УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ФОРМУЛ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Рассмотрены задачи построения нормальных форм формул алгебры конечных предикатов, показано, что между конечными предикатами и совершенными дизъюнктивными нормальными формами существует взаимно однозначное соответствие. Сформулирована теорема о конъюнктивном разложении, рассмотрена задача канонической минимизации формул алгебры конечных предикатов, методы дизъюнктивной и конъюнктивной минимизации.

ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, ПРЕДИКАТ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ДНФ, СДНФ, МИНИМИЗАЦИЯ ФОРМУЛ

Введение

Наличие тождеств в алгебре конечных предикатов свидетельствует о том, что один и тот же конечный предикат можно записать в виде различных формул. Значит, формул алгебры конечных предикатов больше, чем обозначаемых ими предикатов. Возникает задача: из множества всех формул выделить класс формул, называемых нормальными формами, чтобы в нем каждому предикату соответствовала только одна формула алгебры конечных предикатов. Выделим два таких класса формул: класс *совершенных дизъюнктивных нормальных форм* (*СДНФ*) и класс *совершенных конъюнктивных нормальных форм* (*СКНФ*).

1. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма

Вначале введем понятие совершенной дизъюнктивной нормальной формы. *Элементарной конъюнкцией* назовем любую конъюнкцию узнаваний различных буквенных переменных, взятых с произвольными фиксированными показателями. Наибольшее число множителей в элементарной конъюнкции равно n, наименьшее – нулю. В качестве элементарной конъюнкции, не имеющей в своем составе ни одного узнавания буквы, примем формулу 1. Примерами элементарных конъюнкций в алгебре конечных предикатов с алфавитом букв $A=\{a, b, c\}$ и алфавитом переменных $B=\{x_1, x_2, x_3\}$ могут служить формулы $x_1^a x_2^b$, $x_2^c x_3^b$, $x_1^b x_2^c x_3^c$. Элементарные конъюнкции, отличающиеся между собой только порядком конъюнктивных членов, будем считать одинаковыми, например, $x_1^b x_2^c x_3^c$ и $x_2^c x_1^b x_3^c$. Любую дизъюнкцию произвольного числа различных элементарных конъюнкций назовем *дизъюнктивной нормальной формой* (*ДНФ*). В качестве ДНФ, не содержащей ни одного дизъюнктивного члена, примем формулу 0. Примером ДНФ в той же алгебре может служить формула $x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^c x_3^c$.

Любая элементарная конъюнкция, в которой встречаются все переменные алгебры конечных предикатов, называется *конституэнтой единицы*. Условимся все узнавания в конституэнте единицы располагать в порядке возрастания номеров переменных. Примеры конституэнт единицы (в той же алгебре): $x_1^a x_2^a x_3^b$, $x_1^b x_2^c x_3^b$. В общем виде конституэнта единицы запишется следующим образом:

$$x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} \equiv \bigwedge_{i=1}^{n} x_i^{\sigma_i} .$$

Здесь $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ – некоторые фиксированные буквы алфавита A, знак $\bigwedge_{i=1}^{n}$ обозначает операцию логического перемножения n членов, i – индекс, изменяющийся в пределах от 1 до n, по которому ведется перемножение.

Присвоим каждой конституэнте единицы $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$ свой *номер*. Для этого составим n-разрядный k-ичный код $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$ из показателей ее узнаваний, рассматривая буквы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ алфавита A как k-ичные цифры 0, 1, ..., k-1. Число, соответствующее коду $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n$, будем считать номером данной конституэнты единицы. Например, номером конституэнты единицы $x_1^b x_2^a x_3^c$ служит число 11 (в десятичной записи), соответствующее троичному коду 102. Всего имеется k^n различных конституэнт единицы.

Любая дизъюнкция произвольного числа n различных конституэнт единицы называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (*СДНФ*). Мы будем отождествлять между собой все СДНФ, отличающиеся только порядком расположения конституэнт единицы. Конституэнты единицы условимся располагать в порядке возрастания их номеров. Пример СДНФ (в той же алгебре): $x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^b$. Общий вид СДНФ следующий:

$$x_1^{\sigma_{11}} x_2^{\sigma_{12}} \ldots x_n^{\sigma_{1n}} \vee x_1^{\sigma_{21}} x_2^{\sigma_{22}} \ldots x_n^{\sigma_{2n}} \vee \ldots \vee x_1^{\sigma_{m1}} x_2^{\sigma_{m2}} \ldots x_n^{\sigma_{mn}} \equiv$$

$$\equiv \bigvee_{i=1}^{m} x_1^{\sigma_{i1}} x_2^{\sigma_{i2}} \ldots x_n^{\sigma_{in}} \equiv \bigvee_{i=1}^{m} \bigwedge_{j=1}^{n} x_j^{\sigma_{ij}} .$$

Здесь σ_{ij} – некоторые фиксированные буквы алфавита A; знак $\bigvee_{i=1}^{m}$ обозначает операцию логического суммирования m членов; m – число конституэнт единицы в СДНФ; i, j – индексы, изменяющиеся в пределах соответственно от 1 до m и от 1 до n, по которым ведутся логическое суммирование и логическое перемножение.

Присвоим каждой СДНФ свой номер. Для этого каждой СДНФ поставим в соответствие некоторый двоичный код длины k^n. Длина кода совпадает с числом всех различных конституэнт единицы. Если в рассматриваемой СДНФ конституэнта единицы с номером i отсутствует, то в i-том разряде ее двоичного кода записываем 0, если присутствует, то записываем 1. Нумерацию разрядов двоичного кода в данном случае начинаем с нуля и ведем слева направо. Число, соответствующее полученному таким способом двоичному коду, будем считать номером СДНФ. В качестве СДНФ с номером 0 принимаем формулу 0. Например, номер СДНФ $x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^c$ в алгебре с алфавитами $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2\}$ будет число 136_{10} , соответствующее двоичному коду 010001000. Всего имеется 2^{kn} различных СДНФ, то есть ровно столько, сколько существует всех различных конечных предикатов. Вместе с тем, каждой формуле соответствует единственный конечный предикат, каждому же конечному предикату соответствует некоторая своя СДНФ. Следовательно, между конечными предикатами и совершенными дизъюнктивными нормальными формами существует взаимно однозначное соответствие.

Важно выяснить вопрос: можно ли с помощью приведенных выше тождеств преобразовать произвольную формулу алгебры конечных предикатов к СДНФ. Если да, то отсюда будет следовать, что система этих тождеств *полна*. Действительно, сравнивая между собой СДНФ двух формул, всегда можно, в силу единственности представления любого конечного предиката в виде СДНФ, решить вопрос о тождестве этих формул. Если СДНФ совпадают, то исходные формулы тождественны, если не совпадают, то они соответствуют различным предикатам. Такое преобразование существует. Следовательно, система тождеств (4) – (19) [1] алгебры конечных предикатов полна.

Ниже приводится описание алгоритма преобразования произвольной формулы к СДНФ. Алгоритм сопровождается примером: $A=\{a, b\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3\}$, требуется преобразовать к СДНФ формулу

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee (x_1^a \vee x_2^a)(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a).$$

1) Пользуясь тождествами (5), (7) и (8) [1], раскрываем в формуле все скобки:

$$f \equiv x_1^a(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee x_2^b(x_1^a \vee x_1^b x_3^a) \vee$$
$$\vee x_1^a(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a) \vee x_2^a(x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a) \equiv$$
$$\equiv (x_1^a \vee x_1^b x_3^a)x_1^a \vee (x_1^a \vee x_1^b x_3^a)x_2^b \vee (x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a)x_1^a \vee$$
$$\vee (x_2^b x_3^b \vee x_2^a x_3^a)x_2^a \equiv x_1^a x_1^a \vee x_1^b x_3^a x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_3^a x_2^b \vee$$
$$\vee x_2^b x_3^b x_1^a \vee x_2^a x_3^a x_1^a \vee x_2^b x_3^b x_2^a \vee x_2^a x_3^a x_2^a.$$

В результате получаем некоторую дизъюнкцию конъюнкций узнаваний предмета.

2) Пользуясь тождествами (4)-(7), (10), (11), (15), (17) и (19) [1], производим упрощения в формуле:

$$f \equiv x_1^a \vee 0 \cdot x_3^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee$$
$$\vee 0 \cdot x_3^b \vee x_2^a x_3^a \equiv x_1^a \vee 0 \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee 0 \vee x_2^a x_3^a \equiv x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee$$
$$\vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a.$$

В результате получаем некоторую дизъюнктивную нормальную формулу предиката.

3) Пользуясь тождествами (16) и (18) [1], во все конъюнкции вводим недостающие переменные:

$$f \equiv x_1^a(x_2^a \vee x_2^b)(x_3^a \vee x_3^b) \vee x_1^a x_2^b(x_3^a \vee x_3^b) \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee (x_1^a \vee x_1^b)x_2^a x_3^a.$$

4) Пользуясь тождествами (4)-(8) и (10) [1], снова раскрываем скобки и производим упрощения:

$$f \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^a x_3^a \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^b x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^a x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a.$$

В результате получаем искомую СДНФ.

От совершенной дизъюнктивной нормальной формы нетрудно перейти к таблице обозначаемого ею конечного предиката. Для этого нужно выделить в таблице все наборы значений аргументов, совпадающие с наборами показателей узнаваний букв конституэнт единицы, фигурирующих в СДНФ. Против выделенных наборов надо выписать значение предиката 1, против остальных наборов – значение 0. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2\}$. Предикат задан совершенной дизъюнктивной нормальной формой $t \equiv x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a$. Этому предикату соответствует табл. 1.

Таблица 1

x_1	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*
x_2	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
t	0	1	1	1	0	0	0	0	0

Для обратного перехода от таблицы значений конечного предиката к его СДНФ выделяем в таблице все те наборы аргументов, на которых этот предикат обращается в 1. Далее, для каждого такого набора выписываем соответствующую конституэнту единицы, принимая в ней показатели узнаваний букв в соответствии с этим набором. Наконец, все полученные таким способом конституэнты единицы соединяем знаками дизъюнкции. Рассмотрим пример. Предикат задан табл. 2.

Таблица 2

x_1	0	0	0	1	1	1	2	2	2
x_2	0	1	2	0	1	2	0	1	2
t	1	0	0	0	1	0	0	1	0

СДНФ этого предиката имеет вид:

$$x_1^0 x_2^0 \vee x_1^1 x_2^1 \vee x_1^2 x_2^1 \equiv t.$$

Заметим, что таблицу значений предиката можно легко построить также и по его произвольной дизъюнктивной нормальной форме. Для этого нужно выделить в таблице те наборы значений аргументов, в состав которых входят наборы показателей узнаваний элементарных конъюнкций ДНФ. Против выделенных наборов проставляем значения 1, против остальных наборов – значение 0. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{\alpha, \beta\}$, $B=\{x, y, z\}$. Предикат задан следующей ДНФ:

$$t \equiv x^\alpha y^\beta \vee x^\beta z^\alpha.$$

Ему соответствует табл. 3.

