УДК 681.3

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ РЕКУРРЕНТНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ С КРИТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

В. А.Тимофеев[1], Самер Лага[2], В. Д. Непочатова[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина, timofeev2001@yahoo.com

Рассматривается задача идентификации динамического объекта в предположении, что известен лишь уровень помехи. Исследованы существующие алгоритмы. Разработан рекуррентный алгоритм идентификации, имеющий критические свойства и свойства МНК-оценок, определены условия его сходимости. Преимуществом разработанного алгоритма является простота его использования в задачах контроля и управления.

КОНТРОЛЬ, АДАПТАЦИЯ, КРИТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ПОМЕХА, СХОДИМОСТЬ

Введение

Принятие решений в экологических, технических, экономических системах невозможно без учета информации о текущем состоянии объекта. При этом объект может быть нелинейым, нестационарным, его параметры могут изменяться во времени. Таким образом, решение задач контроля и принятия решений в условиях нестационарности объекта и динамического проявления внешней среды возможно лишь на основе использования математического аппарата, предполагающего изменеие параметров модели во времени. Данная задача может быть решена с использованием теории адаптивных систем. К настоящему времени сформировался ряд относительно независимых направлений в теории адаптивных систем [1-6]. Однако во всех классических подходах предполагается, что возмущения, действующие в системе, имеют стохастическую природу, причем это, как правило, белый шум с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией. В практических ситуациях статистические предпосылки являются надуманными, в связи с чем гораздо более реальными представляются допущения лишь об ограниченности шума или его разностей по амплитуде. В этих условиях использование методов идентификации, основанных на квадратичных критериях, и, прежде всего, рекуррентного метода наименьших квадратов явно неэффективно. Возникающие затруднения частично могут быть преодолены в рамках адаптивных робастных систем управления [7-10], в которых, тем не менее, все равно «спрятаны» определенные статистические предпосылки.

В связи с этим представляет интерес разработка математических моделей, предполагающих синтез теории адаптивного и критического управления, что приведет к созданию адаптивных критических методов контроля и идентификации динамических объектов, функционирующих в условиях существенной неопределенности о характеристиках объекта и окружающей среды.

Целью настоящей работы и является разработка рекуррентного метода идентификации, обеспечивающего получение оценок, обладающих супремальными свойствами, которые не зависят от статистических характаристик сигналов и помех, и свойствами МНК-оценок.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамический объект, функционирующий в замкнутой системе управления $S_D(P,C)$, описываемый разностным уравнением

$$A(q)\,y(k) = q^{-d}B(q)u(k) + \xi(k)\,, \qquad (1)$$

где полиномы $A(q) \in R[q,n]$ с $a_0 = 1$, $B(q) \in R[q,m]$; d — время чистого запаздывания $d \in N^{+}$; y, u и ξ — выходной, управляющий и возмущающий сигналы соответственно.

Относительно возмущений предполагается ограниченность их первых разностей.

В случае, если параметры объекта неизвестны, можно воспользоваться тем или иным методом идентификации. Как правило, в качестве процедур идентификации применяются те или иные модификации рекуррентного метода наименьших квадратов либо проекционные алгоритмы, так или иначе связанные с квадратичными критериями. При использовании критериев, отличных от квадратичных, например, модульных, хотя и получают робастные процедуры, статистический смысл задачи идентификации тем не менее сохраняется. Естественно, что такие алгоритмы идентификации не могут быть использованы в критических системах управления.

В связи с этим возникает необходимость синтеза адаптивных алгоритмов идентификации, не связанных ни с какими статистическими предпосылками, обладающих высокой скоростью сходимости, вычислительной простотой и пригодных для работы в реальном времени в контуре критической системы управления динамическим объектом.

2. Алгоритмы идентификации, применяемые в критических системах

Рассмотрим полином

$$G(q) = 1 - \Delta A(q), \qquad (2)$$

где $G(q) = g_1 q^{-1} + g_2 q^{-2} + \ldots + q^{-n-1}$, и перепишем уравнение объекта (1) в виде

$$y(k)=\Theta^T\psi(k-1)+\Delta\xi(k), \quad (3)$$

где $\Theta=(g_1,g_2,...,g_{n+1},b_0,b_1,...,b_m)^T$;

$$\psi(k-1)=(y(k-1),y(k-2),...,y(k-n-1),$$
$$\Delta u(k-d),\Delta u(k-d-1),...,\Delta u(k\text{ - }d\text{ - }m))^T;$$
$$\Delta u(k)=u(k)-u(k-1);$$
$$\Delta\xi(k)=\xi(k)-\xi(k-1).$$

Тогда задача идентификации с позиции теории критических систем сводится к нахождению оценок неизвестного вектора параметров Θ таких, что

$$\Omega(\hat{\Theta})=\{\hat{\Theta}:|\,y(k)-\hat{\Theta}^T\,\psi(k\text{ - }1)|\le\delta,\ \forall\kappa\in\mathrm{N}\}\,. \quad (4)$$

Здесь $\hat{\Theta}$ — оценка параметра Θ.

