УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

МОДЕЛИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ВИДЕ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОДНО- И ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены интегральные модели некоторых функций цветового зрения человека – однопараметрические операторы; операторы с распадающимися и разностными ядрами, описывающие процессы цветовой инерции в случаях, когда излучения имеют спектральную плотность, не меняющуюся во времени или постоянный спектральный состав и изменяющуюся во времени интенсивность; двухпараметрические семейства операторов, применяемые для моделирования явления иррадиации зрения. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1-4], в которых развивается метод компараторной идентификации функций человеческого зрения в виде линейных предикатов. Предложены математические средства, эффективные при моделировании психофизических процессов. Введены понятия линейного предиката и линейного n-мерного предиката; доказаны необходимые и достаточные условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора. Рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Введены три варианта теории цвета, предназначенные для локального, глобального и полного исследования механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета.

В настоящей работе продолжается рассмотрение моделей цветового зрения человека. Предложены интегральные модели некоторых его функций. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

1. Однопараметрические представления

Пусть t – какое-либо действительное число; L_t^2 – пространство измеримых на $(-\infty, t]$ действительных функций $x(\tau)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau, \qquad (1)$$

K_t – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$ (t – параметр), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t \times K_t$ и удовлетворяет условиям *а – в* из [1, п. 4] (рефлексивность, симметричность, транзитивность). Нас интересуют условия, при которых для всех $t \in (-\infty, \infty)$ и всех $x, y \in L_t^2$ имеет место равенство

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)x(\tau)d\tau, \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)y(\tau)d\tau \right), \qquad (2)$$

где D – предикат равенства; $B(\xi)$ – некоторая неотрицательная функция на полуоси $[0, \infty)$.

Для формулировки этих условий поставим в соответствие каждой функции $x \in L_t^2$ и положительному числу ξ функцию

$$\tilde{x}_\xi(\tau) = x(\tau - \xi). \qquad (3)$$

Функция $\tilde{x}_\xi$ является сдвигом функции x вправо на величину ξ (см. рис. 1).

Имеем

$$\int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} \tilde{x}_\xi^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} x^2(\tau - \xi) d\tau = e^{\xi} \int_{-\infty}^{t+\xi} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau. \qquad (4)$$

Отсюда, в частности, видно, что $\tilde{x}_\xi \in L_{t+\xi}^2$.

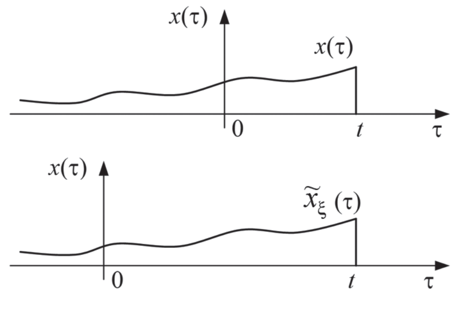

Рис. 1

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_{0}^{\infty} e^{\xi} B^2(\xi) d\xi < \infty, \int_{0}^{\infty} B(\xi) d\xi = 1, \qquad (5)$$

и такая, что имеет место равенство (2), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

г) для любых $t \in (-\infty, \infty)$ и $x, x', y, y' \in K_t$ из равенств

$$\Phi_t(x, x') = 1, \quad \Phi_t(y, y') = 1 \tag{6}$$

следует, что

$$\Phi_t(x + y, x' + y') = 1; \tag{7}$$

д) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любого $x \in K_t$ существует единственное неотрицательное число $[fx](t)$ такое, что

$$\Phi_t(x + y, [fx](t)) = 1 \tag{8}$$

(в (8) тем же символом $[fx](t)$ обозначена функция на $(-\infty, t]$, тождественно равная числу $[fx](t)$;

е) величина $[fx](t)$ как функция от x на K непрерывна в метрике L_t^2;

ж) для любого $t \in (-\infty, \infty)$, любых $x, y \in K_t$ и любого положительного ξ из равенства

$$\Phi_t(x, y) = 1 \tag{9}$$

вытекает равенство

$$\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) = 1. \tag{10}$$

Доказательство. *Достаточность.* Зафиксируем t и функции $x, y \in K_t$. Из (8) имеем

$$\Phi_t(x[fx](t)) = 1, \ \Phi_t(y[fy](t)) = 1.$$

Поэтому условие *г* дает

$$\Phi_t(x + y, [fx](t) + [fy](t)) = 1. \tag{11}$$

Но из условия *д* вытекает, что единственным неотрицательным числом c, при котором выполняется равенство $\Phi_t(x + y, c) = 1$, является число $[f(x + y)](t)$. Таким образом, из (21), [3] можно заключить, что

$$[f(x + y)](t)[fx](t) + [fy](t). \tag{12}$$

Это означает, что $[fx](t)$ – аддитивный функционал на положительном конусе K_t пространства L_t^2. Из условия *д* вытекает, что этот функционал непрерывен. Поскольку положительный конус K_t в пространстве L_t^2 является воспроизводящим, то функционал $[fx](t)$ однозначно продолжается до аддитивного, непрерывного, а следовательно, и линейного функционала на L_t^2. Согласно теореме об общем виде линейного функционала на пространстве L_t^2, существует функция $A_t(\tau)L_t^2$ такая, что

$$[fx](t) = \int_{-\infty}^{t} e^\tau A_t(\tau) x(\tau) d\tau \tag{13}$$

для любого $x \in K_t$.

Поскольку равенство (13) справедливо при любом t и любом $x \in K_t$, то, заменяя t на $t + \xi$ для любого $\tilde{x} \in K_{t+s}$ получаем

$$[f\tilde{x}](t + \xi) = \int_{-\infty}^{t+\xi} e^\tau A_{t+\xi}(\tau) \tilde{x}(\tau) d\tau.$$

В частности, при любой функции $x \in K_t$ и любом положительном ξ для функции $\tilde{x}_\xi$, связанной с функцией x равенством (3), имеем

$$[f\tilde{x}_\xi](t + \xi) = \int_{-\infty}^{t+\xi} e^\tau A_{t+\xi}(\tau) x(\tau - \xi) d\tau. \tag{14}$$

Далее, из (8) и условия *ж* следует, что

$$\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, ([\tilde{fx}](t))_\xi) = 1. \tag{15}$$

