $x \in A$ и $y \in B$. Возможны два случая: $y \in A \cap B$ и $y \in B \setminus A$. Пусть $y \in A \cap B$. Тогда, поскольку по условию утверждения 7 значения биекций φ_1 и φ_2 совпадают, то $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) = \varphi(x)$. Если же $y \in B \setminus A$, то $\varphi_2(y) = \varphi(y)$. Следовательно, при любых $x \in A$ и $y \in B$ имеем: $P(x, y) = P'(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = P'(\varphi(x), \varphi(y))$. Это означает, что предикаты P и P' сильно изоморфны. Утверждение 7 доказано.

Содержательно утверждение 7 означает, что если для системы $P(x, y)$ найдется сигнал a, который можно подать как на вход x, так и на вход y (то есть $x = y = a$), и если все такие сигналы переобозначаются биекциями $\varphi_1(x) = x'$ и $\varphi_2(y) = y'$ по-одинаковому, то в результате получаем предикат $P'(x, y)$ вне зависимости от способа переобозначения остальных сигналов (при условии, что для них не используются имена сигналов a).

Утверждение 8. Если предикаты эквивалентности E и E' на $A \times A$ и $A' \times A'$ слабо изоморфны, то они также и сильно изоморфны.

Доказательство. Поскольку предикаты E и E' слабо изоморфны, то существуют биекции $\varphi_1 :$ $A \to A'$, и $\varphi_2 : A \to A'$ такие, что для любых $x, y \in A$ имеет место равенство $E(x, y) = E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$ (а). Подставляя в (а) $y = x$, по свойству рефлексивности предиката E получаем $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = 1$ (б). Далее, используя свойство симметричности предиката E', выводим $E'(\varphi_2(x), \varphi_1(x)) = 1$ (в). Пусть $x, y \in A$ таковы, что $E(x, y) = 1$. Тогда из (а) следует $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = 1$ (г). По свойству транзитивности предиката E' из (в) и (г) выводим $E'(\varphi_2(y), \varphi_2(x)) = 1$ (д). Если же $x, y \in A$ таковы, что $E(x, y) = 0$, то из (а) следует $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = 0$ (е). Если бы выполнялось равенство (д), то, в силу транзитивности предиката E' из (б) и (д) следовало бы $E'(\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = 1$, что противоречит (е). Следовательно, (д) не выполняется, то есть $E'(\varphi_2(x), \varphi_2(y)) = 0$. Итак, для всех $x, y \in A$ имеет место равенство $E(x, y) = E'(\varphi_2(x), \varphi_2(y))$. Это означает, что предикаты E и E' сильно изоморфны. Утверждение 8 доказано.

Содержательно утверждение 8 означает, что сигналы x и y предиката эквивалентности $E(x, y)$ нельзя описывать в разных системах обозначений, а только в одной и той же. Желая описать систему $E(x, y)$ моделью эквивалентности, исследователь должен выражать ее выходные сигналы x и y в одной системе обозначений.

Утверждение 9. Пусть E – предикат эквивалентности на $A \times A$ и $f : A \to B$ – его характеристическая функция. Тогда эквивалентность E изоморфна равенству D на $B\times B$ в том и только в том случае, когда f инъективна.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть предикаты E и D изоморфны. Тогда существует биекция $\varphi : A\to B$ такая, что для всех $x, y\in A$ $E(x,y)=D(\varphi(x),\varphi(y))$. Проверяем инъективность функции f. Пусть $x, y\in A$ таковы, что $f(x)=f(y)$. Тогда $E(x,y)=1$, следовательно, $\varphi(x)=\varphi(y)$. Поскольку φ биективна, то $x=y$.

Достаточность. Пусть функция f инъективна. Поскольку f сюръективна, то она биективна. По определению характеристической функции f предиката E для всех $x, y\in A$ $E(x,y)=D(f(x),f(y))$. Следовательно, предикаты E и D изоморфны. Утверждение 9 доказано.