К настоящему времени сложился ряд подходов к задаче идентификации, связанной с неравенством (4). Это, прежде всего, подход Фогеля-Хуанга [11], в основе которого лежат некоторые геометрические построения. Известна также процедура Лозано-Лила-Ортеги [12], синтезированная как на геометрических предпосылках, так и исходя из условий устойчивости процесса сходимости. Нельзя не отметить также алгоритм Канудас де Вита-Каррильо [13], являющийся некоторой модификацией экспоненциально взвешенного рекуррентного МНК. Несмотря на эффективность этих процедур, их использование в критических системах наталкивается на серьезные затруднения.

Так, оптимальный алгоритм Фогеля-Хуанга настолько сложен с вычислительной точки зрения, что не может быть и речи о его использовании в режиме реального времени. Эта сложность обусловлена, прежде всего, необходимостью отыскания на каждой итерации глобального минимума многоэкстремальной функции $n+m+2$ переменных, что само по себе является достаточно сложной проблемой.

В алгоритме Лозано-Лила-Ортеги, имеющем вид

$$\hat{\Theta}(k)=\hat{\Theta}(k-1)+\frac{\alpha P(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k\text{ - }1)}\times$$
$$\times(|\,e(k)\,|-\delta_1\,\mathrm{sign}\,e(k),\ \alpha\in(0,1); \quad (5)$$

$$P^{-1}(k)=\begin{cases}P^{-1}(k-1)+\\ +\dfrac{\alpha P(k-1)\psi(k\text{ - }1)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)e(k)}\times\\ \times(|\,e(k)\,|-S_1)\,\mathrm{sign}\,e(k),\quad |\,e(k)\,|>\delta_1;\\ P^{-1}(k-1),\quad |\,e(k)\ |\le\delta_1;\end{cases} \quad (6)$$

$$S_1=\sqrt{1+\alpha}\,\delta; \quad (7)$$

$$e(k)=y(k)-\hat{\Theta}^T(k-1)\psi(k\text{ - }1), \quad (8)$$

априори предполагается ограниченность значения $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k\text{ - }1)$, из которого следует условие сходимости

$$\lim_{k\to\infty}|\,e(k)\,|=\sqrt{1+\alpha}\,\delta,\ \alpha\in(0,1),$$

то есть ошибка идентификации $e(k)$ никогда не может быть по модулю меньше заданных ограничений δ.

В алгоритме Канудас де Вита-Каррильо

$$\hat{\Theta}(k)=\hat{\Theta}(k-1)+$$
$$+\frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)}{\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(|\,e(k)\,|-\delta)\,\mathrm{sign}\,e(k); \quad (9)$$

$$P(k)=\lambda^{-1}(P(k-1)-$$
$$-\frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)P(k-1)}{\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(1-\frac{\delta}{|\,e(k)\,|})), \quad (10)$$
$$\lambda\in(0,1];$$

$$\alpha(k)=$$
$$=\begin{cases}1,|\,e(k)>\delta\text{ или }\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)=0;\\ 0,|\,e(k)\le\delta,\end{cases} \quad (11)$$

где $e(k)$ определяется соотношением (8),

$$e(k)=y(k)-\hat{\Theta}^T(k-1)\psi(k-1).$$

В ситуации, когда $|\,e(k)\,|>\delta$ и значение $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$ близко к нулю, возникает режим неустойчивости, поскольку компоненты вектора

$$P(k-1)\psi(k-1)(\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))^{-1}$$

могут неограниченно возрастать. Кроме того, в случае, когда $\alpha(k)=0$, невозможно гарантировать выполнение условия $|\,e(k)\,|\le\delta$ в предположении, что $\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)$ ограничено.

3. Модифицированный алгоритм идентификации и оценивание его сходимости

Объединяя достоинства рассмотренных процедур, введем комбинированный алгоритм, являющийся своеобразной комбинацией рекуррентного МНК и процедур (5)-(7) и (9)-(11).