Поскольку f является постоянной функцией при изменении τ на $(-\infty, t]$, то ее сдвиг по формуле (3) является той же константой на рассматриваемой полуоси $(-\infty, t + \xi]$, то есть

$$\widetilde{[fx](t)}_\xi = [fx](t).$$

Отсюда, из (15) и условия *д* следует, что

$$[f\,\tilde{x}_\xi](t + \xi) = [fx](t).$$

Подставляя в это выражение формулы (13) и (14), получаем

$$\int_{-\infty}^{t+\xi} e^\tau A_{t+\xi}(\tau) x(\tau - \xi) d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^\tau A_t(\tau) x(\tau) d\tau.$$

Сделав в левом интеграле замену переменной интегрирования по формуле $\eta = t + \xi - \tau$, а в правом – по формуле $\eta = t - \tau$, получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{\tau+\xi-\eta} A_{t+\xi}(t + \xi - \eta) x(t - \eta) d\eta = \\ &= \int_0^\infty e^{\tau-\eta} A_t(t - \eta) x(t - \eta) d\eta. \end{aligned} \tag{16}$$

Сократив последнее равенство на e^t и положив

$$y(\eta) = x(t - \eta), a(\eta) = A_{t+\xi}(\eta) e^\xi - A_t(t - \eta),$$

находим

$$\int_0^\infty e^{-\eta} a(\eta) y(\eta) d\eta = 0. \tag{17}$$

Обозначим через L^2 гильбертово пространство измеримых на $[0, \infty)$ функций $y(\eta)$, удовлетворяющих условию

$$\int_0^\infty e^{-\eta} y^2(\eta) d\eta < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^\infty e^{-\eta} u(\eta) v(\eta) d\eta.$$

Нетрудно видеть, что $a(\eta) \in L^2$. Поскольку $x(\tau)$ в (16) – произвольная неотрицательная функция пространства L_t^2, то $y(\eta)$ в (17) – произвольная неотрицательная функция пространства L^2. Поэтому (17) – произвольная неотрицательная функция пространства L^2. Поэтому (17) означает, что вектор ортогонален положительному конусу пространства L^2. Но этот конус воспроизводящий. Значит, вектор a ортогонален всему пространству и, следовательно, a =0 как элемент L^2, то есть почти при всех $\eta \in x[0, \infty)$

$$A_{t+\xi}(t+\xi-\eta)e^{\xi}-A_t(t-\eta)=0.$$

для всех t и всех положительных ξ. В частности, при $t=1$

$$A_{\xi}(\xi-\eta)e^{\xi}-A_0(-\eta)=0. \qquad (18)$$

Положим

$$B(\eta)=e^{-\eta}A_0(-\eta), \quad \eta\geq 0. \qquad (19)$$

Тогда, заменяя переменную η переменной $\tau=\xi-\eta$, из (18) получаем

$$A_{\xi}(\tau)=e^{-\tau}B(\xi-\eta), \quad \infty<\tau\leq\xi.$$

Вместе с (13) это дает

$$[fx](t)=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau, \quad x\in K_t. \qquad (20)$$

Проверим выполнимость (5). Имеем

$$\int_{-\infty}^{0}e^{\xi}B^2(\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{0}e^{-\xi}A_0^2(-\xi)d\xi=\int_{-\infty}^{0}e^{\tau}A_0^2(\tau)d\tau.$$

Поскольку $A_0(\tau)\in L_0^2$, то последний интеграл конечен. Таким образом, первое соотношение (5) выполняется. Далее, пусть функция $x_0(\tau)\equiv 1$ на $(-\infty, t]$. В силу рефлексивности $\Phi_t(x_0,x_0)=1$. Но тогда из условия *д* следует, что $[fx_0](t)$. Поэтому (20) дает

$$1=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда вытекает второе соотношение (5).

Проверим, что функция $B(\xi)$ $(\xi\geq 0)$ является неотрицательной всюду, за исключением, быть может, множества меры нуль. Пусть S – множество точек положительной полуоси, в которых функция B принимает отрицательные значения и пусть мера этого множества не равна нулю. Зафиксируем какое-либо t. Пусть $S_t=t-S$, то есть

$$S_t=\{\tau\,|\,t-\tau\in S\}.$$

Положим

$$x(\tau)=\begin{cases}1, \text{ если } \tau\in S_t,\\ 0, \text{ если } \tau\in(-\infty,t)\setminus S_t.\end{cases}$$

Очевидно, $x\in K_t$. Из (20) имеем

$$[fx](t)=\int_{S_t}B(t-\tau)d\tau=\int_{S}B(\xi)d\xi.$$

Следовательно, $[fx](t)<0$, что противоречит условию *д*.

Проверим выполнимость равенства (2). Пусть функции *x, y* принадлежат $x,y\in K_t$ и для них справедливо равенство

$$\Phi_t(x,y)=1. \qquad (21)$$

Комбинируя (21) с (8), получаем

$$\Phi_t(y,[fx](t))=1. \qquad (22)$$

Но согласно условию *д* единственной постоянной функцией, удовлетворяющей такому условию, является $[fx](t)$. Следовательно,

$$[fy](t)=[fx](t). \qquad (23)$$

Пусть обратно выполняется (23). Это равенство вместе с (8) дает

$$\Phi_t(x,[fy](t))=1.$$

Но

$$\Phi_t(y,[fy](t))=1.$$

Из двух последних равенств и условий *б* и *в* вытекает (21). Таким образом, для всех $x,y\in K_t$ равенство (21) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется (23), то есть

$$\Phi_t(x,y)=D([fx](t),[fy](t))=1.$$

Вместе с (20) это дает (2). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и любых $x,y\in K_t$ справедлива формула (2) с некоторой почти всюду неотрицательной функцией $B(\xi)$, удовлетворяющей условиям *д*. Справедливость *г* следует из аддитивности функционала (20). Для проверки справедливости *д* достаточно показать, что для любой функции $x\in K_t$ существует единственное положительное число C такое, что

$$\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau=C\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau.$$

Как видно из второго равенства (5), это действительно так, причем $C=[fx](t)$, где $[fx](t)$ задается равенством (20). Далее, положим

$$A(\xi)=B(\xi)e^{\xi}, \quad \xi\geq 0. \qquad (24)$$

Тогда

$$[fx](t)=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}A(t-\tau)x(\tau)d\tau. \qquad (25)$$

Из неравенства (5) имеем

$$\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}A^2(t-\tau)d\tau=e^{t}\int_{0}^{\infty}e^{\xi}B^2(\xi)d\xi<0.$$

Следовательно, функция $A(t-\tau)\in L_t^2$. Тогда, как видно из (25), $[fx](t)$ – линейный функционал на L_t^2. Поэтому выполняется условие *е*. Осталось проверить условие *ж*. Равенство (9) означает, что

$$\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)y(\tau)d\tau, \qquad (26)$$

а равенство (10) – что

$$\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t+\xi-\tau)x(\tau-\xi)d\tau=\int_{-\infty}^{t+\xi}B(t+\xi-\tau)y(\tau-\xi)d\tau. \qquad (27)$$

Для того чтобы удостовериться, что из (26) вытекает (27), достаточно в (26) ввести новую переменную интегрирования $u=\tau+\xi$.