Таблица 3

x	α	α	α	α	β	β	β	β
y	α	α	β	β	α	α	β	β
z	α	β	α	β	α	β	α	β
t	0	0	1	1	1	0	1	0

В ряде случаев бывает полезно, отправляясь от задания конечного предиката в виде произвольной формулы алгебры конечных предикатов, получить какую-нибудь по возможности *экономную* ДНФ. С этой целью можно воспользоваться первыми двумя шагами описанного выше алгоритма приведения к СДНФ. Полученную ДНФ следует попытаться упростить, применяя первый закон поглощения (12) и первый закон идемпотентности (10) [1]. Подчеркнем, что по данному методу мы находим формулу, не обязательно простейшую среди всевозможных ДНФ. Однако она, как правило, оказывается не намного сложнее самой простой ДНФ. На отыскание такой экономной формулы затрачивается гораздо меньше усилий. Для примера произведем упрощение ДНФ, полученной на втором шаге в примере только что упомянутого алгоритма преобразования к СДНФ:

$$x_1^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_2^a x_3^a =$$
$$= x_1^a \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_2^a x_3^a.$$

В алгебре конечных предикатов имеет место важное утверждение, которое назовем *теоремой о разложении*. Можно сформулировать два варианта этой теоремы: *теорему о дизъюнктивном разложении* и *теорему о конъюнктивном разложении*. Сформулируем и докажем теорему о дизъюнктивном разложении. Теорему о конъюнктивном разложении рассмотрим несколько позже. Формулируется теорема о дизъюнктивном разложении следующим образом.

Любой конечный предикат $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ может быть представлен в виде

$$f(x_1, x_2,\dots, x_l, x_{l+1},\dots, x_n) \equiv$$
$$\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_l)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}\dots x_l^{\sigma_l} f(s_1, s_2,\dots, s_l, x_{l+1},\dots, x_n). \qquad (1)$$

Представление предиката $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ в виде правой части тождества (1) назовем его *дизъюнктивным разложением* по переменным $x_1, x_2,\dots, x_l$. Буквенные переменные $\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_l$ играют роль индексов при образовании многократной дизъюнкции. Запись $(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_l)$ под знаком дизъюнкции означает, что логическая сумма берется по всевозможным наборам индексов $\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_l$. Таким образом, в правой части тождества (1) присутствуют k^l дизъюнктивных членов.

Докажем теорему о дизъюнктивном разложении. Доказательство будем вести индукцией по k, l и n.

1. При $k=l=n=1$ равенство (1) принимает вид:

$$f(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1).$$

Оно является тождеством. Действительно, переменная x_1 принимает единственное возможное значение a_1, поэтому $f(x_1)\equiv f(a_1)$ и

$$\bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f(a_1) \equiv 1 \cdot f(a_1).$$

Таким образом, $k=l=n=1$, теорема о разложении справедлива.

2. Пусть $l=n=1$. Предположим, что при $k=t$ равенство (1) является тождеством и выведем отсюда, что при $k=t+1$ равенство (1) тоже будет тождеством. По индуктивному предположению имеем тождество

$$f(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1) \equiv$$
$$x_1^{a_1} f(a_1) \vee x_1^{a_2} f(a_2) \vee \dots \vee x_1^{a_t} f(a_t), \qquad (а)$$

которое является частным случаем тождества (1) при $l=n=1$ и $k=t$. Для каждого предиката $f(x_1)$ заданного на множестве $A_t=\{a_1, a_2,\dots, a_t\}$, построим два предиката: $f'(x_1)$ и $f''(x_1)$, определенных на множестве $A_{t+1}=\{a_1, a_2,\dots, a_t, a_{t+1}\}$, задавая их следующими условиями:

$$f'(x_1) = \begin{cases} 0, \text{если } x_1 = a_{t+1}, \\ f(x_1), \text{если } x_1 \neq a_{t+1}, \end{cases}$$

$$f''(x_1) = \begin{cases} 1, \text{если } x_1 = a_{t+1}, \\ f(x_1), \text{если } x_1 \neq a_{t+1}. \end{cases}$$

Докажем, что для указанных предикатов справедливо тождество (1), то есть:

$$f'(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f'(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f'(a_1) \vee x_1^{a_2} f'(a_2) \vee \dots$$
$$\dots \vee x_1^{a_t} f'(a_t) \vee x_1^{a_{t+1}} f'(a_{t+1}),$$

$$f''(x_1) \equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f''(\sigma_1) \equiv x_1^{a_1} f''(a_1) \vee x_1^{a_2} f''(a_2) \vee \dots$$
$$\dots \vee x_1^{a_t} f''(a_t) \vee x_1^{a_{t+1}} f''(a_{t+1}). \qquad (б)$$

Действительно, если $x_1 \neq a_{t+1}$, то $f'(x_1)\equiv f''(x_1)\equiv f(x_1)$ и $x_1^{a_{t+1}} \equiv 0$. В этом случае, согласно (а), равенства (б) обращаются в тождества. Если же $x_1=a_{t+1}$, то $f'(x_1)\equiv 0$, $f''(x_1)\equiv 1$, $x_1^{a_1} \equiv x_1^{a_2} \equiv \dots \equiv x_1^{a_t} \equiv 0$, $x_1^{a_{t+1}} \equiv 1$, $f'(a_{t+1})\equiv 0$,

$f''(a_{t+1})\equiv 1$, поэтому равенства (б) также обращаются в тождества типа $0\equiv 0$ или $1\equiv 1$. Заметим, что предикатами $f'(x_1)$ и $f''(x_1)$ исчерпывается класс возможных одноместных предикатов, заданных на множестве A_{t+1}. Таким образом, при $l=n=1$ теорема о разложении справедлива для любого k.

3. Пусть $l=1$ и k произвольным образом зафиксировано. Предположим, что при $n=t$ равенство (1) является тождеством, и выведем отсюда, что и при $n=t+1$ равенство (1) будет тождеством. По предположению, согласно (1), имеет место тождество

$$f(x_1, x_2,\dots, x_t)\equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,\dots, x_t).$$

Поэтому при любом a_i $(1\le i\le k)$

$$f(x_1, x_2,\dots, x_t, a_i)\equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,\dots, x_t, a_i).$$

Следовательно,

$$f(x_1, x_2,\dots, x_t, x_{t+1})\equiv \bigvee_{(\sigma_1)} x_1^{\sigma_1} f(\sigma_1, x_2,\dots, x_t, x_{t+1}).$$

Заметим, что предикатами, для которых справедливо записанное выше тождество, исчерпывается весь класс всевозможных $t+1$-местных предикатов. Таким образом, при $l=1$ теорема о разложении справедлива для любых k и n.

4. Пусть k и n произвольно фиксированы. Предположим, что при $l=t$ равенство (1) является тождеством, и выведем отсюда, что и при $l=t+1$, если $l\le n$, равенство (1) будет тождеством. По предположению, согласно (1), имеем тождество:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_t, x_{t+1},\dots, x_n)\equiv$$

$$\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}\dots x_t^{\sigma_t} f(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_t, x_{t+1},\dots, x_n).$$

Пользуясь им, а также результатом, полученным в пункте 3 настоящего доказательства, имеем:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_t, x_{t+1}, x_{t+2},\dots, x_n)\equiv$$

$$\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}\dots x_t^{\sigma_t} f(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_t, x_{t+1}, x_{t+2},\dots, x_n)\equiv$$

$$\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_t)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}\dots x_t^{\sigma_t} \Big(\bigvee_{(\sigma_{t+1})} x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_t, \sigma_{t+1},$$

$$x_{t+2},\dots, x_n)\Big)\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{t+1})} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}\dots x_{t+1}^{\sigma_{t+1}} f(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_{t+1}, x_{t+2},\dots, x_n).$$

Таким образом, теорема доказана для любых k, l, n.

Из теоремы о дизъюнктивном разложении вытекают следующие два *следствия*.

Следствие 1. *Любой конечный предикат $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ может быть представлен в виде*:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)\equiv x_1^{a_1} f(a_1, x_2,\dots, x_n)\vee x_1^{a_2} f(a_2, x_2,\dots,x_n)\vee\dots\vee x_1^{a_k} f(a_k, x_2,\dots, x_n). \qquad (2)$$

Следствие 2. *Любой конечный предикат $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ может быть представлен в виде*:

$$f(x_1, x_2,\dots, x_n)\equiv \bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}\dots x_n^{\sigma_n}. \qquad (3)$$

Тождества (2) и (3) получаем, полагая в (1) соответственно $l=1$ и $l=n$. Запись $f(\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_n)=1$ в (3) под знаком дизъюнкции означает, что логическое суммирование ведется только по тем наборам индексов $\sigma_1, \sigma_2,\dots, \sigma_n$, которые обращают предикат f в 1. Формула, стоящая в правой части тождества (3), представляет собой СДНФ предиката f. Если предикат f тождественно ложный, то, согласно теореме о дизъюнктивном разложении, в правой части тождества (3) нужно ставить 0.

Тождество (2) может быть использовано в качестве эффективного средства упрощения формул алгебры конечных предикатов. Рассмотрим пример такого упрощения. Пусть $A=\{a, b\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3,\}$. Требуется упростить формулу:

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv$$

$$\equiv(x_1^a\vee x_2^b)(x_1^a\vee x_1^b x_3^a)\vee(x_1^a\vee x_1^a)(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a).$$

Производим разложение функции f по переменной x_1:

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv x_1^a f(a, x_2, x_3)\vee x_1^b f(b, x_2, x_3),$$

$$f(a, x_2, x_3)\equiv(a^a\vee x_2^b)(a^a\vee a^b x_3^a)\vee(a^a\vee x_2^a)(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a)\equiv(1\vee x_2^b)(1\vee 0\cdot x_3^a)\vee(1\vee x_2^a)(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a)\equiv 1,$$

$$f(b, x_2, x_3)\equiv(b^a\vee x_2^b)(b^a\vee b^b x_3^a)\vee(b^a\vee x_2^a)(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a)\equiv x_2^b x_3^a\vee x_2^a(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a)\equiv x_2^b x_3^a\vee x_2^a x_3^a\equiv(x_2^a\vee x_2^b)x_3^a\equiv x_3^a.$$

Окончательно:

$$f\equiv x_1^a\vee x_1^b x_3^a\equiv(x_1^a\vee x_1^b)(x_1^a\vee x_3^a)\equiv x_1^a\vee x_3^a.$$

Из второго следствия теоремы о разложении вытекает полнота алгебры конечных предикатов: любой конечный предикат можно записать в виде формулы алгебры конечных предикатов. Тождество (3) можно использовать для получения СДНФ предиката, заданного какой-нибудь произвольно выбранной формулой алгебры конечных предикатов. Пример: $A=\{a, b\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3,\}$, дан предикат:

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv$$

$$\equiv(x_1^a\vee x_1^b)(x_1^a\vee x_1^b x_3^a)\vee(x_1^a\vee x_2^a)(x_2^b x_3^b\vee x_2^a x_3^a).$$

Требуется отыскать СДНФ указанного предиката. Имеем:

$$f(a, a, a)\equiv(a^a\vee a^b)(a^a\vee a^b a^a)\vee(a^a\vee a^a)(a^b a^b\vee a^a a^a)\equiv 1.$$

Аналогично находим: $f(a, a, b)\equiv 1$, $f(a, b, a)\equiv 1$, $f(a, b, b)\equiv 1$, $f(b, a, a)\equiv 1$, $f(b, a, b)\equiv 1$, $f(b, b, a)\equiv 1$, $f(b, b, b)\equiv 0$. СДНФ предиката f имеет вид:

$$f(x_1, x_2, x_3)\equiv x_1^a x_2^a x_3^a\vee x_1^a x_2^a x_3^b\vee x_1^a x_2^b x_3^a\vee x_1^a x_2^b x_3^b\vee x_1^b x_2^a x_3^a\vee x_1^b x_2^b x_3^a.$$

2. Совершенная конъюнктивная нормальная форма

Введем в алгебре конечных предикатов операцию отрицания. Введение отрицания позволит показать, что алгебра конечных предикатов есть булева алгебра. Кроме того, наличие операции отрицания даст возможность в ряде случаев записывать конечные предикаты в форме более компактных выражений, а также выполнять тождественные преобразования формул более коротким путем. Наконец, операция отрицания позволит естественным образом ввести понятие совершенной конъюнктивной нормальной формы и сформулировать теорему о конъюнктивном разложении предиката.