Утверждение 9 дает ответ на вопрос, в каких случаях при восприятии предметов человек получает о них всю информацию, а в каких – не всю. Информация не теряется в тех случаях, когда органы чувств человека каждому предмету ставят в соответствие свой субъективный образ (неважно какой). Если же образов меньше, чем воспринимаемых предметов, то часть информации о предметах теряется. Глаз человека при восприятии световых излучений теряет часть информации о них. Это доказывается тем, что существуют такие различные световые излучения, которые воспринимаются глазом в виде одного и того же цвета. Например существует такая смесь красного и зеленого монохроматических излучений, которая неотличима по цвету от желтого монохроматического излучения.

4. Изоморфизм характеристических функций эквивалентностей

Любую функцию $y=f(x)$, отображающую множество A в множество B, можно задать, указывая соответствующий ей предикат $F(x,y)$, определенный на $A\times B$. Для этого при любых $x\in A$, $y\in B$ полагаем $F(x,y)=1$, если $f(x)=y$, и $F(x,y)=0$, если $f(x)\neq y$. Пусть $f: A\to B$ и $f': A'\to B'$ – функции, а F и F' на $A\times B$ и $A'\times B'$ – соответствующие им предикаты. Будем говорить, что функция f (φ,ψ)-изоморфна функции f, если предикат F (φ,ψ)-изомфорфен предикату F'. Если биекции φ и ψ существуют, то будем говорить, что функции f и f' слабо изоморфны. Если, кроме того, $\varphi=\psi$, то будем говорить, что они сильно изоморфны.

Пусть имеется преобразователь сигналов, реализующий функцию $y=f(x)$, которая отображает множество A на множество B. Переименовывая его входные и выходные сигналы x и y с помощью биекций $\varphi: A\to B$ и $\psi: A\to B$, получаем $x'=\varphi(x)$, $y'=\psi(y)$. В результате тот же преобразователь сигналов опишется уже другой функцией $y'=f'(x')$, отображающей множество A' на множество B'. Обозначая через φ^{-1} функцию, обратную биекции φ выражаем функцию f' через функцию f:

$$f(x')=\psi(f(\varphi^{-1}(x^{-1}))). \tag{10}$$

Аналогично выражается функция f через функцию f':

$$f(x')=\psi^{-1}(f(\varphi(x))), \tag{11}$$

где ψ^{-1} – функция, обратная биекции ψ.

Утверждение 10. Пусть E и E' – эквивалентности на $A\times A$ и $A'\times A'$; D и D' – предикаты равенства на $B\times B$ и $B'\times B'$. Если предикат E φ-изоморфен предикату E', то существует такая биекция $\psi: A\to B$, что функция $f(\varphi,\psi)$-изоморфна функции f', а предикат D ψ-изоморфен предикату D'.

Доказательство. Поскольку предикаты E и E' φ-изоморфны, то существует биекция $\varphi: A\to A'$ такая, что для любых $x, y\in A$ $E(x,y)=E'(\varphi(x),\varphi(y))$. Рассмотрим отношение ψ, заданное на $B\times B'$ и образованное всеми парами вида $(f(x), f'(\varphi(x)))$, где $x\in A$. Пусть $x, y\in A$ таковы, что $f(x)=f(y)$. Тогда $E(x,y)=1$, $E'(\varphi(x),\ \varphi(y))=1$, $f'(\varphi(x))=f'\varphi(y))$. Таким образом, отношение ψ удовлетворяет условию однозначности. Область значений функции $f(x)$ совпадает с множеством B, поэтому отношение ψ всюду определено слева. Следовательно, отношение ψ есть функция. Область значений функции $f'(\varphi(x))$ совпадает с множеством B', поэтому функция ψ сюръективна. Пусть $x, y\in A$ таковы, что $f'(\varphi(x))=f'(\varphi(y))$, тогда $E'(\varphi(x),\ \varphi(y))=1$, $E(x,y)=1, f(x)=f(y)$. Следовательно, функция ψ инъективна. Итак, отношение ψ есть биекция, отображающая B на B'. Из определения отношения ψ непосредственно следует, что для всех $x\in A$ $f'(\varphi(x))=\psi(f(x))$. Согласно (11) это означает, что функции f и f' (φ,ψ)-изоморфны. Доказываем изоморфность предикатов D и D'. В силу биективности ψ для любых $u, v\in B$ из $D(u,v)=1$ следует $u=v$, $\psi(u)=\psi(v)$, $D'(\psi(u),\ \psi(v))=1$; из $D(u,v)=0$ следует $u\neq v$, $\psi(u)\neq\psi(v)$, $D'(\psi(u),\psi(v))=0$. Итак, для любых $u, v\in B$ $D(u,v)=D'(\psi(u),\psi(v))$, а это означает, что предикаты D и D' ψ-изоморфны. Утверждение 10 доказано.