Рассмотрим алгоритм вида

$$\hat{\Theta}(k)=\hat{\Theta}(k-1)+$$
$$+\frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}\times \quad (12)$$
$$\times(|\,e(k)\,|-\delta)\,\mathrm{sign}\,e(k),$$

$$P(k)=P(k-1)-$$
$$-\frac{\alpha(k)P(k-1)\psi(k-1)\psi^T(k-1)P(k-1)}{|\,e(k)\,|+(2\,|\,e(k)-\delta)\psi^T(k)P(k-1)\psi(k-1)}\times \quad (13)$$
$$\times(|e(k)|-\delta),$$

$$\alpha(k)=\begin{cases}1, \text{если } |e(k)|>\delta,\\ 0, \text{если } |e(k)|\le\delta,\end{cases} \quad (14)$$

где $e(k)$ определяется в соответствии с (8).

Анализ сходимости предложенного алгоритма

Рассмотрим вектор уклонений оценок от истинных значений параметров

$$\tilde{\Theta}(k)=\Theta-\hat{\Theta}(k)$$

и функцию Ляпунова

$$V(k)=\tilde{\Theta}^T(k)P^{-1}(k)\tilde{\Theta}(k).$$

Объединяя (3) с (12)-(14), получаем

$$\begin{aligned}V(k)&=V(k=1)+\\&+\frac{\alpha(k)(|e(k)|-\delta)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|}\times\\&\times(\Delta\xi^2(k)-\\&-\frac{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|^3}{|e(k)+(2|e(k)|-\delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}).\end{aligned} \quad (15)$$

С учетом ранее введенного условия $\xi\in D(0,\delta)$ несложно переписать (15) в виде неравенства

$$\begin{aligned}V(k)&\le V(k-1)+\frac{\alpha(k)(|e(k)|-\delta)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|}\times\\&\times(\delta^2-\frac{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|^3}{|e(k)|+(2|e(k)|-\delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)})=\\&=V(k-1)-\frac{\alpha(k)(|e(k)|-\delta)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))|e(k)|}\times\\&\times\frac{(|e(k)|^3-2|e(k)|\delta^2+\delta^3)(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))+(|e(k)|-\delta)\delta^2}{|e(k)|+(2|e(k)|-\delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}\le\\&\le V(k-1)-\frac{\alpha(k)(|e(k)|-\delta)(|e(k)|^3-2|e(k)|\delta^2+\delta^3)}{(|e(k)|+2|e(k)|-\delta)\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)|e(k)|},\end{aligned}$$

которое справедливо в случае $|e(k)|\ge\delta.$ Кроме того, поскольку в этом случае

$$e^2(k)-2\delta^2+\frac{\delta^3}{|e(k)|}\ge|e(k)|(|e(k)|-\delta),$$

то

$$V(k)\le V(k-1)-\frac{\alpha(k)(|e(k)|(|e(k)|-\delta)^2}{2(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}, \quad (16)$$

откуда

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\alpha(k)(|e(k)|-\delta)^2}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}=0, \quad (17)$$

что свидетельствует о критериальной сходимости алгоритма (12)-(14).

Перенеся в левую часть (12) $\hat{\Theta}(k-1)$ и возведя обе части полученного выражения в квадрат, получаем

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{\Theta}(k)-\hat{\Theta}(k-1)\right\|^2_{V(k)}=\\&=\frac{\alpha(k)\psi^T(k-1)P^2(k-1)\psi(k-1)}{(1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1))^2}(|e(k)|-\delta^2)\le\\&\le\frac{\alpha(k)\lambda_{\max}(P(k-1))}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(|e(k)|-\delta^2),\end{aligned} \quad (18)$$

где $\lambda_{\max}(P(k-1))$ — максимальное собственное значение матрицы $P(k-1)$.

Из выражения (13) следует условие

$$\lambda_{\max}(P(k))\le\lambda_{\max}(P(k-1))\le\ldots\le\lambda_{\max}(P(0)),$$

позволяющее переписать (18) в виде

$$\begin{aligned}&\left\|\hat{\Theta}(k)-\hat{\Theta}(k-1)\right\|^2_{V(k)}\le\\&\le\alpha(k)\lambda_{\max}(P(0))\frac{(|e(k)|-\delta)^2}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)},\end{aligned}$$

который вместе с выражением (17) свидетельствует об аргументной сходимости алгоритма.