Теорема 1 доказана.

Обсудим теперь физический смысл этого результата из условий *в* – *ж*. Основным приложением этой теоремы является описание инерционных процессов. Предположим, что на вход преобразователя подается какой-либо физический сигнал $x(t)$, изменяющийся во времени. В силу инерционных свойств любого преобразователя выходной сигнал $[fx](t)$ в момент времени t зависит не только от значения входного сигнала в момент времени t, но и от предыстории процесса. Проиллюстрируем это более подробно на примере естественного преобразователя – зрительной системы человека.

Пусть наблюдателю предъявляется излучение постоянного относительного спектрального состава с интенсивностью, изменяющейся во времени. Обозначим через $x(\tau)$ яркость излучения в момент времени τ. Для любого $t\in(-\infty,\infty)$ эффективной яркостью стимула $x(\tau)$ $(-\infty<\tau\le t)$ в момент времени t называется яркость $[fx](t)$ постоянного во времени по интенсивности стимула, с которым стимул $x(\tau)$ фотометрически уравнивается визуальным способом в момент времени t. Разумеется, такое определение предполагает, что для любого переменного во времени стимула и любого момента времени существует единственный постоянный во времени стимул, вызывающий такую же реакцию в данный момент времени. Это предположение подтверждается многочисленными экспериментами А.В. Луизова. Выходным сигналом зрительной системы является ощущение – объект, не определенный четко и не допускающий непосредственного измерения. Изучение инерции зрительной системы позволяет ввести некоторый объективный косвенный способ измерения ощущения. А именно, ощущение переменного во времени стимула $x(\tau)$ в момент времени t можно измерить, сравнивая его с ощущением от постоянного во времени стимула. Таким образом, эффективная яркость может быть интерпретирована как величина ощущения. Будем обозначать факт уравнивания визуальным способом ощущений от излучения стимулов $x(\tau)$ и $y(\tau)$ $(\tau\le t)$ в момент времени t равенством $\Phi_t(x,y)=1$. Тогда условие *д* является формальной записью предположения о существовании эффективной яркости.

В качестве пространства входных сигналов мы выбрали L_t^2 с экспоненциальным весом. Наличие достаточно быстро убывающей на $-\infty$ весовой функции необходимо для того, чтобы постоянный во времени сигнал был элементом рассматриваемого пространства. Но выбор именно экспоненты носит случайный характер. Легко, однако, видеть, что для описания явления наличие экспоненты не существенно – в основной результат, формулу (2), экспонента не входит и такой же результат был бы получен при других весовых функциях, достаточно быстро убывающих на $-\infty$. Более того, выбор в качестве входного пространства функций, суммируемых с квадратом, не существенен, поскольку использованная нами теорема о представлении линейного функционала в виде интеграла справедлива для любых пространств. Разница сказалась бы лишь на виде неравенства (5).

Смысл условия *е* заключается в малом изменении ощущения яркости при малом изменении самой яркости. Смысл условия *ж* заключается в том, что если стимулы x и y вызывают одинаковую реакцию в момент времени t, то $\tilde{x}_\xi$ и $\tilde{y}_\xi$ – те же стимулы, но сдвинутые во времени на величину ξ, вызывают одинаковую реакцию в момент $t+\xi$.

Выполнимость условия аддитивности *г*, в отличие от остальных условий, не является ясной априори. Поэтому это условие нуждается в экспериментальной проверке. Обсудим существующие экспериментальные данные. Хорошо известно, что периодическое излучение с достаточно высокой частотой воспринимается зрительной системой так же, как постоянно действующее (эффект слияния мельканий). Более того, согласно закону Талбота, эффективная яркость такого излучения совпадает с его средним значением на периоде. Проверим, что из закона Талбота вытекает свойство аддитивности эффективной яркости для таких излучений. Действительно, пусть $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$ – два периодических излучения с частотой ω, а $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ – постоянные во времени излучения с яркостями, совпадающими со средними яркостями излучений $x_1(\tau)$ и $x_2(\tau)$, то есть

$$\bar{x}_i=\int_a^{a+T}x_i(\tau)d\tau \quad (i=1,2),$$

где a – произвольное число; T – период. Тогда согласно закону Талбота

$$[fx_1](t)=\bar{x}_1,\quad [fx_2](t)=\bar{x}_2. \tag{28}$$

Если частота ω достаточно велика, то она будет сверхкритической и для излучения $x_1(\tau)+x_2(\tau)$. Но средняя яркость этого излучения равна $\bar{x}_1+\bar{x}_2$. Поэтому из закона Талбота следует, что

$$[f(x_1+x_2)](t)=\bar{x}_1+\bar{x}_2.$$

Сравнивая это равенство с (28), получаем

$$[f(x_1+x_2)](t)=[fx_1](t)+[fx_2](t),$$

что, как было видно из доказательства теоремы 1, эквивалентно условию аддитивности *г*.

Пусть теперь $\{x_k(\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность излучений, $x(\tau)$ – какое-либо излучение. Нами был сформулирован и экспериментально проверен обобщенный закон Талбота, заключающийся в том, что при достаточно больших K излучения $x_k(\tau)$ и $x(\tau)$ визуально неразличимы тогда и только тогда, когда на любом интервале $[t_1,t_2]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{t_1}^{t_2}x_n(\tau)d\tau=\int_{t_1}^{t_2}x(\tau)d\tau.$$

Авторами данной работы изучались следствия из этого закона. В частности, было показано, что из обобщенного закона Талбота следует аддитивность эффективной яркости для существенно более широкого класса излучений, чем периодические излучения со сверхкритической частотой.