Операция отрицания предиката – это одноместная функция, заданная на множестве всех k-ичных n-местных предикатов со значениями в том же множестве. Если A – аргумент и B – значение операции отрицания, то условимся писать $(\neg A)=B$ или, в сокращенной форме $\overline{A}=B$. *Отрицанием предиката* $f(x_1, x_2,..., x_n)$ назовем предикат

$$g(x_1, x_2,..., x_n)\equiv \overline{f}\,(x_1, x_2,..., x_n),$$

принимающий значение 0 для всех тех наборов значений аргументов $(x_1, x_2,..., x_n)$, при которых $f(x_1, x_2,..., x_n)=1$, и принимающий значение 1 для всех тех наборов значений аргументов, при которых $f(x_1, x_2,..., x_n)=0$.

При $k\geq 2$ можно определить операцию отрицания аксиоматически, задав ее следующими тождествами:

$$\overline{A\vee B}\equiv \overline{A}\,\overline{B}\,, \tag{4}$$

$$\overline{A}\,\overline{B}\equiv \overline{A}\vee \overline{B}\,, \tag{5}$$

$$\overline{x^{a_i}}\equiv x^{a_1}\vee x^{a_2}\vee\ldots\vee x^{a_{i-1}}\vee x^{a_{i+1}}\vee\ldots\vee x^{a_k}\,. \tag{6}$$

Здесь A и B – произвольные формулы, x – произвольная буквенная переменная, a_i – произвольная буква алгебры конечных предикатов, индекс i принимает значения в пределах от 1 до k. Тождества (4) и (5) совпадают по форме с известными в алгебре логики *законами де Моргана*, которые, однако, применяются теперь не к булевым переменным, а к переменным предикатам. Тождество (6) назовем *законом отрицания*. Заметим, что при $k=1$ закон отрицания теряет смысл.

Справедливость законов де Моргана доказывается проверкой тождеств для всех возможных вариантов значений предикатов A и B. Например, убеждаемся при $A=0$ и $B=1$, что $\overline{0\vee 1}\equiv\overline{0}\cdot\overline{1}$ и $\overline{0\cdot 1}\equiv\overline{0}\vee\overline{1}$. Легко устанавливается также справедливость закона отрицания. Действительно, если $x=a_i$, то предикаты, стоящие слева и справа от знака тождества в (6), обращаются в 0, если же $x\neq a_i$, то оба предиката обращаются в 1.

Пользуясь приведенными ранее тождествами алгебры конечных предикатов, а также тождествами (4) – (6), можно доказать, что:

$$\overline{0}\equiv 1\,, \tag{7}$$

$$\overline{1}\equiv 0. \tag{8}$$

Действительно,

$$\overline{0}\equiv\overline{x^{a_1}x^{a_2}}\equiv\overline{x^{a_1}}\vee\overline{x^{a_2}}\equiv x^{a_2}\vee x^{a_3}\vee\ldots\vee x^{a_k}\vee x^{a_1}\vee x^{a_3}\vee$$
$$\vee\ldots\vee x^{a_k}\equiv 1,$$

$$\overline{1}\equiv\text{-}\,\overline{x^{a_1}\vee x^{a_2}\vee\ldots\vee x^{a_k}}\equiv\overline{x^{a_1}}\,\overline{x^{a_2}}\ldots\overline{x^{a_k}}\equiv$$

$$\equiv(x^{a_2}\vee x^{a_3}\vee\ldots\vee x^{a_k})(x^{a_1}\vee x^{a_3}\vee\ldots\vee x^{a_k})\ldots$$

$$\ldots(x^{a_1}\vee x^{a_2}\vee\vee\ldots\vee x^{a_{k-1}})\equiv 0.$$

Любая формула с отрицаниями может быть преобразована с помощью зависимостей (4) – (8) в тождественную ей формулу без отрицаний. Действительно, применяя многократно законы де Моргана, мы всегда сможем все знаки отрицания, стоящие над формулой или ее частями, опустить непосредственно на узнавания букв или на 0 и 1. Затем, пользуясь тождествами (6) – (8), исключаем отрицания из формулы. Рассмотрим пример исключения знаков отрицания из формулы. Пусть $A=\{a, b, c\}$. Тогда:

$$\overline{x_1^a\vee x_1^b x_2^c}\equiv\overline{x_1^a}\,\overline{x_1^b x_2^c}\equiv\overline{x_1^a}(\overline{x_1^b}\vee\overline{x_2^c})\equiv$$
$$\equiv(x_1{}^b\vee x_1{}^c)(x_1{}^a\vee x_1{}^c\vee x_2{}^a\vee x_2{}^b).$$

С помощью тождеств (4) – (6) совместно с перечисленными выше основными тождествами алгебры конечных предикатов можно решить вопрос о тождественности двух любых формул со знаками отрицания. Сначала исключаем из формул знаки отрицания, а затем приводим формулы к СДНФ. Отсюда следует, что система тождеств (4) – (6) полна, она совместно с тождествами (4) – (19) [1] аксиоматически определяет все свойства операции отрицания.

В ряде случаев процесс исключения знаков отрицания из формул существенно упрощается, если использовать следующие тождества:

$$x^{a_i}\,\overline{x^{a_j}}\equiv x^{a_i}\,, \tag{9}$$

$$x^{a_i}(\overline{x^{a_j}}\vee A)\equiv x^{a_i}\,. \tag{10}$$

Тождества справедливы при условии, что $i\neq j$, индексы i и j принимают значения в пределах от 1 до k. Буквой A обозначена произвольная формула алгебры конечных предикатов. Тождество (9) назовем *законом поглощения отрицания*, тождество (10) – *обобщенным законом поглощения отрицания*. Докажем справедливость тождества (10):

$$x^{a_i}(\overline{x^{a_j}}\vee A)\equiv x^{a_i}(x^{a_1}\vee x^{a_2}\vee\ldots\vee x^{a_i}\vee\ldots$$
$$\vee x^{a_{j-1}}\vee x^{a_{j+1}}\vee\ldots\vee x^{a_k}\vee A)\equiv x^{a_i}\vee x^{a_i}A\equiv x^{a_i}\,.$$

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение только что приведенных тождеств. Пусть $A=\{a, b, c\}$, требуется упростить формулу

$$f\equiv(\overline{x_1^a}\,\overline{x_1^b}\vee\overline{x_1^c}\vee\overline{x_2^a})\,x_1{}^b x_2{}^c,$$

предварительно исключив из нее отрицания. Применяя тождество (10), непосредственно получаем искомый результат $f \equiv x_1{}^b x_2{}^c$. Без использования законов поглощения отрицания тот же результат достигается более длинным путем:

$$f \equiv ((x_1{}^b \vee x_1{}^c)(x_1{}^a \vee x_1{}^c) \vee x_1{}^a \vee x_1{}^b \vee x_2{}^b \vee x_2{}^c) x_1{}^b x_2{}^c \equiv$$

$$\equiv (x_1{}^c \vee x_1{}^a \vee x_1{}^b \vee x_2{}^b \vee x_2{}^c) x_1{}^b x_2{}^c \equiv x_1{}^b x_2{}^c \vee x_1{}^b x_2{}^c \equiv x_1{}^b x_2{}^c.$$

Для операции отрицания также справедливы следующие тождества: *закон двойного отрицания*

$$\overline{\overline{A}} \equiv A\,, \tag{11}$$

закон исключенного третьего

$$A \vee \overline{A} \equiv 1, \tag{12}$$

закон противоречия

$$A\overline{A} \equiv 0. \tag{13}$$

Эти тождества по форме совпадают с одноименными законами алгебры логики. Тождества (11) – (13) можно получить из ранее выведенных тождеств.

Докажем справедливость закона двойного отрицания индукцией по длине формулы. Он выполняется для формул 0 и 1, а также для всевозможных узнаваний букв: $\overline{\overline{0}} \equiv \overline{1} \equiv 0$, $\overline{\overline{1}} \equiv \overline{0} \equiv 1$,

$$\overline{\overline{x^{a_i}}} \equiv \overline{x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \ldots \vee x^{a_k}} \equiv$$

$$\equiv \overline{x^{a_1}}\,\overline{x^{a_2}} \ldots \overline{x^{a_{i-1}}}\,\overline{x^{a_{i+1}}} \ldots \overline{x^{a_k}} \equiv$$

$$(x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_i} \vee \ldots \vee x^{a_k})(x^{a_1} \vee x^{a_3} \vee \ldots \vee$$

$$\vee x^{a_i} \vee \ldots \vee x^{a_k}) \ldots (x^{a_1} \vee \ldots \vee x^{a_i} \vee x^{a_{i+2}} \vee \ldots \vee$$

$$\vee x^{a_k}) \ldots (x^{a_1} \vee \ldots \vee x^{a_i} \vee \ldots \vee x^{a_{k-1}}) \equiv x^{a_i}.$$

Предположим, что закон двойного отрицания справедлив для формул A и B, и установим, что он выполняется также для формул $A \vee B$ и AB:

$$\overline{\overline{A \vee B}} \equiv \overline{\overline{A}\,\overline{B}} \equiv \overline{\overline{A}} \vee \overline{\overline{B}} \equiv A \vee B,$$

$$\overline{\overline{AB}} \equiv \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \equiv \overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{B}} \equiv AB.$$

Таким образом, закон двойного отрицания справедлив для всех формул.