Утверждение 11. Если функция f (φ,ψ)-изоморфна функции f', то предикат E (φ,ψ)-изоморфен предикату E', а предикат D ψ-изоморфен предикату D'.

Доказательство. Предположим, что функция f (φ,ψ)-изоморфна функции f'. Тогда, согласно (9), $f'(x)=\psi^{-1}(f'(\varphi(x)))$ для любого $x\in A$. Пусть $x, y\in A$ таковы, что $E(x,y)=1$. Тогда $D(f(x),f(y))=1$, $f(x))=f(y)$, $\psi^{-1}(f(\varphi(x)))=\psi^{-1}(f(\varphi(y)))$, $D'(f(x)),f'(\varphi(y)))=1$. $E'(\varphi(x),\varphi(y))=1$. Если же $x, y\in A$ таковы, что $E(x,y)=0$, то $D(f(x),f(y))=0$, $f(x)\neq f(y)$, $\psi^{-1}(f(\varphi(x)))\neq\psi^{-1}(f(\varphi(y)))$, $f'(\varphi(x))\neq f'(\varphi(y))$, $D'(f'(\varphi(x)),f'(\varphi(y)))=0$, $E'(\varphi(x),\varphi(y))=0$. Итак, при любых $x, y \in A$ $E(x, y) = E'(\varphi(x), \varphi(y))$. Мы доказали, что предикат E φ-изоморфен предикату E'. Пусть $u, v \in B$ таковы, что $D(u, v) = 1$. Тогда $u = v$, $\psi(u) = \psi(v)$, $D'(\psi(u), \psi(v)) = 1$. Если же $u, v \in B$ таковы, что $D(u, v) = 0$, тогда $u \neq v$, $\psi(u) = \psi(v)$, $D'(\psi(u), \psi(v)) = 0$. Итак, при любых $u, v \in B$ $D'(u, v) = D'(\psi(u), \psi(v))$. Мы доказали, что предикат D ψ-изоморфен предикату D'. Утверждение 11 доказано.

Из утверждений 10 и 11 непосредственно следует.

Утверждение 12. Для того чтобы эквивалентность E была φ-изоморфна эквивалентности E', необходимо и достаточно, чтобы функция f была (φ, ψ)-изоморфна функции f.

Содержательно утверждения 10 – 12 означают, что поведение $E(x, y) = D(f(x), f(y))$ идентифицируемой системы E полностью (то есть с точностью до обозначений) определяется действием идентифицируемого объекта f и наоборот. Кроме того, действие нулевого прибора $D(u, v)$ полностью определяется как поведением системы E, так и действием объекта f. Все сказанное свидетельствует о том, что компараторный метод является эффективным средством идентификации объекта f, внутреннего состояния $u = f(x)$ системы E и нулевого прибора $D(u, v)$. Например при изучении механизма цветового зрения человека иссследователь объективно наблюдает двоичные ответы испытуемого, сравнивающего цвета световых излучений, и только из этих ответов получает исчерпывающие описания: 1) субъективного цвета; 2) преобразования физических световых излучений в психологические цвета; 3) способа субъективного анализа цветов. Верно и обратное утверждение: если исследователь уже нашел вид преобразования $u = f(x)$ светового излучения x в цвет u, то он может заранее вычислить ответ $t = E(x, y)$ испытуемого, сравнивающего цвета произвольных световых излучений x и y.

Имеется некоторое неравноправие между внешним поведением E испытуемого и соответствующим ему внутренним информационным процессом f, поскольку сильной изоморфности предикатов E и E' соответствует слабая изоморфность функций f и f' Следующее утверждение устанавливает условие, при котором предикат E и функция f становятся в этом смысле равноправными.

Утверждение 13. Для того чтобы φ-изоморфность любых эквивалентностей E и E' на $A \times A$ и $A' \times A'$ была равносильна φ-изоморфности их характеристических функций $f : A \to B$ $f' : A' \to B'$, необходимо и достаточно, чтобы множества A и B, A' и B' не пересекались.