2. Распадающиеся и разностные ядра

Обозначим при произвольном числе t через L_t^2 пространство измеримых на $[0,1]\times(-\infty,t]$ действительных функций $x(\lambda,\tau)$, для которых конечен интеграл

$$\int_0^1\int_{-\infty}^t e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau.$$

Пусть $\bar{K}_t$ – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим однопараметрическое семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$, каждый из которых при соответствующем t определен на $\bar{K}_t\times\bar{K}_t$ и удовлетворяет условиям *а – в*. В настоящем параграфе устанавливаются условия, при которых существуют *n* функций $g_i(\lambda)$, $0\le\lambda\le1$, и неотрицательная функция $B(\xi)$, $\xi\ge0$ такие, что при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и всех $x,y\in K_t$ равенство

$$\Phi_t(x,y)=1 \tag{29}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(y),\quad i=1,2,\dots,n, \tag{30}$$

где

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\int_0^1\int_{-\infty}^t g_i(\lambda)B_i(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \tag{31}$$

Отметим два частных случая этой задачи. Предположим вначале, что рассматриваемая функция $x(\lambda,\tau)$ на самом деле не зависит от τ. Для того чтобы избежать в дальнейшем недоразумений, будем обозначать всюду на протяжении этого параграфа такие и только такие функции символами u и v, возможно с какими-либо индексами. Для функций, не зависящих от τ, сформулированный выше вопрос примет следующий вид. При каких условиях, накладываемых на семейство предикатов, существует линейно независимая система функций $\{g_i(\lambda)\}_{i=1}^n$, $\lambda\in[0,1]$, такая, что при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и u, v из положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ равенство

$$\Phi_t(u,v)=1 \tag{32}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(u)=\alpha_i(v),\quad i=1,2,\dots,n, \tag{33}$$

где

$$\alpha_i(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \tag{34}$$

Ответ на этот вопрос содержится в теореме 4 (см. п. 3. из [3]). Будем для краткости именовать совокупность условий этой теоремы условиями A.

Другой частный случай функций из $\bar{K}_t$ доставляют функции x вида

$$x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)\cdot u(\lambda), \tag{35}$$

где $\beta(\tau)\in K_t$, $u(\lambda)\in K$. Для таких функций требуемый результат состоит в следующем. Для любой функции $u\in K$ существует почти всюду неотрицательная функция $B_u(\xi)$, удовлетворяющая условиям *д*, и такая, что при любой функции $\beta(\tau)$ равенство

$$\Phi_t(\beta\cdot u,c\cdot v)=1 \tag{36}$$

выполняется тогда и только тогда, когда число $c=f_u^{(t)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t)}(\beta)=\int_{-\infty}^t B_n(t-\tau)\beta(\tau)d(\tau). \tag{37}$$

Для справедливости этого условия необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 1. Ниже эти условия именуются условиями B.

Теорема 2. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ нашлась система линейно независимых функций $\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ и неотрицательная функция $\beta(\xi)$, удовлетворяющая условиям д и такая, что равенство (29) эквивалентно равенствам (30), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, B и*

г) для любых $t\in(-\infty,\infty)$ и $x,x',y,y'\in\bar{K}_t$ из равенств

$$\Phi_t(x,x')=1 \text{ и } \Phi_t(y,y')=1 \tag{38}$$

следует, что

$$\Phi_t(x+y,x'+y')=1; \tag{39}$$

д) для любого $t\in(-\infty,\infty)$ и любого $x\in\bar{K}_t$ существует (не единственная) функция $u\in K$ такая, что

$$\Phi_t(x,u)=1; \tag{40}$$

е) для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty\subset\bar{K}_t$, сходящейся к нулю в метрике $\bar{L}_t^2$, существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty\subset K$, сходящаяся к нулю в метрике $L^2[0,1]$ и такая, что

$$\Phi_t(x_k,u_k)=1,\quad k=1,2,\dots.$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть x – произвольный элемент из $\bar{K}_t$; u – элемент из K такой, что имеет место равенство (40). Существование такого u гарантируется условием *д*. Положим

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i(u),\quad i=1,2,\dots,n, \tag{41}$$

где α_i – линейный функционал, определенный равенствам (34). Следует проверить, что это определение корректно в том смысле, что величина $\alpha_i(u)$ не зависит от выбора элемента u, удовлетворяющего равенству (40). Пусть V – какой-либо другой элемент из K такой, что $\Phi_t(x,v)=1$. Тогда в силу условий *б* и *в* будет $\Phi_t(u,v)=1$. Поэтому имеет место равенство (33), что и требовалось. Заметим, что отсюда, в частности, вытекает равенство

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\alpha_i(u),\quad i=1,2,\dots,n,\quad u\in K. \tag{42}$$

Проверим теперь, что для всех $x, y \in \bar{K}_t$ равенства (29) и (30) эквивалентны. Пусть выполняется (29). Подберем в соответствии с условием *д* элементы $u, v \in K$ так, чтобы

$$\Phi_t(x,u) = 1, \quad \Phi_t(y,v) = 1. \tag{43}$$

Из (29) с помощью условий *б* – *в* можно вывести, что $\Phi_t(u,v) = 1$ и поэтому в силу эквивалентности равенств (32) и (33) будет выполняться (32). Тогда согласно определению (40) должно выполняться равенство (30). Пусть обратно имеет место (30). По определению величин $\alpha_i^{(t)}$ найдутся такие $u, v \in K$, что

$$\Phi_t(x,u) = 1, \quad \Phi_t(y,v) = 1,$$
$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i(v). \tag{44}$$

Тогда из (30) следует, что $\alpha_i(u) = \alpha_i(v)$. Но в таком случае выполняется (32). Из (33) и первых двух равенств (44) с помощью условий *б* – *в* можно вывести (29).