Докажем тождество (12). Оно выполняется для формул 0 и 1, а также для всех узнаваний букв: $0 \vee \overline{0} \equiv 0 \vee 1 \equiv 1$, $1 \vee \overline{1} \equiv 1 \vee 0 \equiv 1$,

$$x^{a_i} \vee \overline{x^{a_i}} \equiv$$

$$\equiv x^{a_i} \vee x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \ldots \vee x^{a_k} \equiv 1.$$

Если тождество (40) справедливо для формул A и B, то оно справедливо и для формул $A \vee B$ и AB:

$$A \vee B \vee \overline{A \vee B} \equiv A \vee B \vee \overline{A}\ \overline{B} \equiv$$

$$\equiv (A \vee A)(A \vee \overline{B}) \vee (B \vee \overline{A})(B \vee \overline{B}) \equiv A \vee \overline{B} \vee B \vee \overline{A} \equiv 1,$$

$$AB \vee \overline{AB} \equiv AB \vee \overline{A} \vee \overline{B} \equiv (A \vee \overline{A})(B \vee \overline{A})(A \vee \overline{B})(B \vee \overline{B}) \equiv$$

$$\equiv B \vee \overline{A} \vee A \vee \overline{B} \equiv 1.$$

Аналогично доказывается закон противоречия.

Итак, мы видим, что в алгебре конечных предикатов наряду с операциями дизъюнкции и конъюнкции существует операция отрицания со всеми свойствами, которыми наделяет ее булева алгебра (тождества (4), (5), (7), (8), (11) – (13)). Поэтому алгебру конечных предикатов можно рассматривать как разновидность булевой алгебры. Основным множеством в ней служит система всех k-ичных n-местных предикатов с алфавитом букв $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ и алфавитом переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, роль нуля выполняет тождественно ложный предикат, роль единицы – тождественно истинный предикат, в роли базисных операций выступают дизъюнкция, конъюнкция и отрицание.

В качестве системы тождеств алгебры конечных предикатов, задающей в ней структуру булевой алгебры (и только эту структуру), можно использовать, к примеру, следующий набор аксиом [1]: (10), (4), (6), (8), (39), (32) и тождество:

$$(A \vee \overline{A})B \equiv B. \tag{14}$$

Подчеркнем еще раз, что алгебра конечных предикатов не есть только булева алгебра, она имеет и свои специфические тождества: закон истинности (18) [1], закон ложности (19) [1] и закон отрицания (6), не вытекающие из аксиом булевой алгебры.

Законы истинности и ложности можно записать в модифицированном виде без использования символов 0 и 1:

$$x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_k} \equiv A \vee \overline{A}\,, \tag{15}$$

$$x^{a_i}\ x^{a_i} \equiv A\overline{A}\,,\ (i \neq j) \tag{16}$$

Тождество (16) может быть выведено из тождеств булевой алгебры и тождеств (6), (15). Действительно, пусть $i \neq j$. Тогда:

$$x^{a_i}\ x^{a_j} \equiv \overline{\overline{x^{a_i} x^{a_j}}} \equiv \overline{\overline{x^{a_i}} \vee \overline{x^{a_j}}} \equiv$$

$$\equiv (\,x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_{i-1}} \vee x^{a_{i+1}} \vee \ldots \vee x^{a_k} \vee x^{a_1} \vee$$

$$\vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_{j-1}} \vee x^{a_{j+1}} \vee \ldots \vee x^{a_k}\,) \equiv (\,x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_k}\,) \equiv$$

$$\equiv \overline{A \vee \overline{A}} \equiv A\overline{A}.$$

Таким образом, при наличии операции отрицания, заданной аксиоматически тождествами (4)-(6), законы ложности можно исключить из числа аксиом алгебры конечных предикатов.

Заметим, что введение операции отрицания в алгебре конечных предикатов не расширяет ее выразительных возможностей. Ведь мы знаем, что алгебра конечных предикатов полна и без операции отрицания. Таким образом, введением операции отрицания достигается лишь консервативное расширение [3] алгебры конечных предикатов. В дальнейшем мы не раз будем вводить в алгебре конечных предикатов новые операции. Хотя они и не расширяют выразительных возможностей алгебры конечных предикатов, однако делают более гибким ее язык, повышают уровень его абстрактности.

Рассмотрим понятие *инверсного предиката*, которое нам понадобится при введении совершенной конъюнктивной нормальной формы. Предикат $g(x_1, x_2,..., x_n)$ назовем инверсным по отношению к предикату $f(x_1, x_2,..., x_n)$, если

$$g(x_1, x_2,..., x_n)\equiv \overline{f}\ (x_1, x_2,..., x_n).$$

Предикат, инверсный предикату f, будем записывать в виде f^*, так что:

$$f^*(x_1, x_2,..., x_n)\equiv \overline{f}\ (x_1, x_2,..., x_n). \qquad (17)$$

Таблица инверсного предиката может быть получена из таблицы исходного предиката заменой в ее последней строке значений предиката на обратные: 0 на 1 и 1 на 0. Для каждого предиката существует инверсный ему предикат. Предикат, инверсный инверсному предикату, совпадает с исходным предикатом:

$$f^{**}(x_1, x_2,..., x_n)\equiv f(x_1, x_2,..., x_n). \qquad (18)$$

Система предикатов, инверсных всевозможным предикатам, совпадает с системой всех предикатов (имеются в виду предикаты, соответствующие вполне определенным наборам множествам букв и переменных). По формуле, представляющей некоторый конечный предикат, нетрудно построить формулу для инверсного предиката. Для этого нужно в исходной формуле заменить все знаки конъюнкции знаками дизъюнкции, знаки дизъюнкции – знаками конъюнкции, знаки 0 – знаками 1 и знаки 1 – знаками 0. Следует также ввести знаки отрицания над теми узнаваниями букв, где они до этого отсутствовали, и исключить знаки отрицания у тех узнаваний букв, над которыми они прежде присутствовали. Например, пусть

$$f\equiv x_1^a x_2^b \vee \overline{x_3^c}\ ,$$

тогда

$$f^*\equiv (\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^b})x_3^c\,.$$

Рассмотрим теперь конъюнктивное разложение предиката. Для этого применим тождество (1) к предикату $f^*(x_1, x_2,..., x_n)$:

$$f^*(x_1, x_2,..., x_l, x_{l+1},..., x_n)\equiv$$

$$\equiv \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_l)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_l^{\sigma_l}\, f^*(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_l, x_{l+1},..., x_n).$$

Действуем отрицанием на левую и правую части полученного тождества, используя законы де Моргана и учитывая, что $\overline{f^*}\equiv f$. В результате приходим к *теореме о конъюнктивном разложении*, формулируемой следующим образом.

Любой конечный предикат $f(x_1, x_2,..., x_n)$ может быть представлен в виде:

$$f(x_1, x_2,..., x_l, x_{l+1},..., x_n)\equiv$$
$$\bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_l)} \overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee ... \vee \overline{x_l^{\sigma_l}} \qquad (19)$$
$$\vee f(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_l, x_{l+1},..., x_n)).$$

Представление предиката $f(x_1, x_2,..., x_n)$ в виде правой части тождества (19) назовем его *конъюнктивным разложением* по переменным $x_1, x_2,..., x_n$. Буквенные переменные $\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_l$ играют роль индексов при образовании многократной конъюнкции. Запись $(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_l)$ под знаком конъюнкции означает, что логическое перемножение ведется по всевозможным наборам индексов $\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_l$. Таким образом, в правой части тождества (19) присутствуют k^l конъюнктивных членов.

Из теоремы о конъюнктивном разложении вытекают следующие два *следствия*.

Следствие 1. *Любой конечный предикат $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ может быть представлен в виде*

$$f(x_1, x_2,..., x_n)\equiv (\overline{x_1^{a_1}} \vee f(a_1, x_2,..., x_n)) \wedge$$
$$\wedge(\overline{x_1^{a_2}} \vee f(a_2, x_2,..., x_n))...(\overline{x_1^{a_k}} \vee \qquad (20)$$
$$\vee f(a_k, x_2,..., x_n)).$$

Следствие 2. *Любой конечный предикат $f(x_1, x_2,..., x_n)$ может быть представлен в виде*

$$f(x_1, x_2,..., x_n)\equiv \bigvee_{f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)=0} (\overline{x_1^{\sigma_1}} \vee \overline{x_2^{\sigma_2}} \vee ... \vee \overline{x_n^{\sigma_n}}). \quad (21)$$

Тождества (20) и (21) находим, полагая в виде (19) соответственно l=1 и l=n. Запись $f(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_n)$=0 в (21) под знаком конъюнкции означает, что логическое перемножение ведется только по тем наборам индексов $(\sigma_1, \sigma_2,..., \sigma_l)$, которые обращают предикат f в 0. Если предикат f тождественно истинный, то, согласно теореме о конъюнктивном разложении, в правой части тождества (21) нужно ставить 1.

Представление предиката f в виде формулы, получаемой в результате исключения из первой части тождества (21) знаков отрицания с помощью законов отрицания, назовем *совершенной конъюнктивной нормальной формой* предиката f (*СКНФ*). Рассмотрим пример получения СКНФ предиката. Пусть A={a, b, c}, B={x_1, x_2}. Найти СКНФ предиката:

$$f(x_1, x_2)= x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^a\,.$$

Значения $f(\sigma_1, \sigma_2)$ равны 0 для всех наборов (σ_1, σ_2), кроме (a, b), (a, c) и (b, a). По формуле (49) находим:

$$f(x_1, x_2)\equiv (\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^a})(\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^b})(\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^c}) \wedge$$
$$\wedge(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^a})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^b})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^c}).$$

Избавляясь от отрицаний с помощью тождеств (34), выводим СКНФ предиката f:

$$f(x_1,x_2) = (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c) \wedge$$
$$\wedge(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c) \wedge$$
$$\wedge(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b).$$

Как известно, в алгебре логики понятия СДНФ и СКНФ двойственны друг другу. Это значит, что определение понятия СКНФ в алгебре логики может быть получено простой заменой в определении СДНФ слов “конъюнкция”, “дизъюнкция”, “истина”, “ложь” соответственно словами “дизъюнкция”, “конъюнкция”, “ложь”, “истина”. В алгебре конечных предикатов было бы неправильно определять СКНФ по аналогии с СДНФ как конъюнкцию таких дизъюнкций узнаваний букв, в которые каждая переменная входит по одному разу. На самом деле в конъюнктивные члены СКНФ каждая переменная входит k-1 раз. В алгебре конечных предикатов только при k=2 имеет место двойственность понятий СДНФ и СКНФ такого же типа, как и в алгебре логики.

Введем понятия элементарной дизъюнкции, конституэнты нуля и конъюнктивной нормальной формы. Эти понятия не являются двойственными понятиями элементарной конъюнкции, конституэнты единицы и ДНФ, как это имеет место в алгебре логики. *Элементарной дизъюнкцией* назовем такую дизъюнкцию узнаваний букв, в которую каждое узнавание буквы может входить не более одного раза и ни одна из переменных не может входить не более k-1 раз. Элементарной дизъюнкцией, не содержащей ни одного дизъюнктивного члена, будем считать формулу 0. Иными словами, никакая переменная не может быть представлена в элементарной дизъюнкции всеми своими узнаваниями, хотя бы одно из узнаваний должно отсутствовать. Примерами элементарных дизъюнкций при A={a, b, c}, B={x_1, x_2, x_3} могут служить формулы:

$$x_1^a \vee x_2^b;\; x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b;\; x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^a \vee x_3^c\,.$$

Формула

$$x_1^a \vee x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a$$

не является элементарной дизъюнкцией, так как в нее входят все узнавания буквы для переменной x_1. Такая формула выражает тождественно истинный предикат.