Доказательство. *Необходимость.* Для доказательства достаточно привести пример множеств A, B, и B' таких, что $A \cap B = \varnothing$, а также φ-изоморфных, эквивалентностей E и E', заданных на $A \times A$, характеристические функции которых не являются φ-изоморфными. Положим $A = \{a_1\, a_2\, a_3\}$, $B = \{a_1\, a_2\, a_3\}$, $B' = \{a_1\, a_3\}$. Эквивалентность $E = E'$ определим разбиением множества $M : \{\{a_1\, a_2\}, \{a_3\}\}$. Функцию $f : A \to B$ определим следующим образом: $f(a_1) = f(a_2) = a_1, f(a_3) = a_2$. Функцию $f' : A' \to B'$ определим так: $f(a_1) = f'(a_2) = a_1, f'(a_3) = a_2$. Очевидно, E и E', будучи равными, сильно изоморфны. Тем не менее, сильного изоморфизма для функций f и f' не существует, так как в противном случае такой изоморфизм должен отображать множество $\{a_1, a_2\}$ на себя и в то же время множество B на B', что невозможно.

Достаточность непосредственно следует из утверждений 6 и 10. Утверждение 13 доказано.

Утверждение 13 содержит в себе рекомендацию инженеру, создающему искусственные анализаторы предметов для технических систем. Если требуется, чтобы предметы и их образы можно было измерять в одной и той же системе физических единиц и при этом всегда получать действие системы в виде предиката эквивалентности, то нужно обеспечить, чтобы множество всех анализируемых предметов и множество их образов не пересекались. Например при создании системы искусственного цветового зрения нужно сделать так, чтобы цвета как физические объекты были представлены не световыми излучениями, а какими-то иными физическими процессами, например, магнитными полями.

5. Обобщение метода компараторной идентификации

Метод компараторной идентификации, описанный во введении, допускает обобщение. Предикат $P(x, y)$, определенный на $A_1 \times A_2$, называется вполне определенным слева на $A_1 \times A_2$, если для каждого $x \in A_1$ существует $x \in A_2$ такой, что $P(x, y) = 1$. Предикат $P(x, y)$, определенный на $A_1 \times A_2$, называется вполне определенным справа на $A_1 \times A_2$, если для каждого $x \in A_2$ существует $x \in A_1$ такой, что $P(x, y) = 1$. Предикат $P(x, y)$ называется вполне определенным на $A_1 \times A_2$, если он вполне определен слева и справа на $A_1 \times A_2$. Пусть предикат $P(x, y)$ не вполне определен на $A_1 \times A_2$. Тогда, сужая области определения переменных x и y предиката A_1 и A_2 до множеств A_1' и A_2' соответствующих предикатам

$$A_1'(x) = \exists\, y \in A_2\; P(x, y), \tag{12}$$

$$A_2'(y) = \exists\, x \in A_1'\; P(x, y), \tag{13}$$

всегда можно получить предикат P, вполне определенный на $A_1' \times A_2'$.

Приведенные определения можно обобщить на случай произвольного числа n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \le m)$. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенный на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, называется вполне определенным на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ по переменной x_i, если для каждого $x_i \in A_i$ существуют $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots,$ $x_{i-1} \in A_{i-1}, x_{i+1} \in A_{i+1}, \ldots, x_n \in A$ такие, что $P(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) = 1$. Предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется вполне определенным на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, если он вполне определен на $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ по всем переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Когда нет особых причин поступить иначе, исследователь всегда стремится так ограничить области определения входных сигналов идентифицируемой системы, чтобы ее поведение описывалось вполне определенными предикатами. Нетрудно видеть, что любая эквивалентность на $A \times A$ вполне определена на $A \times A$.