Итак, нужно лишь доказать, что функционалы $\alpha_i^{(t)}(x)$ имеют вид (31). Проверим вначале, что эти функционалы аддитивны. Пусть x, y – произвольные элементы из $\bar{K}_t$; u, v – элементы из K, соответствующие им в силу условия *д*. Тогда имеет место равенство (43). Из условия *г* следует, что $\Phi_t(x+y, u+v) = 1$. По определению функционалов имеем

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i(v),$$
$$\alpha_i^{(t)}(x+y) = \alpha_i(u+v).$$

Но функционалы α_i аддитивны. Поэтому из трех последних равенств вытекает аддитивность функционалов $\alpha_i^{(t)}(x), i = 1, 2, ..., n.$

Покажем, что эти функционалы непрерывны в нуле. Пусть $\{x_k(\lambda,\tau)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность функций из $\bar{K}_t$, сходящаяся к нулю. Согласно условию *е* существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю и такая, что $\Phi_t(x_k, u_k) = 1$. Поскольку α_i – линейные функционалы, то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i(u_k) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Тогда из определения (13) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i^{(t)}(x_k) = 0, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Итак, функционалы $\alpha_i^{(t)}(x)$ на $\bar{K}_t$ аддитивны и непрерывны в нуле. Поскольку $\bar{K}_t$ – воспроизводящий конус в пространстве $\bar{L}_t^2$, эти функционалы являются однозначно продолжаемыми до линейных функционалов на всем пространстве $\bar{L}_t^2$. Согласно теореме об общем виде таких функционалов, существуют функции $A_i^{(t)}(\lambda,\tau) \in \bar{L}_t^2$ такие, что

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{t} e^{\tau} A_i^{(t)}(\lambda,\tau) x(\lambda,\tau) d\lambda d\tau,$$
$$x \in \bar{K}_t, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{45}$$

Применим полученный результат к функциям вида (35). Из (36) имеем

$$\Phi_t(\beta u, f_u^{(t)}(\beta) u) = 1.$$

Поскольку равенства (29) и (30) эквивалентны, это значит, что

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f_u^{(t)}(\beta) \cdot \alpha_i^{(t)}(u), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{46}$$

Исключив из первых двух равенств системы (46) величину $f_u^{(t)}(\beta)$, получаем

$$\alpha_1^{(t)}(\beta u) \cdot \alpha_2^{(t)}(u) = \alpha_2^{(t)}(\beta u) \cdot \alpha_1^{(t)}(u). \tag{47}$$

Это равенство справедливо для всех векторов $u \in K$. Однако линейные функционалы $\alpha_i^{(t)}$ определены при любых (не обязательно положительных) $u \in L^2[0,1]$. Покажем, что равенство (47) справедливо при всех таких u. Зафиксируем функцию $\beta(\tau)$ и рассмотрим произвольный элемент $u_0 \in L^2[0,1]$. Поскольку положительный конус K является воспроизводящим в этом пространстве, то найдутся такие элементы $u_1, u_2 \in K$, что

$$u_0 = u_1 - u_2. \tag{48}$$

Рассмотрим линейные функционалы на R^2:

$$a_i(\gamma) = \alpha_i^{(t)}(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2),$$
$$b_i(\gamma) = \alpha_i^{(t)}(\beta(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2)),$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in R^2$. При $\gamma_1, \gamma_2 \ge 0$ элемент $u = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 \in K$. Следовательно, для u имеет место равенство (47). Таким образом, при любых $\gamma_1, \gamma_2 \ge 0$ будет

$$b_1(\gamma) a_2(\gamma) = b_2(\gamma) a_1(\gamma). \tag{49}$$

Перепишем это равенство в координатах

$$(b_{11}\gamma_1 + b_{12}\gamma_2)(a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2) -$$
$$-(b_{21}\gamma_1 + b_{22}\gamma_2)(a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2) = 0, \tag{50}$$

где

$$b_{ik} = \alpha_i^{(t)}(\beta u_k), \quad a_{ik} = \alpha_i^{(t)}(u_k),$$
$$i = 1, 2, ..., n, \quad k = 1, 2.$$

Это значит, что многочлен от двух переменных, стоящий в левой части равенства (50), равен нулю на положительная квадранте. Но для многочлена это означает тождественное равенство нулю. Следовательно, (50) справедливо при всех γ_1, γ_2. В частности, при $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1$, поскольку $b_i(\gamma) = \alpha_i^{(t)}(\beta u_0)$, $a_i(\gamma) = \alpha_i^{(t)}(u_0)$, равенство (50) или, что то же самое, (49), примет вид

$$\alpha_1^{(t)}(\beta u_0) \alpha_2^{(t)}(u_0) = \alpha_2^{(t)}(\beta u_0) \alpha_1^{(t)}(u_0).$$

Таким образом, равенство (47) справедливо при всех n. Для любого линейного функционала α будем через $\mathrm{Ker}\,\alpha$ обозначать множество всех его нулей:

$$\mathrm{Ker}\,\alpha = \{x \mid \alpha(x) = 0\}.$$

Из (47) видно, что при обращении в нуль функционала $\alpha_1^{(t)}(u)$ должен обращаться в нуль хотя бы один из функционалов, стоящих в левой части равенства. Поэтому, обозначая функционалы $u \to \alpha_i^{(t)}(\beta u)$ через $\alpha_i^{(t)}(\beta)$, получаем $\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)} \subset \subset \operatorname{Ker}\alpha_2^{(t)} \cup \operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}(\beta)$. Если линейное многообразие является частью теоретико-множественного объединения двух других линейных многообразий, то оно обязано быть частью одного из них. Поэтому из последнего включения следует, что

$$\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)} \subset \operatorname{Ker}\alpha_2^{(t)} \tag{51}$$

или

$$\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)} \subset \operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}(\beta). \tag{52}$$

В случае (51) линейные функционалы $\alpha_1^{(t)}$ и $\alpha_2^{(t)}$ линейно зависимы. Но в соответствии с определением (41), $\alpha_1^{(t)}(u) = \alpha_i(u)$, причем, согласно предположению, функционалы $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – линейно независимые. Таким образом, включение (51) не может иметь места и, следовательно, справедливо (52). Но в таком случае существует такое число $f^{(t)}(\beta)$, что

$$\alpha_1^{(t)}(\beta) = f^{(t)}(\beta)\alpha_1^{(t)}.$$

Повторяя это рассуждение при $i = 2, 3, ..., n$, получаем аналогичное равенство для всех i, то есть при всех $u \in L[0,1]$:

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f^{(t)}(\beta)\alpha_i(u), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{53}$$

Это равенство является усилением равенства (46), так как из (53) видно, что величина $f_n^{(t)}(\beta)$ на самом деле не зависит от n. Поэтому равенство (37) можно переписать в виде

$$f^{(t)}(\beta) = \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau. \tag{54}$$

Подставляя в равенство (53) значения $\alpha_i^{(t)}(\beta u), f^{(t)}(\beta)$ и $\alpha_i^{(t)}(u)$ в виде (45), (54) и (34) соответственно, получаем