Любую конъюнкцию произвольного числа различных элементарных дизъюнкций назовем *конъюнктивной нормальной формой (КНФ)* предиката. В качестве КНФ не содержащей ни одного конъюнктивного члена, примем формулу 1. Пример КНФ:

$$(x_1^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b)(x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^a \vee x_3^c)\,.$$

Любую элементарную дизъюнкцию, в которой встречаются все переменные алгебры конечных предикатов, причем каждая из них входит k-1 раз в составе узнаваний букв с различным показателями, назовем *конституэнтой нуля*. Условимся в конституэнте нуля все узнавания букв располагать в порядке роста номеров переменных, а для одинаковых переменных – в порядке роста номеров букв, играющих роль показателей узнаваний буквы. Пример конституэнты нуля (в той же алгебре):

$$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^a \vee x_3^c\,.$$

Используя знак отрицания, можно записывать конституэнты нуля в более компактной форме, близкой к форме записи конституэнты единицы. Конституэнту нуля, приведенную в предыдущем примере, запишем так:

$$\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^a} \vee \overline{x_3^b}\,.$$

Последняя форма записи конституэнты нуля инверсна форме записи конституэнты единицы: в ней вместо знаков конъюнкции стоят знаки дизъюнкции, а над узнаваниями букв появились знаки отрицания.

Теперь мы можем дать еще одно, равносильное первому, определение *совершенной конъюнктивной нормальной формы* как конъюнкции произвольного числа различных конституэнт нуля. Осуществляя нумерацию конституэнт нуля и СКНФ, можно показать, что каждому k-ичному n-местному предикату соответствует одна СКНФ. В качестве СКНФ тождественно истинного предиката принимаем формулу 1.

Кроме конъюнкции и дизъюнкции предикатов, рассмотренных ранее, введем в алгебре конечных предикатов еще одну двухместную операцию – *импликацию предикатов* $\supset$, определив ее следующим равенством:

$$A \supset B \underset{def}{\equiv} \overline{A} \vee B\,. \tag{22}$$

Буквы A и B обозначают произвольные формулы алгебры конечных предикатов. Знак $\underset{def}{\equiv}$ обозначает равенство предикатов по определению. Операцию $\supset$ будем считать младшей по отношению к операциям $\wedge$ и $\vee$. Это значит, что при отсутствии в формуле скобок, регулирующих порядок выполнения операций, операция импликации должна выполнятся после выполнения операций конъюнкции и дизъюнкции.

Свойства импликации предикатов совпадают со свойствами импликации высказываний [3]. Выпишем наиболее важные из них – *рефлексивность импликации*:

$$A \supset A \equiv 1, \tag{23}$$

транзитивность импликации:

$$(A \supset B)(B \supset C) \supset (A \supset C) \equiv 1, \tag{24}$$

свойства логических констант:

$$0 \supset A \equiv 1, \tag{25}$$

$$1 \supset A \equiv A, \tag{26}$$

$$A \supset 0 \equiv \overline{A}\,, \tag{27}$$

$$A \supset 1 \equiv 1, \tag{28}$$

закон дедукции:

$$A(A \supset B) \supset B \equiv 1, \tag{29}$$

закон контрапозиции:

$$A \supset B \equiv \overline{B} \supset \overline{A}, \quad (30)$$

закон импортации:

$$(A \supset (B \supset C)) \supset (AB \supset C) \equiv 1, \quad (31)$$

закон экспортации:

$$(AB \supset C) \supset (A \supset (B \supset C)) \equiv 1, \quad (32)$$

закон приведения к абсурду:

$$A\overline{A} \supset B \equiv 1. \quad (33)$$

Используя операцию импликации, тождество (19) можно записать без знаков отрицания:

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_n) \equiv \\ \equiv \bigwedge_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_l^{\sigma_l} \supset \\ \supset f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l, x_{l+1}, \ldots, x_n)). \end{gathered} \quad (34)$$

В соответствии с этим первое и второе следствия теоремы о конъюнктивном разложении запишутся в виде:

$$\begin{gathered} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \\ \equiv (x_1^{a_1} \supset f(a_1, x_2, \ldots, x_n)) \wedge \\ \wedge (x_1^{a_2} \supset f(a_2, x_2, \ldots, x_n)) \wedge \ldots \\ \wedge (x_1^{a_k} \supset f(a_k, x_2, \ldots, x_n)). \end{gathered} \quad (35)$$

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv (\bigwedge_{f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)=0} (x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} \supset 0). \quad (36)$$

Последнее тождество называется *импликативным разложением предиката*. Оно показывает, что любой конечный предикат может быть представлен в виде суперпозиции операций конъюнкции и импликации, действующих на всевозможные узнавания букв, и на тождественно ложный предикат 0. Вместе с тем, как указывалось выше, при $k \geq 2$ предикат 0 можно выразить в виде конъюнкции некоторых узнаваний букв, например, $x_1^{a_1} x_1^{a_2} = 0$. Таким образом, мы приходим к еще одной полной алгебре конечных предикатов. Ее базис составляют операции конъюнкции и импликации и всевозможные узнавания букв. Чтобы иметь возможность различать обе введенные алгебры, первую назовем *дизъюнктивной алгеброй конечных предикатов*, а вторую – *импликативной*. Импликативная алгебра может быть получена из дизъюнктивной заменой в ее базисе операции дизъюнкции операцией импликации, и наоборот. Кроме двух найденных, существует множество других алгебр конечных предикатов. В частности, любой набор операций, удовлетворяющий условиям теоремы Поста [4], вместе со всевозможными узнаваниями букв можно принять в качестве базиса полной алгебры конечных предикатов. В роли полной системы элементарных операций также подходит любая система операций, через которые выражаются операции конъюнкции и дизъюнкции или операции конъюнкции и импликации. По-видимому, существуют и другие базисы, задающие полные алгебры конечных предикатов. Еще предстоит сформулировать критерий полноты для алгебр конечных предикатов.

В данной статье в качестве языка для записи конечных предикатов принята дизъюнктивная алгебра и различные ее консервативные расширения. Удобство дизъюнктивной алгебры конечных предикатов состоит в том, что на ее языке кратко и изящно записываются законы истинности и ложности. Эти законы в любой алгебре конечных предикатов будут играть особую роль. По существу, они представляют собой требования, выполнение которых необходимо и достаточно для корректного введения переменных на конечных множествах. Закон истинности задает область изменения переменной, а закон ложности обеспечивает попарное различие всех элементов множества, на котором заданна переменная. В любой другой алгебре законы истинности и ложности будут записываться в виде гораздо более громоздких выражений. В дальнейшем дизъюнктивную алгебру и ее консервативные расширения будем называть просто *алгеброй конечных предикатов*.

3. Дизъюнктивная минимизация формул алгебры предикатов

Существует целое множество дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм, соответствующих одному и тому же конечному предикату. Представляет интерес следующая задача: выбрать из этого множества такую форму, в которую входит наименьшее число узнаваний букв. Назовем эту задачу *канонической задачей минимизации* формул алгебры конечных предикатов. Умение минимизировать формулы, как будет показано ниже, полезно при решении уравнений теории интеллекта, а также при построении схем, реализующих функции интеллекта. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы, получаемые в результате канонической минимизации, назовем *минимальными ДНФ и КНФ*. Проблема канонической минимизации в алгебре конечных предикатов имеет много общего с одноименной проблемой в алгебре логики. Все излагаемые в этой статье методы можно рассматривать как обобщение известных в алгебре логики методов канонической минимизации [5]:

а) ***Отыскание минимальной дизъюнктивной нормальной формы.*** Здесь мы наметим последовательность действий, которые должны быть выполнены при нахождении минимальной ДНФ. Предикат g назовем *импликантой предиката f*, если на любом наборе значений аргументов, для которого g=1, имеем также f=1. Будем говорить, что импликанта g накрывает своими единицами единицы предиката f. Элементарную конъюнкцию g назовем *собственной частью* элементарной конъюнкции f, если g может быть получена из f выбрасыванием некоторых узнаваний букв. Например, элементарная конъюнкция $x_1^a x_3^b$ есть собственная часть элементарной конъюнкции $x_1^a x_2^c x_3^b$. Назовем *простой импликантой* предиката f любую элементарную конъюнкцию, обладающую следующими свойствами: она есть импликанта предиката f и никакая ее собственная часть не является импликантой предиката f.

Дизъюнкция любого числа импликант конечного предиката есть импликанта этого предиката. Систему S импликант конечного предиката f назовем *полной*, если любая единица из таблицы значений предиката f накрывается единицами хотя бы одной импликанты системы S. Тому или иному конечному предикату может соответствовать, вообще говоря, несколько различных полных систем импликант. Дизъюнкция всех импликант полной системы импликант каждого конечного предиката выражает собой этот предикат. Система всех простых импликант любого конечного предиката является его полной системой. Дизъюнкция всех простых импликант конечного предиката выражает собой этот предикат; назовем ее *сокращенной дизъюнктивной нормальной формой* данного конечного предиката.

Во многих случаях (однако далеко не всегда) сокращенная дизъюнктивная нормальная форма представляет собой более экономное средство записи конечных предикатов, чем СДНФ. Однако сокращенная форма, как правило, не совпадает с минимальной дизъюнктивной нормальной формой, сложнее ее. *Дизъюнктивным ядром* конечного предиката назовем множество всех таких его простых импликант, исключение каждой из которых из системы всех простых импликант делает эту систему неполной. Элементы дизъюнктивного ядра входят в состав любой полной системы простых импликант. Систему простых импликант конечного предиката назовем *приведенной*, если она полна и никакое ее собственное подмножество не является полной системой. Дизъюнкцию всех простых импликант приведенной системы назовем *тупиковой дизъюнктивной нормальной формой* предиката. Отметим, что предикат может иметь много тупиковых дизъюнктивных нормальных форм.

Любая минимальная дизъюнктивная нормальная форма является, вместе с тем, и тупиковой ДНФ. Многие конечные предикаты имеют несколько различных минимальных ДНФ, содержащих одинаковое число узнаваний букв. Выбирая из числа тупиковых ДНФ одну с наименьшим числом узнаваний букв, получаем минимальную ДНФ предиката. Сформулированные понятия и положения позволяют наметить ход действий, лежащих в основе всех описываемых ниже методов минимизации формул алгебры конечных предикатов. Вначале нужно отыскать все простые импликанты заданного конечного предиката и составить из них сокращенную ДНФ. Затем следует найти все тупиковые ДНФ и из их числа выбрать минимальную дизъюнктивную нормальную форму конечного предиката.