Пусть E и E' — эквивалентности на $A \times A$. Будем говорить, что эквивалентность E вложена в эквивалентность E', и писать $E \le E'$, если для любых $x, y \in A$ из $E(x,y)=1$ следует $E'(x,y)=1$. Если $E \le E'$, и $E \ne E'$, то будем писать $E < E'$ и говорить, что эквивалентность E строго вложена в эквивалентность E'. Если $E < E'$, то будем говорить, что разбиение R, соответствующее эквивалентности E, мельче разбиения R', соответствующего эквивалентности E'. Будем говорить также, что разбиение R' крупнее разбиения R. Если $E \le E'$, то будем говорить, что разбиение R мельче или равно разбиению R'. Если $E \le E'$, то разбиение R, соответствующее эквивалентности E, называется подразбиением разбиения R', соответствующего эквивалентности E'. Нетрудно видеть, что отношение вложения, определенное на множестве предикатов эквивалентности, рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, то есть оно есть отношение порядка.

Теорема 1. Пусть P — предикат на $A_1 \times A_2$. Предикаты E_L и E_R на $A_1 \times A_2$ и $A_1 \times A_2$, определяемые тождествами

$$E_L(x_1, x_2) = \forall y \in A_2 (P(x_1, y) \sim P(x_2, y)), \quad (14)$$

$$E_R(y_1, y_2) = \forall x \in A_1 (P(x_1, y_1) \sim P(x, y_2)) \quad (15)$$

называются сопровождающими эквивалентностями (левой и правой) предиката P. Нетрудно видеть, что предикаты E_L и E_R на $A_1 \times A_1$ и E_R на $A_2 \times A_2$ — его сопровождающие эквивалентности; E_1 на $A_1 \times A_1$ и E_2 на $A_2 \times A_2$ — эквивалентности; удовлетворяющие условиям $E_1 \le E_L, E_2 \le E_R$; $F_1 : A_1 \to B_1$ и $F_2 : A_2 \to B_2$ – характеристические функции эквивалентностей E_1 и E_2. Тогда найдется единственный предикат L на $B_1 \times B_2$ такой, что для любых $x \in A_1$ и $y \in A_2$:

$$P(x,y) = L(f_1(x), f_2(y)). \quad (16)$$

Доказательство. Покажем, что предикат L с требуемыми свойствами существует. Для любых $u \in B_1, v \in B_2$ положим $L(u,v)=1$, если и только если найдутся $x \in A_1, v \in A_2$ такие, что $F_1(x)=u, F_2(y)=v, P(x,y)=1$. Докажем справедливость (16). Пусть $x \in A_1$ и $y \in A_2$ таковы, что $P(x,y)=1$. Тогда из способа построения предиката L непосредственно следует $L(F_1(x), F_2(y))=1$. Пусть теперь $x \in A_1$ и $y \in A_2$ таковы, что $L(F_1(x), F_2(y))=1$. Тогда найдутся $x_1 \in A_1$ и $y_2 \in A_2$ такие, что $P(x_1, y_2)=1$, $F_1(x_1), = F_1(x)$, $F_2(y_1) = F_2(y)$, откуда $E_1(x, x_1) = E_2(y, y_1) = 1$. Так как $E_1 \le E_L, E_2 \le E_R$, то $E_L(x, x_1) E_R(y, y_1) = 1$. Из определения сопровождающих эквивалентностей предиката P окончательно получаем $P(x,y)=1$. Мы доказали справедливость (16) для построенного нами предиката L. Покажем теперь единственность L. Предположим, что, кроме (16), справедливо еще представление $P(x,y) = L'(F_1(x), F_2(y))$, где L' — некоторый предикат, заданный на $B_1 \times B_2$. Тогда для любых $x \in A_1$ и $y \in A_2$ $L(F_1(x), F_2(y)) = L'(F_1(x), F_2(y))$. Следовательно, для любых $y \in B_1$, $v \in B_2$ $L(u,v) = L'(u,v)$, что доказывает единственность представления P в виде (16). Теорема доказана.

Выражение (16) называется общим видом бинарного предиката P. Легко видеть, что любой бинарный предикат P можно представить в виде (16). Сюръекции E_1 и E_2 называются характеристическими функциями (левой и правой) предиката P. Предикат L называется образом предиката P при эквивалентностях E_1 и E_2. Согласно теореме 1, любую систему преобразования сигналов (см. рис 2, а), реализующую бинарный предикат $P(x,y)=t$, можно представить в виде трехблочной схемы, изображенной на рис.2, б. Сравнивая эту схему со схемой, представленной на рис. 1, а, видим, что первая является обобщением последней. Теперь вместо одной функции F используются две функции F_1 и F_2, а вместо предиката равенства D — произвольный бинарный предикат L. Теорему 1 можно обобщить на случай произвольного n-арного предиката $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Она гласит, что любой предикат можно представить в виде:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L(F_1(x_1), F_2(x_2), \ldots, F_n(x_n)). \quad (17)$$

Следовательно, любую систему сигналов, реализующую предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = t$ (см. рис. 3, а), можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 3, б.