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}\beta(\tau)u(\lambda)A_i^{(t)}(\lambda,\tau)d\lambda d\tau =$$

$$= (\int_{-\infty}^{t} \beta(\tau)B(t-\tau)d\tau)\cdot(\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda).$$

Воспользовавшись теоремой Фубини, перепишем последнее равенство в виде

$$\int_0^1 u(\lambda)(\int_{-\infty}^{t} \beta(\tau)(e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) - g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau)d\lambda = 0.$$

Здесь $u(\lambda)$ – произвольный элемент положительного конуса K, то есть функция от переменной λ

$$\int_{-\infty}^{t} \beta(\tau)(e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) - g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau$$

ортогональна к этому конусу. Поскольку этот конус является воспроизводящим, отсюда следует, что эта функция равна нулю. Повторяя это рассуждение для функции $\beta(\tau)$, получаем, что

$$e^{\tau}A_i^{(t)}(\lambda,\tau) - g_i(\lambda)B(t-\tau) = 0.$$

Поэтому (45) можно переписать в виде (31). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$ обладает тем свойством, что для него равенство (29) и (30) эквивалентны. Для функций $u \in K$ равенство (31) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(u) = (\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)d\tau).$$

Поскольку функция $B(\xi)\,(\xi \geq 0)$ удовлетворяет равенству (5), это дает

$$\alpha_i^{(t)}(u) = \int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda.$$

Правая часть этого равенства не зависит от t. Значит, и левая часть не должна зависеть от t. В силу эквивалентности между равенствами (29) и (30) и ограничение предиката Φ_t на $K \times K$ не зависит от t. Таким образом, на $K \times K$ определен предикат Φ такой, что при всех $u, v \in K$ равенство $\Phi(u, v) = 1$ эквивалентно равенствам $\alpha_i(u) = \alpha_i(v)$, $i = 1, 2, ..., n$, где

$$\alpha_i(u) = \int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda,$$

$\{g_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ – линейно независимая система. Это и означает выполнимость условий A.

Проверим теперь выполнимость условий B. Пусть функция $x(\lambda,\tau)$ имеет вид (35). В этом случае равенство (31) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = (\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \tag{55}$$

Зафиксируем u и положим

$$f^{(t)}(\beta) = \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau. \tag{56}$$

Рассмотрим наряду с функцией $x(\lambda,\tau)$ функцию $x_\beta(\lambda,\tau) = f^{(t)}(\beta)\cdot u(\lambda)$. Эта функция не зависит от τ и, как видно из (55),

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = \alpha_i^{(t)}(f^{(t)}(\beta)u), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

В силу эквивалентности между равенствами (29) и (30) отсюда следует, что $\Phi_t(\beta u, f^{(t)}(\beta)u) = 1$. С другой стороны, если константа C при данных u и β удовлетворяет условию $\Phi_t(\beta u, Cu) = 1$, то в силу эквивалентности между равенствам (29) и (30) должно быть $\alpha_i^{(t)}(\beta u) = \alpha_i^{(t)}(Cu)$. Используя (55), перепишем это равенство в виде

$$(\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau) =$$

$$= (\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda)\cdot C\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда, из (56) и равенства (5) следует, что $C = f^{(t)}(\beta)$. Таким образом, условие B выполняется.

Проверим теперь выполнимость условий *г – е*. Выполнимость 4 очевидна. Пусть $x(\lambda,\tau)$ – произвольный элемент конуса $\bar{K}_t$. Положим при $\lambda\in[0,1]$

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau. \tag{57}$$

Покажем, что $u\in K$. Неотрицательность функции $u(\lambda)$ вытекает из неотрицательности функции $B(\xi)$. Далее имеем

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^{t}(e^{\sqrt{t-\tau}}B(t-\tau))\cdot(e^{-\sqrt{t-\tau}}x(\lambda,\tau))d\tau\le$$

$$\le\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{t-\tau}B^2(t-\tau)d\tau}\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x^2(\lambda,\tau)d\tau}\le$$

$$\le C\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{-(t-\tau)}x^2(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Мы воспользовались при оценке неравенством (5). Таким образом,

$$\int_0^1 u^2(\lambda)d\lambda\le C^2e^{-t}\int_0^1\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \tag{58}$$

Так как $x(\lambda,\tau)\in L_t^2$, то из последнего равенства видно, что $u\in L^2[0,1]$. Легко видеть, что $\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(u),\ i=1,2,...,n.$ Тогда $\Phi_t(x,u)=1$. Выполнимость условия *д* проверена. Заметим теперь, что неравенство (58) может быть переписано в виде

$$\|u\|\le Ce^{-\frac{t}{2}}\|x\|. \tag{59}$$

Здесь $\|u\|$ – норма элемента u в метрике $L^2[0,1]$; $\|x\|$ – норма элемента x в метрике $\bar{L}_t^2$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\bar{K}_t$ – произвольная, сходящаяся к нулю последовательность. Для каждого x_k выберем элемент $x_k\in K$ по формуле (57). Тогда $\Phi_t(x_k,u_k)=1$ и, как видно из (59), последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю в метрике $L^2[0,1]$. Выполнимость 6 проверена.

Теорема 2 доказана.

Обсудим теперь физический смысл условий теоремы. Рассмотрим задачу о математическом описании цветовой инерции. Пусть экран равномерно освещен излучением с изменяющимся во времени спектральным составом. Предполагается, что коэффициент диффузного отражения экрана во всех точках является одинаковым. Обозначим через $x(\lambda,\tau)$ спектральную плотность лучистой яркости в момент времени τ. Пусть $[\lambda_1,\lambda_2]$ – диапазон видимого спектра. С математической точки зрения конкретное значение величин λ_1 и λ_2 не существенно. Поэтому будем считать $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$. Пусть t – произвольно фиксированный момент времени. Будем говорить, что два излучения $x(\lambda,\tau)$ и $y(\lambda,\tau)$ t*-метамерны*, если они фотометрически уравниваются в момент времени t. Записывать утверждение о t*-мета-мерности* будем в виде $\Phi_t(x,y)=1$. Мы предполагаем, что Φ_t – отношение эквивалентности на множестве излучений. В этом смысл условий *а – в*.

Частным случаем рассматриваемых излучений являются излучения со спектральной плотностью, не изменяющейся во времени. Для таких стимулов t-метамерность означает классическую метамерность, то есть визуальную неразличимость в любой момент времени. Условия *А* являются математической записью законов Грассмана – аддитивности, трехмерности (при $n=3$) и непрерывности. Справедливость этих законов показана многочисленными экспериментами и в настоящее время является общепризнанной.