Далее, используя лемму об обращении матриц, запишем выражение

$$\begin{aligned}P^{-1}(k)&=P^{-1}(k-1)+\\&+\frac{\alpha(k)\psi(k-1)\psi^T(k-1)}{1+\psi^T(k-1)P(k-1)\psi(k-1)}(1-\frac{\delta}{|e(k)|}),\end{aligned}$$

откуда следует неравенство

$$\lambda_{\min}(P^{-1}(k))\ge\lambda_{\min}(P^{-1}(k-1))\ge\ldots\ge\lambda_{\min}(P^{-1}(0)),$$

где $\lambda_{\min}(P^{-1}(k))$ — минимальное собственное значение матрицы .

Это неравенство совместно с (16) приводит к тому, что

$$V(k)\le V(0)$$

и

$$\lambda_{\max}(P^{-1}(0))\left\|\tilde{\Theta}(k)\right\|^2_{V(k)}\le\lambda_{\max}(P^{-1}(k)\left\|\tilde{\Theta}(0)\right\|^2_{V(k)},$$

откуда можно записать выражение

$$\left\|\tilde{\Theta}(k)\right\|^2_{V(k)}\le\frac{\lambda_{\max}(P^{-1}(k))}{\lambda_{\min}(P^{-1}(0))}\left\|\tilde{\Theta}(0)\right\|^2_{V(k)},$$

определяющее скорость сходимости введенного алгоритма.

Выводы

В работе предложена модификация рекуррентного МНК, обладающая критическими свойствами. Так как основой данного алгоритма является рекуррентный МНК, трудностей с его практической реализацией не возникает. Полученная оценка скорости сходимости предложенного алгоритма свидетельствует о том, что эта скорость в значительной мере определяется свойствами ковариационной матрицы наблюдений $P^{-1}(k)$ (соотношением ее максимального и минимального собственных чисел). Кроме того, входящая в алгоритм величина δ зачастую известна лишь приближенно, поэтому необходимо в процессе идентификации осуществлять оценивание (уточнение) этой величины и подставлять полученные оценки в алгоритм идентификации.

Список литературы: 1. *Clarke D. W., Gawthrop P.* J. Self-tuning controller // Proc. IEE. — 1975. — 122. — P. 929-934. 2.*Wellstead P. E., Edmunds M. J., Prager D., Zanker P.* Self-tuningpole/ zero assignment regulators // Int. J. Contr. — 1979. — 30. — №1. — P. 1-26. 3. *Wellstead P. E., Prager D., Zanker* P. Pole assignment self-tuning regulator // Proc. DEE. — 1979. — 126. — D. — P. 781-787. 4. *Astrom K. J., Wittenmark B.* Self-tuning controllers based on pole-zero placement // Proc. IEE. — 1980. — 127. — D. — P. 120-130. 5.*Kreisselmeier G., Narendra K. S.* Stable MRAC in the presence of bounded disturbances // IEEE Trans. on Autom. Contr. — 1982. — 27. — P. 1169-1175. 6. *Clarke D. W., Mohtadi C., Tuffs P. S.* Generalized predictive control. Tue basis algorithm // Automatica. — 1987. — 22. — № 2. — P. 137-148. 7. *Samson C.* Stability analysis of adaptively controlled systems subject to bounded disturbances // Automatica. — 1983. — 19. — P. 81-89. 8. *Narendra K. S., Annaswamy A.* M. Robust adaptive control in the presence of bounded disturbances // IEEE Trans. on Autom. Contr. — 1986. — 31. — № 4. — P. 306-315. 9. *0rtega R., Lozano-Leal R.*, A note on direct adaptive control of systems with bounded disturbances // Automatica. — 1987.-23. — № 2. — P. 253-254. 10. *Fogel E., Huang Y. F.* On the value of information in system identification — bounded noise case // Automatica. — 1982. — 18. — № 2. — P. 229-238. 11.*Lozano-Leal R., Ortega* R. Reformulation of the parameter identification problem for system with bounded disturbances //Automatica. — 1987. — 23. — № 2. — P. 245-257. 12. *Canudas de Wit C.C., Carrilo J.* A modified EW — RLS algorithm for systems with bounded disturbances // Automatica. — 1990. — 26. — P. 599-606. 13. *Фомин В. Н.* Математическая теория обучаемых опознающих систем. — Л.: Изд. ЛГУ, 1976. — 235 с.

Поступила в редколлегию 18.04.2008