Следующая теорема доказывает, что методом компараторной идентификации (роль компаратора на схеме рис. 3, б выполняет блок L) можно исчерпывающим образом (то есть с точностью до обозначений) идентифицировать одновременно n объектов F_1. $F_2, \ldots, F_n$. Это значит, что в наиболее общем случае метод компараторной идентификации по степени глубины анализа объектов не уступает методу прямой идентификации.

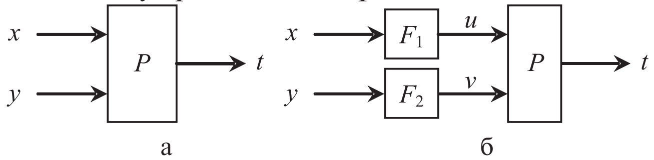

Рис. 2

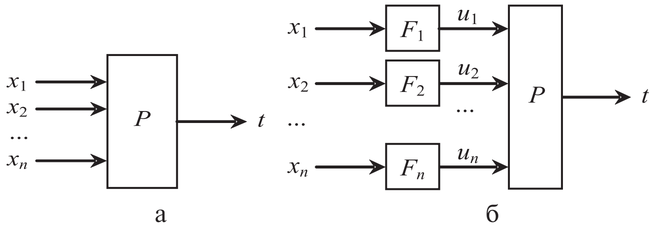

Рис. 3

Теорема 2. Пусть предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ задан на множестве $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, предикат $P'(x'_1, x'_2, ..., x'_n)$ задан на множестве $A'_1 \times A'_2 \times ... \times A'_n$, предикаты $L(u_1, u_2, ..., u_n)$ и $L'(u'_1 u'_2, ..., u'_n)$ — на множествах $B_1 \times B_2 \times ... \times B_n$, $B'_1 \times B'_2 \times ... \times B'_n$ соответственно, причем L есть образ предиката при эквивалентностях $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, L' – образ P при эквивалентностях $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$. Пусть предикаты P и P' $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$-изоморфны, а предикаты E_i и E'_i и φ-изоморфны, где $\varphi_i : A_i \to A'_i, i = \overline{1, n}.$ Тогда найдутся такие биекции $\psi_i : A_i \to A'_i, i = \overline{1, n},$ что предикаты L и L' $(\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$-изоморфны.

Доказательство. Пусть $f_i : A_i \to B_i$ — характеристическая функция эквивалентности E_i, $F_i : A'_i \to B'_i$ — характеристическая функция эквивалентности E'_i. Из условий теоремы для любых $x_i \in A_i, x'_i \in A'_i, i = \overline{1, n},$ вытекает справедливость следующих равенств:

1) $P(x_1, x_2, ..., x_{n)} = L(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n))$,

2) $P'(x'_1, x'_2, ..., x'_{n)} = L'(F'_1(x'_1), F'_2(x'_2), ..., F'_n(x'_n))$,

3) $P(x_1, x_2, ..., x_{n)} = P'(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n))$,

откуда для любых $x_i \in A_i, i = \overline{1, n},$ верно

4) $L(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)) = L_1(F'_1(x'_1), F'_2(x'_2), ..., F'_n(x'_n))$. Так как для любого $i = \overline{1, n}$ $F'_n.(x'_n))$ эквивалентности E_i и E'_i φ_i-изоморфны, то, в силу утверждения 10, найдутся биекции $\psi_i : B_i \to B'_i$, $i = \overline{1, n}$ такие, что функции F и F_i будут (φ_i, ψ_i)-изоморфны. Это означает выполнение для любого $x_i \in A_i$ равенств $F'(\varphi_1(x_i)) = \psi_i(F'(x_i))$, $i = \overline{1, n}$. Подставляя правые части этих равенств в правую часть 4), получаем изоморфизм L и L'. Теорема доказана.