Другим частным случаем являются излучения с постоянным спектральным составом и изменяющейся во времени интенсивностью, то есть излучения со спектральной плотностью вида $x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)u(\lambda)$, где $u(\lambda)$ – спектральная плотность постоянного во времени излучения, $\beta(\tau)$ – интенсивность как функция времени. Такие излучения рассматривались в предыдущем параграфе и там обсуждался смысл предположений *В*.

Перейдем теперь к условиям *г – е*. Предположение *г* об аддитивности свойства t-метамерности в частных случаях постоянных во времени излучений или излучений с постоянным спектральным составом, но изменяющейся во времени интенсивностью означает соответственно закон аддитивности Грассмана и предположение об аддитивности эффективной яркости. Поэтому для указанных частных случаев предположения *г* можно считать экспериментально обоснованными.

Пусть теперь $x(\lambda,\tau)$ и $y(\lambda,\tau)$ – какая-либо пара излучений, для которой

$$\int_0^1 x(\lambda,\tau)g_i(\lambda)d\lambda=\int_0^1 y(\lambda,\tau)g_i(\lambda)d\lambda, \tag{60}$$

где $g_i(\lambda)$ – функции, фигурирующие в формуле (34). Произведем замену метамерных излучений, согласно которому зрительное ощущение таких стимулов совпадает в любой момент времени. В литературе отсутствуют данные о каких-либо специальных исследованиях по проверке такой замены. Известно, однако, что при скачкообразной замене во времени излучения $u(\lambda)$ метамерным излучением $v(\lambda)$ наблюдатель не замечает каких-либо изменений в зрительном ощущении. На этом факте основан колориметрический метод, при котором излучения сравниваются не при одновременном, а при последовательном предъявлении. В другом частном случае, когда стимулы не зависят от времени, указанный принцип замены является основным следствием законов Грассмана. Таким образом, для некоторых классов излучений этот принцип выполняется. Очевидно, предположение об аддитивности t-метамерности хорошо согласуется с принципом замены метамерных излучений.

Пусть $u_1(\lambda),u_2(\lambda),u_3(\lambda)$ – какая-либо система излучений, удовлетворяющая тому условию, что любое излучение может быть фотометрически уравнено смешением излучений этой системы. В колориметрии такие системы называются основными. Тогда для любого излучения $x(\lambda,\tau)$ однозначно определены три таких функции времени $\beta_1(\tau),\beta_2(\tau),\beta_3(\tau)$, что в любой момент времени t излучения $x(\lambda,\tau)$ и $\sum_{i=1}^{3}\beta_i(\tau)u_i(\lambda)$ визуально не различимы, то есть

$$\Phi_t(x,\sum_{i=1}^{3}\beta_i u_i)=1. \qquad (61)$$

Именно этот факт лежит в основе цветного телевидения. Роль $x(\lambda,\tau)$ в (61) играет передаваемое излучение, $u_i(\lambda)$ – спектральные характеристики чувствительности трех каналов камеры, $\beta_i(\tau)$ – напряжения сигналов, передаваемых по этим каналам. В частных случаях излучений, не меняющихся во времени или меняющихся по интенсивности при постоянном спектральном составе, величины $\beta_i(\tau)$ при всех τ аддитивно зависят от излучения $x(\lambda,\tau)$. Поэтому есть основания считать, что этот факт имеет место и в общем случае. Если бы было получено экспериментальное подтверждение этого предположения, то оно служило бы сильным аргументом в пользу предположения об аддитивности t-метамерности.

Итак, существуют экспериментальные данные, в тех или иных случаях подтверждающие аддитивность t-метамерности, но не известны какие-либо экспериментальные исследования, направленные непосредственно на проверку этого предположения.

Обсудим теперь физический смысл условия *д*. Пусть $x(\lambda,\tau)$ – произвольное излучение; $\beta_i(\tau)$ – функции времени, согласованные с x условием (61). В силу оговоренного в предыдущем параграфе предположения о существовании эффективной яркости для любого момента времени t существуют три такие числа $f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)$, что

$$\Phi_t(\beta_i u_i, f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)u_i)=1.$$

Тогда из аддитивности отношения Φ_t следует, что

$$\Phi_t(\sum_{i=1}^{3}\beta_i u_i,\sum_{i=1}^{3}f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)u_i)=1. \qquad (62)$$

Полагая

$$u=\sum_{i=1}^{3}f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)u_i, \qquad (63)$$

из (61) и (62) получаем

$$\Phi_t(x,u)=1.$$

Другими словами, в силу экспериментального факта (61) предположение *д* справедливо, если справедливо предположение *г* об аддитивности.

Из практики цветного телевидения хорошо известно, что передачу слабого сигнала $x(\lambda,\tau)$ можно обеспечить низкими напряжениями $\beta_i(\tau)$, передаваемыми по каналам. То есть если

$$\lim_{k\to\infty}x_k=0,$$

то для функций β_i^k $(i=1,2,3)$, согласованных с x_k условиями (61), тоже должно быть

$$\lim_{k\to\infty}\beta_i^{(k)}=0,\quad i=1,2,3.$$

Поскольку эффективные яркости непрерывно зависят от яркостей, то и

$$\lim_{k\to\infty}f_{u_i}^{(t)}(\beta_i^{(k)})=0.$$

Тогда, как это видно из (63), последовательность u_k тоже сходится к нулю. Таким образом, выполнимость на практике условия е не вызывает сомнения.

3. Двухпараметрические семейства

Условимся обозначать через $L^2(R^2)$ пространство измеримых на вещественной плоскости R^2 функций, удовлетворяющих условию

$$\iint e^{-(u^2+v^2)}x^2(u,v)dudv<\infty, \qquad (64)$$

$K(R^2)$ – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_z(x,y)$ ($z\in R^2$ – параметр), каждый из которых определен на $K(R^2)\times K(R^2)$ и удовлетворяет условиям *а* – *в*. В настоящем параграфе устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы имело место равенство

$$\Phi_z(x,y)=D(\iint Q(u-\xi,v-\eta)x(u,v)dudv, \iint Q(u-\xi,v-\eta)y(u,v)dudv), \qquad (65)$$

где D – предикат равенства, $z=(\xi,\eta)\in R^2$, $Q(u,v)$ – некоторая почти всюду неотрицательная функция.