Ниже рассматриваются три алгоритма минимизации формул алгебры конечных предикатов. Алгоритмы сопровождаются примерами. В частном случае при k=2 они превращаются в известные алгоритмы канонической минимизации формул алгебры логики Квайна-Мак-Класки, Порецкого-Блейка и Нельсона [6].

б) ***Обобщение метода Квайна-Мак-Класки.*** Рассмотрим метод дизъюнктивной минимизации формул алгебры конечных предикатов, обобщающий известный метод Квайна-Мак-Класки минимизации формул алгебры логики. Исходной информацией при минимизации служит совершенная дизъюнктивная нормальная форма предиката, для которого отыскивается минимальная ДНФ. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3\}$. Предикат задан следующей СДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee x_1^a x_2^c x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee$$
$$x_1^b x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c \vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^c x_2^b x_3^b \vee$$
$$\vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c.$$

Ниже описывается алгоритм минимизации, включающий в себя 9 шагов.

1) Всюду, где это возможно, применяем *операцию неполного дизъюнктивного склеивания*, основанную на тождестве:

$$\begin{aligned} &Ax^{a_1} \vee Ax^{a_2} \vee \ldots \vee Ax^{a_k} \equiv \\ &\equiv Ax^{a_1} \vee Ax^{a_2} \vee \ldots \vee Ax^{a_k} \vee A. \end{aligned} \tag{37}$$

Здесь A – некоторая элементарная конъюнкция, x – одна из буквенных переменных. Операция неполного дизъюнктивного склеивания состоит в дописывании к исходной ДНФ в виде дополнительных дизъюнктивных членов всевозможных элементарных конъюнкций, которые можно получить переходом от левой части тождества (37) к правой. Операцию неполного дизъюнктивного склеивания сперва применяем к конституэнтам единицы исходной СДНФ, затем – к элементарным конъюнкциям, состоящим из n-1 узнаваний букв, n-2 узнаваний букв и т.д. и, наконец, к элементарным конъюнкциям, состоящим из одного узнавания буквы. В нашем примере имеем:

$$f \equiv x_1^a x_2^a x_3^a \vee x_1^a x_2^a x_3^b \vee x_1^a x_2^a x_3^c \vee x_1^a x_2^b x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^c x_3^b \vee x_1^a x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_2^b x_3^a \vee x_1^b x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b x_3^c \vee$$
$$\vee x_1^c x_2^a x_3^b \vee x_1^c x_2^b x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c \vee x_1^a x_2^a \vee$$
$$\vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^a x_3^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_2^b x_3^b.$$

2) Применяем к дизъюнктивным членам полученной формулы всюду, где возможно, операцию элементарного дизъюнктивного поглощения

$$Ax^{\sigma} \vee A \equiv A, \qquad (38)$$

где x^{σ} – некоторый предикат узнавания буквы. В результате получаем сокращенную ДНФ. В примере имеем:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_3^b \vee x_1^a x_2^c \vee x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c.$$

3) Составляем импликантную таблицу. *Импликантная таблица* конечного предиката f представляет собой матрицу, строки которой обозначены всевозможными простыми импликантами предиката f, а столбцы – конституэнтами единицы того же предиката. Каждая ячейка таблицы соответствует паре предикатов, один из них представлен конституэнтой единицы, другой – некоторой элементарной конъюнкцией. Если элементарная конъюнкция, соответствующая некоторой строке таблицы, является импликантой для конституэнты единицы, соответствующей некоторому столбцу, то в ячейку, образуемую пересечением строки и столбца, заносим звездочку, в противном случае ячейку оставляем незаполненной. Импликантная таблица, получаемая в примере, представлена в табл. 7.

Таблица 7

Простая импликанта	$x_1^a x_2^a x_3^a$	$x_1^a x_2^a x_3^c$	$x_1^a x_2^a x_3^c$	$x_1^a x_2^b x_3^b$	$x_1^a x_2^c x_3^a$	$x_1^a x_2^c x_3^b$	$x_1^a x_2^c x_3^c$	$x_1^b x_2^b x_3^a$	$x_1^b x_2^b x_3^b$	$x_1^b x_2^b x_3^c$	$x_1^c x_2^a x_3^b$	$x_1^c x_2^b x_3^b$	$x_1^c x_2^c x_3^b$	$x_1^c x_2^c x_3^c$
$x_1^a x_2^a$	*	*	*											
$x_1^a x_3^b$		*		*		*								
$x_1^a x_2^c$					*	*	*							
$x_2^b x_3^b$				*					*			*		
$x_1^b x_2^b$								*	*	*				
$x_1^c x_3^b$											*	*	*	
$x_1^c x_2^c x_3^c$														*

4) По импликантной таблице находим дизъюнктивное ядро предиката, для чего находим те столбцы таблицы, в которых содержится по одной звездочке. Соответствующие звездочкам простые импликанты образуют дизъюнктивное ядро предиката. В примере дизъюнктивное ядро предиката представляет собой следующее множество:

$$\{x_1^a x_2^a, x_1^a x_2^c, x_1^b x_2^b, x_1^c x_3^b, x_1^c x_2^c x_3^c\}.$$

5) По импликантной таблице отыскиваем систему всех конституэнт единицы предиката, которые не накрываются единицами его дизъюнктивного ядра. С этой целью отмечаем все столбцы, в которых содержатся звездочки, соответствующие простым импликантам, вошедшим в состав дизъюнктивного ядра. Столбцы, оставшиеся неотмеченными, соответствуют искомым конституэнтам единицы. В нашем примере разыскиваемая система имеет в своем составе единственную конституэнту единицу $\{x_1^a x_2^b x_3^b\}$.

6) По импликантной таблице методом полного перебора отыскиваем все приведенные системы простых импликант, накрывающих своими единицами все конституэнты единицы системы, найденной на пятом шаге алгоритма. В примере имеем две такие системы: $\{x_1^a x_3^b\}$, $\{x_2^b x_3^b\}$, каждая из которых состоит из одной конституэнты единицы.

7) Объединяя дизъюнктивное ядро предиката с каждой из систем, полученных на шестом шаге алгоритма, формируем все приведенные системы простых импликант предиката. В нашем примере имеем две системы:

$$\{x_1^a x_2^a, x_1^a x_2^c, x_1^b x_2^b, x_1^c x_3^b, x_1^c x_2^c x_3^c, x_1^a x_3^b\},$$

$$\{x_1^a x_2^a, x_1^a x_2^c, x_1^b x_2^b, x_1^c x_3^b, x_1^c x_2^c x_3^c, x_2^b x_3^b\}.$$

8) Строим все тупиковые ДНФ предиката. В примере имеем две такие формы:

$$x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c \vee x_1^a x_3^b,$$

$$x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^c \vee x_1^b x_2^b \vee x_1^c x_3^b \vee x_1^c x_2^c x_3^c \vee x_1^b x_3^b.$$

9) Из числа тупиковых ДНФ выбираем минимальную ДНФ, имеющую наименьшее число узнаваний букв. В нашем примере обе тупиковые ДНФ имеют одинаковое число узнаваний букв — 13, любая из них может быть принята в качестве минимальной ДНФ. Исходная СДНФ предиката f имеет 42 узнавания буквы. В результате минимизации число узнаваний букв в формуле сократилось более чем в три раза.

в) ***Обобщение методов Порецкого-Блейка и Нельсона.*** Ниже приводится описание алгоритма минимизации формул алгебры конечных предикатов, обобщающего алгоритм Порецкого-Блейка дизъюнктивной минимизации формул алгебры логики. Исходной информацией при минимизации для этого алгоритма служит произвольно выбранная ДНФ предиката, для которого отыскивается минимальная ДНФ. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$. Предикат f задан следующей ДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^a.$$

1) Применяем к дизъюнктивным членам исходной ДНФ всюду, где возможно, *операцию группировки узнаваний букв*:

$$Ax^{\sigma_1} \vee Ax^{\sigma_2} \vee \ldots \vee Ax^{\sigma_r} \equiv A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}). \quad (39)$$

Указанная операция не используется в методе Порецкого-Блейка при минимизации формул алгебры логики, она становится необходимой только в алгебре конечных предикатов при дизъюнктивной минимизации в случае, когда $k>2$. В результате выполнения операции группировки узнавания букв получаем дизъюнкцию некоторых скобочных форм. В нашем примере:

$$f \equiv (x_1^a)x_2^a \vee (x_1^a)x_2^b \vee (x_1^a)x_3^a \vee (x_1^b \vee x_1^c)x_2^c x_3^a \vee$$
$$\vee x_1^a(x_2^a \vee x_2^b) \vee x_1^b(x_2^c)x_3^a \vee x_1^c(x_2^c)x_3^a \vee x_1^a(x_3^a) \vee$$
$$\vee x_1^b x_2^c(x_3^a) \vee x_1^c x_2^c(x_3^a).$$

2) К скобочным формам всюду, где возможно, применяем *операцию обобщенного дизъюнктивного склеивания*, основанную на использовании тождества:

$$A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \equiv \equiv A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \vee AB. \quad (40)$$

Это тождество справедливо лишь в том случае, когда множество $\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s\}$совпадает с алфавитом A, причем в записи множества допускаются повторения букв. Результатом операции обобщенного дизъюнктивного склеивания является множество всех ненулевых конъюнкций вида AB. В нашем примере получаем множество, состоящее из единственного произведения $\{x_2{}^c x_3{}^a\}$. Заметим, что тождество (40), лежащее в основе операции обобщенного дизъюнктивного склеивания в алгебре конечных предикатов, выглядит сложнее, чем соответствующее тождество в алгебре логики. В частном случае при k=2 тождество (40) переходит в известное тождество алгебры логики: $Ax \vee B\bar{x} \equiv Ax \vee B\bar{x} \vee AB$, используемое в алгоритме Порецкого-Блейка. Докажем справедливость тождества (40):

$$A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \equiv \equiv A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee AB(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \vee AB(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \equiv AB(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \vee \vee A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \equiv AB(x^{a_1} \vee \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_k}) \vee A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}) \equiv AB \vee A(x^{\sigma_1} \vee x^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x^{\sigma_r}) \vee \vee B(x^{\sigma_{r+1}} \vee x^{\sigma_{r+2}} \vee \ldots \vee x^{\sigma_s}).$$

3) Исходную ДНФ пополняем дизъюнктивными членами из системы, полученной на втором шаге алгоритма. В нашем примере имеем:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_1^b x_2^c x_3^a \vee x_1^c x_2^c x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

4) Применяем всюду, где только возможно, *операцию дизъюнктивного поглощения* $A \vee AB \equiv A$. В результате выполнения этого шага алгоритма получаем сокращенную ДНФ конечного предиката. В примере сокращенная ДНФ имеет вид:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

5) От сокращенной ДНФ переходим к минимальной ДНФ по методу, описанному в пункте б). В примере получаем следующую минимальную ДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a.$$

Переходим к описанию алгоритма минимизации формул алгебры конечных предикатов, обобщающего метод Нельсона минимизации формул алгебры логики. Исходной информацией при минимизации для этого алгоритма служит произвольно выбранная КНФ предиката, для которой отыскивается минимальная ДНФ. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3\}$. Предикат f задан следующей КНФ:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

1) Раскрываем скобки и уничтожаем все нулевые дизъюнктивные члены. В примере получаем:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_1^a x_3^a \vee x_2^c x_3^a.$$

2) Применяем операцию дизъюнктивного поглощения. В результате получаем сокращенную ДНФ. В нашем примере применение операции дизъюнктивного поглощения не приводит к упрощениям, поэтому формула, выведенная на первом шаге алгоритма, есть сокращенная ДНФ.