Чтобы продемонстрировать возможность использования на практике описанного здесь обобщенного метода компараторной идентификации, рассмотрим его применение для идентификации способности человека осмысливать воспринимаемые им ситуации. Испытуемому предъявляются для анализа ситуации и тексты. Ситуации – это все то, что может быть воспринято органами чувств человека; тексты – это все, что может быть им понято. В результате восприятия ситуации в сознаниии человека возникает образ этой ситуации; в результате понимания текста в сознании человека возникает смысл этого текста. Пусть A_1 – множество всевозможных ситуаций, A_2 – множество всех текстов. Испытуемый должен выполнить следующее задание: если ситуация $x \in A_1$ согласуется с текстом $y \in A_2$, то он реагирует сигналом $t = 1$, если не согласуется, то – сигналом $t = 0$. Например, выглянув из окна комнаты на улицу, испытуемый затем читает текст «Идет дождь». Если за окном на самом деле идет дождь, то он реагирует ответом 1, если же дождя нет, то – ответом 0. Своим поведением испытуемый реализует некоторый предикат $P(x, y) = t$, заданный на $A_1 \times A_2$, который называется ситуационно-текстовым.

Идентификация поведения испытуемого в данном случае имеет своей целью определение функций F_1 и F_2 и предиката L, фигурирующих на схеме рис. 2, б. Функция F_1 формально описывает процесс преобразования ситуации в ее образ, функция F_2 описывает преобразование текста в его смысл. Предикат L описывает процесс осознания соответствия образа ситуации смыслу текста. Ситуации, образы которых совпадают, называются метамерными. Левая сопровождающая эквивалентность предиката P вводит разбиение множества A_1 на классы метамерных ситуаций. Тексты, смыслы которых совпадают, называются тождественными. Правая сопровождающая эквивалентность предиката P вводит разбиение множества A_2 на классы тождественых текстов. Множество всех ситуаций, согласующихся с данным текстом, может быть принято в качестве объективного эквивалента смысла данного текста.

Выводы

Идентификация интеллектуальной деятельности человека по данной схеме открывает путь к математическому описанию и искусственному воспроизведению таких важных для машинного интеллекта сторон разума как восприятие, понимание, узнавание и осознание. Ясно, что методы прямой идентификации в данном случае неприемлемы, поскольку образы ситуаций и смыслы текстов, являясь субъективными состояниями человека, в принципе недоступны прямому физическому измерению.

Список литературы: 1. *Мальцев А.И.* Алгебраиче-ские системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с. 2. *Кравков С.В.* Цветовое зрение. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 175 с. 3. *Нюберг Н.Д.* Грассмана законы // Физический энциклопе-ди-ческий словарь. Т. 1. – М.: Сов. энциклопедия, 1960. – С. 136. 4. *Рабкин Е.Б.* Атлас цветов. – М.: Медгиз, 1956. – 52 с. 5. *Ивахненко А.Г.* Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами. – К.: Техніка, 1975. – 311 с. 6. *Раутиан Г.Н.* Колориметричекие приборы. Спра-вочная книга оптика-механика. Ч. 1. – М.: ОНТИ, 1936. – 281 с. 7. *Курош А.Г.* Лекции по общей алгебре. – М.: Нау-ка, 1975. – 400 с. 8. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

Поступила в редколлегию 25.08.2008.

УДК 519.7

Про загальну теорію компараторної ідентифікації / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал – 2008. – № 2 (69). — С. 13-22.

У статті розвивається загальна теорія компараторної ідентифікації. Проаналізовано межі застосування методу компараторної ідентифікації. Розглянуто питання одиничності подання об'єкта при його компараторній ідентифікації та ізоморфізму моделей, що отримуються у результаті компараторної ідентифікації об'єктів. Узагальнено метод компараторної ідентифікації на випадок входів.

Іл. 3. Бібліогр.: 8 найм.

UDC 519.7

About comparator identification general theory / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2008. – № 2 (69). – P. 13-22.

In article the comparator identifications general theory is develops. The comparator identifications method application borders is analysed. The considered questions of uniqueness object representation at it comparator identification and isomorphism of models which turn out as a result comparator identifications of objects. The comparator identifications method on case of inputs is generalized.

Fig. 3. Ref.: 8 items.