3) По методу, описанному в пункте б), переходим от сокращенной ДНФ к минимальной ДНФ, которая в примере равна:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a.$$

Отметим, что в рассмотренном примере исходная КНФ предиката f имеет пять узнаваний букв, это меньше, чем в минимальной ДНФ, где их шесть. Этим примером демонстрируется важность задачи отыскания минимальной КНФ в алгебре конечных предикатов. Решение указанной задачи излагается в следующем пункте.

4. Конъюнктивная минимизация формул алгебры предикатов

г) ***Отыскание минимальной конъюнктивной нормальной формы.*** В алгебре логики имеет место принцип двойственности, в силу которого методы отыскания минимальной КНФ оказываются совершенно аналогичными методам отыскания минимальной ДНФ. В алгебре конечных предикатов при k>2 положение иное. Здесь мы лишены принципа двойственности, он теперь утрачивает силу, операции конъюнкции и дизъюнкции теперь уже не равноправны. Поэтому методы конъюнктивной минимизации должны рассматривается специально, здесь нельзя обойтись ссылкой на аналогию с методами дизъюнктивной минимизации.

Предикат g назовем *имплицентой* предиката f, если на любом наборе значений аргументов, для которого g=0, имеем также f=0. Будем говорить, что имплицента g накрывает своими нулями нули предиката f. Элементарную дизъюнкцию g назовем *собственной частью* элементарной дизъюнкции f, если g может быть получена из f выбрасыванием некоторых узнаваний букв. Например, элементарная дизъюнкция $x_1^a \vee x_1^b \vee x_3^c$ есть собственная часть элементарной дизъюнкции $x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^c \vee x_3^c$.

Назовем *простой имплицентой* предиката f любую элементарную дизъюнкцию, обладающую следующими свойствами: она является имплицентой предиката f и никакая ее собственнная часть не является имплицентой предиката f.

Конъюнкция любого числа имплицент конечного предиката является имплицентой этого предиката. Систему S имплицент конечного предиката f назовем *полной*, если любой нуль из таблицы значений предиката f накрывается нулями хотя бы одной имплиценты системы S. Тому или иному конечному предикату может соответствовать, вообще говоря, несколько различных полных систем имплицент. Конъюнкция всех имплицент полной системы имплицент некоторого конечного предиката выражает собой этот предикат. Система всех простых имплицент любого конечного предиката есть его полная система. Конъюнкция всех простых имплицент конечного предиката выражает собой этот предикат, назовем ее *сокращенной* КНФ данного конечного предиката.

Конъюнктивным ядром конечного предиката назовем множество всех таких его простых имплицент, исключение каждой из которых из системы всех простых имплицент делает систему неполной. Элементы конъюнктивного ядра входят в состав любой полной системы простых имплицент. Систему простых имплицент конечного предиката назовем *приведенной*, если она полна и никакое ее собственное подмножество не является полной системой. Конъюнкцию всех простых имплицент приведенной системы назовем *тупиковой конъюнктивной нормальной формой* предиката. Выбирая из числа тупиковых КНФ одну с наименьшим числом узнаваний, получаем минимальную КНФ.

Рассмотрим метод конъюнктивной минимизации формул алгебры конечных предикатов, *обобщающий* метод Квайна-Мак-Класки. Исходной информацией при минимизации служит СКНФ предиката, для которого отыскивается минимальная КНФ. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3\}$. Предикат задан следующей СКНФ:

$$f \equiv (\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^a} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^a} \vee \overline{x_2^b} \vee \overline{x_3^a}) \wedge$$
$$\wedge(\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^a} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^b} \vee \overline{x_2^b} \vee \overline{x_3^a})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^c} \vee \overline{x_3^a}) \wedge$$
$$\wedge(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^c} \vee \overline{x_3^b})(\overline{x_1^c} \vee \overline{x_2^c} \vee \overline{x_3^c}).$$

СКНФ представлена в сокращенной записи с использованием знаков отрицания. Последующей обработке подвергается сама СКНФ, а не ее сокращенная запись.

Ниже описывается алгоритм минимизации:

1) Всюду, где это возможно, применяем *операцию неполного конъюнктивного склеивания*, основанного на тождестве

$$(A \vee x^{a_i})(A \vee x^{a_j}) \equiv (A \vee x^{a_i})(A \vee x^{a_j})A\,, \qquad (41)$$

которое справедливо при условии $i \neq j$. Операция неполного конъюнктивного склеивания состоит в дописывании в исходной КНФ в виде дополнительных конъюнктивных членов всевозможных элементарных дизъюнкций A. Последние можно получить переходом от левой части тождества (40) к правой. Операцию неполного конъюнктивного склеивания сначала применяем к конституэнтам нуля исходной СКНФ, затем — к элементарным дизъюнкциям, состоящим из $n(k$-1)-1 узнаваний букв, $n(k$-1)-2 узнаваний букв и т.д., наконец, к элементарным дизъюнкциям, состоящим из одного узнавания буквы. В нашем примере имеем

$$f \equiv (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c \vee x_3^b \vee$$
$$\vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c \vee x_3^b \vee$$
$$\vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a \vee$$
$$\vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a \vee x_3^b)(x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee$$
$$\vee x_3^c)(x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c) \wedge$$
$$\wedge(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a) \wedge$$
$$\wedge(x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)\,.$$

2) Применяем к конъюнктивным членам полученной формулы *операцию элементарного конъюнктивного поглощения*:

$$(A \vee x^{\sigma})A \equiv A\,. \qquad (42)$$

В результате получаем сокращенную КНФ. В нашем примере имеем:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^c \vee x_2^c \vee x_3^b \vee x_3^c).$$

В примере сокращенная КНФ совпадает с минимальной КНФ. В более сложных случаях процесс минимизации продолжатся.

3) Составляем *имплицентную таблицу*. Имплицентная таблица конечного предиката f представляет собой матрицу, строки которой обозначены всевозможными простыми имплицентами предиката f, а столбцы — конституэнтами нуля того же предиката. Каждая ячейка таблицы соответствует паре предикатов, один из которых представлен конституэнтой нуля, другой — некоторой элементарной дизъюнкцией. Если элементарная дизъюнкция, соответствующая некоторой строке таблицы, является имплицентой для конституэнты нуля, соответствующей некоторому столбцу, то в ячейку, образуемую пересечением строки и столбца, заносим звездочку, в противном случае ячейку оставляем незаполненной.

4) По имплицентной таблице находим конъюктивное ядро предиката. Для этого находим те столбцы таблицы, в которых содержится только по одной звездочке. Соответствующие звездочкам простые имплиценты образуют конъюнктивное ядро предиката.

5) По имплицентной таблице отыскиваем систему всех простых конституэнт нуля предиката, которые не накрываются нулями его конъюнктивного ядра. С этой целью отмечаем все столбцы, в которых содержатся звездочки, соответствующие простым имплицентам, вошедшие в состав конъюнктивного ядра. Столбцы, оставшиеся неотмеченными, соответствуют искомым конституэнтам единицы.

6) По имплицентной таблице методом полного перебора отыскиваем все приведенные системы простых имплицент, накрывающих своими нулями все конституэнты нуля системы, найденной на пятом шаге алгоритма.

7) Объединяя конъюнктивное ядро предиката с каждой из систем, полученных на шестом шаге алгоритма, формируем все приведенные системы простых имплицент предиката.

8) Строим все тупиковые КНФ предиката.

Приведем описание алгоритма минимизации формул алгебры конечных предикатов, *обобщающего* алгоритм Порецкого-Блейка конъюнктивной минимизации формул алгебры логики. Исходной информацией при минимизации для этого алгоритма служит произвольно выбранная КНФ предиката, для которой отыскивается минимальная КНФ. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2\}$. Предикат f задан следующей КНФ:

$$f \equiv (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_a^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)$$
$$(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c).$$

1) К конъюнктивным членам исходной КНФ всюду, где возможно, применяем *операцию обобщенного конъюнктивного склеивания*, основанную на использовании тождества:

$$(A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j}) \equiv \equiv (A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j})(A \vee B), \tag{43}$$

справедливого в случае, когда $i \neq j$. Результатом операции обобщенного конъюнктивного склеивания является множество всех не равных единице элементарных дизъюнкций вида $A \vee B$. В нашем примере получаем следующее множество элементарных дизъюнкций:

$$\{x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b,\ \ x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b,\ \ x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b,$$
$$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c,\ \ x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b,\ \ x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c,$$
$$x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c\}.$$

Заметим, что тождество (43), лежащее в основе операции обобщенного конъюнктивного склеивания, в алгебре конечных предикатов выглядит несколько иначе, чем соответствующее тождество в алгебре логики. В частном случае при $k=2$ тождество (41) переходит в известное тождество алгебры логики

$$(A \vee x)(B \vee \bar{x}) \equiv (A \vee x)(B \vee \bar{x})(A \vee B),$$

используемое в алгоритме Порецкого-Блейка. Докажем справедливость тождества (41):

$$(A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j}) \equiv (A \vee x^{a_i})(A \vee x^{a_i} \vee B)(B \vee x^{a_j}) \wedge$$
$$\wedge (B \vee x^{a_j} \vee A) \equiv (A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j})(A \vee B \vee x^{a_i} x^{a_j}) \equiv$$
$$\equiv (A \vee x^{a_i})(B \vee x^{a_j})(A \vee B).$$

2) Исходную КНФ пополняем конъюнктивными членами из системы, полученной на первом шаге алгоритма. В нашем примере имеем

$$f \equiv (x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b) \wedge$$
$$\wedge (x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b) \wedge$$
$$\wedge (x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c).$$

Таблица 8

Простая имплицента	Конституэнта нуля				
	$x_1^b \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^b$	$x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^b \vee x_2^c$	$x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^a \vee x_2^c$	$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b \vee x_2^c$	$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b$
$x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c$		*	*		
$x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b$	*				*
$x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b$				*	*
$x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c$		*		*	

3) Применяем всюду, где возможно, *операцию конъюнктивного поглощения* $A(A \vee B) \equiv A$. В результате выполнения этого шага алгоритма получаем сокращенную КНФ конечного предиката. В нашем примере имеем следующую сокращенную КНФ:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b) \wedge$$
$$\wedge (x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c).$$

4) Выполняем шаги 3-9 предыдушего алгоритма. В нашем примере имплицентная таблица имеет вид, представленный табл. 8, по которой находим конъюнктивное ядро предиката:

$$\{x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c, x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b\}.$$

Имеются две тупиковые КНФ:

$$(x_1^0 \vee x_1^A \vee x_2^A)(x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_1^b \vee x_2^b),$$
$$(x_1^a \vee x_1^c \vee x_2^c)\ (x_1^b \vee x_2^a \vee x_2^b)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c),$$

каждая из которых может быть принята в качестве минимальной КНФ предиката f.

Переходим к описанию алгоритма минимизации формул алгебры конечных предикатов, *обобщающего* алгоритм Нельсона конъюнктивной минимизации формул алгебры логики. Исходной информацией при минимизации служит произвольно выбранная ДНФ предиката, для которого отыскивается минимальная КНФ. Рассмотрим пример. Пусть $A=\{a, b, c\}$, $B=\{x_1, x_2, x_3\}$. Предикат задан следующей ДНФ:

$$f \equiv x_1^a x_2^a \vee x_1^a x_2^b \vee x_2^c x_3^a .$$

1) Пользуясь вторым законом дистрибутивности, переходим к некоторой КНФ предиката f. В примере имеем:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_3^a)(x_1^a \vee x_2^b \vee x_2^c) \wedge$$
$$\wedge (x_1^a \vee x_2^b \vee x_3^a) \wedge (x_1^a \vee x_2^a \vee x_2^c) \wedge$$
$$\wedge (x_1^a \vee x_2^a \vee x_3^a)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a).$$

2) Применяем операцию конъюнктивного поглощения. В результате получаем сокращенную КНФ. В нашем примере сокращенная КНФ имеет вид:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_1^a \vee x_3^a)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^c) .$$

3) Выполняем шаги 3-9 алгоритма, описанного первым в пункте г). В примере получаем следующую минимальную КНФ:

$$f \equiv (x_1^a \vee x_2^c)(x_2^a \vee x_2^b \vee x_3^a) .$$

Заметим, что в области минимизации формул алгебры конечных предикатов много важных задач еще ждет своего решения. К их числу относятся: дальнейшая разработка методов канонической минимизации; разработка оценок сложности минимальных форм; разработка методов минимизации скобочных форм; разработка методов факторизации (разыскания форм с наименьшим числом вхождения знаков конъюнкции и дизъюнкции).

Выводы

У читателя, ознакомившегося с [1] и настоящей статьей, может возникнуть вопрос: почему в работе, посвященной теории интеллекта, так много внимания уделяется разработке формального языка в виде алгебры конечных предикатов? Не лучше ли было бы, довольствуясь существующим математическим аппаратом, сразу же взяться за моделирование какой-нибудь сложной интеллектуальной деятельности, например, игры в шахматы или доказательства теорем. К своему стыду, авторы когда-то именно так и поступили. Объектом математического описания был выбран русский язык. В качестве формальных языков, на которых велось описание этого объекта, были испробованы языки программирования [7], аппарат теории графов [8], язык теории алгоритмов [9], логические исчисления [10]. Много лет ушло в малоэффективных попытках, пока наконец стало ясно, что все эти средства настолько плохо приспособлены для целей формального описания человеческого языка, что создают труднопреодолимые препятствия при его моделировании. Поскольку естественный язык лежит в основе интеллектуальной деятельности человека, то можно не сомневаться, что и моделирование вышележащих слоев интеллекта будет столь же неэффективным, если ограничится существующими математическими средствами.

Трудности, с которыми пришлось столкнуться при моделировании естественного языка, в конце концов были проанализированы. Из них родились требования, предъявляемые к формальному языку, способному эффективно описывать человеческий язык. В свою очередь, сформулированные требования, можно сказать, принудительно привели к алгебре конечных предикатов. Проводившееся затем математическое описание явлений русского языка средствами алгебры конечных предикатов продемонстрировало преимущества этой алгебры, причем настолько большие, что в дальнейшем ни разу не возникала необходимость обратиться к помощи какого-нибудь другого формального языка. Ниже излагаются доводы, которые убедили авторов в том, что алгебра конечных предикатов как раз и есть тот формальный язык, на котором должно вестись описание проявлений человеческого языка (а может быть, и многих других функций интеллекта), что никакие другие формальные средства не могут составить ему конкуренцию и что именно этот язык призван стать фундаментом, на котором должно строиться здание теории интеллекта.

Человеческий язык как явление дискретное, естественно, должен описываться средствами дискретной математики. Между тем выбор средств указанного типа весьма ограничен. Это — языки программирования для ЭВМ, логические исчисления, языки теории алгоритмов, аппарат теории графов. При попытке использования языков программирования или языков теории алгоритмов приходится столкнуться со следующими труднопреодолимыми препятствиями. Эти языки, как известно, предназначены для описания алгоритмов [11], то есть процедур с однозначным исходом. Между тем естественный язык многозначен, что проявляется, например, в виде омографичности слов, то есть неоднозначности их смысла. Языки программирования и теории алгоритмов – это такие языки, которые могут описывать только однозначные функции. Естественный же язык требует формальных средств для описания многозначных функций, то есть соответствий произвольного вида, иначе говоря, – отношений.

Для описания человеческого языка лучше всего подошел бы аппарат уравнений, подобный аппарату, используемому в математическом анализе, отличающийся от последнего тем, что он предназначен для формализации не непрерывных, а дискретных процессов. Такой язык дают логические исчисления, а именно: исчисления высказываний и исчисления предикатов. Однако, чтобы иметь возможность эффективно решать указанные уравнения, необходимо довести интересующие нас исчисления до уровня алгебраической системы. Сделано же это только в исчислении высказываний. В результате мы имеем алгебру логики и аппарат булевых уравнений [12]. Однако аппарат булевых уравнений для формального описания естественного языка наталкивается на серьезное неудобство, заключающееся в том, что в алгебре логики используются лишь двоичные знаки, в то время как в естественном языке фигурируют буквенные, то есть многозначные символы.

Этого недостатка, казалось бы, можно избежать, обратившись к аппарату многозначной логики [13]. Однако при ближайшем рассмотрении обнаруживается, что многозначная логика развита только в сторону описания однозначных функций, а не отношений. Учение об уравнениях в многозначной логике, насколько нам известно, совершенно не развито. Развитие же в этом направлении многозначной логики принудительно приводит к алгебре конечных предикатов. Действительно, чтобы иметь возможность записывать самые общие уравнения многозначной логики, в правой их части нет необходимости ставить произвольные формулы, достаточно писать константы. Необязательно использовать все константы, достаточно взять всего две знака: 0 и 1. Но как только мы так поступим, немедленно приходим к понятию конечного предиката, а следовательно, и к алгебре конечных предикатов.

Использование исчисления предикатов [3] для целей математического описания человеческого языка также наталкивается на определенную трудность: исчисление очень слабо развито применительно к нуждам описания конечных объектов. Исчисление предикатов не располагает даже средствами для формульной записи любых индивидуальных конечных отношений. Вместе с тем, человеческий язык – явление сугубо конечное и он требует для своей формализации аппарата конечной математики. Пытаясь алгебраизировать конечный фрагмент исчисления предикатов, мы не сможем прийти ни к чему иному, как только к алгебре конечных предикатов. Наконец, обратившись к аппарату теории графов [14], мы обнаружим, что, хотя он и используется для описания конечных отношений, однако совершенно не содержит в себе выразительных средств для записи этих отношений в виде уравнений некоторой алгебры. Если же мы захотим перевести информацию, содержащуюся в графах, на язык таблиц, то увидим, что с помощью графов выражаются именно конечные предикаты.

Таким образом, какой бы путь мы ни избрали при разработке приемлемых формальных средств для математического описания человеческого языка, мы неизбежно приходим к алгебре конечных предикатов. Вместе с тем в данной статье установлено, что алгебра конечных предикатов полна, то есть на ее языке могут быть описаны любые конечные отношения. Поэтому любой другой математический аппарат, предназначенный для описания произвольных конечных отношений, в логическом смысле обязательно будет равносилен алгебре конечных предикатов.

Список литературы: **1.** *Бондаренко, М.Ф.* Об алгебре конечных предикатов [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта: науч.-техн. журнал. – 2011. – № 3. – С. 3-13. **2.** *Мальцев, А.И.* Алгебраические системы [Текст] / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1970. – 310 с. **3.** *Ершов, Ю.Л.* Математическая логика / Ю.Л. Ершов, Е.А. Палютин. – М.: Наука, 1979. – 372 с. **4.** *Глушков, В.М.* Введение в кибернетику [Текст] / В.М. Глушков. – К.: Изд. АН УССР, 1964. – С. 67-75. **5.** *Глушков, В.М.* Синтез цифровых автоматов [Текст] / В.М. Глушков. – М.: Физматгиз, 1962. – 316 с. **6.** *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* Об одной математической модели морфологической классификации множества имен существительных русского языка [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Л.И. Якименко. – Проблемы бионики. 1971. – Вып. 6. – С. 104-107. **7.** *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* Математическая модель определения классов одинаковых слов [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Л.И. Якименко // Проблемы бионики. – 1971. – Вып. 7. – С. 103-105. **8.** *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* К вопросу об автоматическом морфологическом анализе причастий русского языка [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Е.А. Соловьева // Проблемы бионики. – 1974. – Вып. 12. – С. 46-50. **9.** *Осыка, А.Ф.* Модель определения исходной формы числительных русского языка [Текст] / А.Ф. Осыка, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Проблемы бионики. – 1976. – Вып. 16. – С. 78-84. **10.** *Осыка, А.Ф.* К вопросу о моделировании грамматической обработки имен числительных [Текст] / А.Ф. Осыка. – Пробл. бионики, 1979, Вып. 22, С. 129-137. **11.** *Мальцев, А.И.* Алгоритмы и рекурсивные функции [Текст] / А.И. Мальцев. – М.: Наука, 1965. – С. 9-11. **12.** *Закревский, А.Д.* Логические уравнения [Текст] / А.Д. Закревский. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 92. **13.** Дискретная математика и математические вопросы кибернетики [Текст] / Под ред. С.В. Яблонского и О.Б. Лупанова. – М.: Наука, 1974. – Т. 1. – С. 35-66. **14.** *Белов, В.В.* Теория графов [Текст] / В.В. Белов, Е.Н. Воробьев, В.Е. Шаталов. – М.: Высш. школа, 1976. – 389 с.

Поступила в редколлегию 15.06.2011

УДК 519.7

Нормальні форми формул алгебри скінченних предикатів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 3 (77). – С. 14-29.

Розглянуто побудову нормальних форм формул алгебри скінченних предикатів, методи кон'юнктивної мінімізації. Сформульовано теорему про конюнктивний розклад предикатів.

Табл. 8. Бібліогр.: 14 найм.

UDC 519.7

PDNF in final predicates algebra / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 3 (77). –P. 14-29.

The construction of the final predicates algebra formulas normalized forms and the of conjunctive minimization methods is considered. The theorem about the predicates conjunctive decomposition is formulated.

Ref.: 14 items.