Положим для любой функции $x\in K$ и любого $\zeta=(\xi,\eta)\in R^2$

$$\tilde{x}_\zeta(u,v)=x(u-\xi,v-\eta). \qquad (66)$$

Функция $\tilde{x}_\zeta$ является сдвигом функции по оси абсцисс на величину ξ и оси ординат на величину η.

Теорема 3. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_z(x,y)$ нашлась почти всюду неотрицательная функция Q, удовлетворяющая при любых $\xi,\eta\in R^1$ условиям*

$$\iint e^{(u-\xi)^2+(v-\eta^2)}Q^2(u,v)dudv<\infty,$$

$$\iint Q(u,v)dudv=1$$

и такая, что имеет место равенство (65), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям

г) для любых $z\in R^2$ и $x,x',y,y'\in K(R^2)$ из равенств

$$\Phi_z(x,x')=1 \text{ и } \Phi_z(y,y')=1$$

следует, что

$$\Phi_z(x+y, x'+y')=1;$$

д) для любого $z \in R^2$ *и любого* $x \in K(R^2)$ *существует единственное неотрицательное число* $[fx](z)$ *такое, что*

$$\Phi_z(x,[fx(t))=1; \qquad (67)$$

е) величина $[fx](t)$ *как функция от* x *при любом* $z \in R^2$ *непрерывна в метрике* $L^2(R^2)$;

ж) для любого $z \in R^2$, *любых* $x, y \in K(R^2)$ *и любого* $\xi \in R^2$ *из равенства*

$$\Phi_z(x, y)=1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{z+\zeta}(\tilde{x}_\zeta, \tilde{y}_\zeta)=1.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 1 и поэтому мы его опустим.

Обсудим теперь возможные психофизические приложения этой теоремы. Речь будет идти об иррадиации зрения. Явление иррадиации состоит в том, что реакция зрительной системы на изображение при фиксации зрения на определенной точке пространства зависит не только от яркости зрительной картины в данной точке, но и от яркости в других точках пространства. В результате воздействие в данной точке является интегральным в физическом смысле этого слова. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что математическое описание преобразования зрительной информации, учитывающее это явление, является также интегральным, но уже в математическом смысле этого слова.

Предположим, что наблюдателю предъявляется зрительная картина, не изменяющаяся во времени. В настоящем параграфе мы используем разницу в спектральном составе излучений в различных точках этой картины. Пусть $x(u,v)$ – яркость излучения в точке картины с координатами (u,v). Зафиксируем какую-либо точку z зрительной картины с координатами (ξ,η). Предположим, что для любой зрительной картины $x(u,v)$ существует такая не изменяющаяся от точки к точке зрительная картина, то есть картина с постоянной яркостью $[fx](z)$, что обе картины уравниваются наблюдателем, сравнивающим их воздействия в фиксированной точке z. Это, разумеется, не значит, что зрительная система не различает эффектов от воздействия этих картин в других, отличных от z, точках. Величину $[fx](z)$, по аналогии с соответствующей величиной, возникающей при изучении инерции зрения, естественно называть эффективной яркостью зрительной картины в точке z.

Вообще эффект уравнивания зрительной системой двух зрительных картин $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в точке z будем обозначать равенством

$$\Phi_z(x, y)=1. \qquad (68)$$

В этих обозначениях условие *д* теоремы 3 является записью предположения о существовании эффективной яркости.

Рассмотрим условие *ж*. Для любой зрительной картины $x(u,v)$ зрительная картина $\tilde{x}_\zeta(u,v)$, определенная равенством (66), является сдвигом на вектор ζ. С другой стороны, предикат $\Phi_{z+\zeta}(x,y)$ отличается от предиката $\Phi_z(x,y)$ тем, что описывает сравнение наблюдателем зрительных изображений не в точке *z*, а в точке, сдвинутой на тот же вектор ζ. Понятно, что зрительное уравнение картины $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в точке z означает зрительное уравнивание картин $\tilde{x}_\zeta(u,v)$ и $\tilde{y}_\zeta(u,v)$ в точке $z+\zeta$. Другими словами, условие *ж* означает независимость от выбора нулевой точки системы координат.

Наиболее существенным с прикладной точки зрения является условие аддитивности *г*. Существуют экспериментальные данные, дающие основание для предположения о его выполнимости. В первую очередь это относится к экспериментам со зрительными картинами, состоящими из последовательности конгруэнтных полос, на каждой из которых уровень яркости принимает поочередно одно из двух фиксированных значений. Если ширина этих полос достаточно мала, то зрительная система воспринимает такую картину как картину с постоянной яркостью. Согласно пространственному закону Талбота уровень яркости этой постоянной картины равен среднему значению яркости исходной. Проверим, что отсюда вытекает условие аддитивности для зрительных картин такого класса. Пусть $x(u,v)$, $x'(u,v)$, $y(u,v)$, $y'(u,v)$ – четыре зрительные картины из сливающихся чередующихся полос, причем картины $x \subset x'$ и $y \subset y'$ воспринимаются одинаково зрительной системой в точке $z=(\xi,\eta)$, то есть

$$\Phi_z(x,x')=1, \quad \Phi_z(y,y')=1. \qquad (69)$$

Пусть $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}'$ – средние значения яркостей зрительных картин x, x', y, y' соответственно. Тогда согласно закону Талбота

$$\begin{aligned}&\Phi_z(x,\bar{x})=1, \quad \Phi_z(x',\bar{x}')=1,\\ &\Phi_z(y,\bar{y})=1, \quad \Phi_z(y',\bar{y}')=1.\end{aligned} \qquad (70)$$

Средняя яркость картины $x+y$ равна $\bar{x}+\bar{y}$. Поэтому по закону Талбота

$$\Phi_z(x+y, \bar{x}+\bar{y})=1. \qquad (71)$$

Аналогично

$$\Phi_z(x'+y', \bar{x}'+\bar{y}')=1. \qquad (72)$$

Но из (69) и (70) в силу условий *б* и *д* следует, что

$$\Phi_z(x,x')=1, \quad \Phi_z(y,y')=1.$$

Поскольку зрительные картины $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}'$ постоянны, то два последних равенства могут выполняться лишь если

$$\bar{x} = \bar{x}', \quad \bar{y} = \bar{y}'.$$

Но тогда

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}' + \bar{y}'. \tag{73}$$

Из (71), (72) и (73) вытекает, что

$$\Phi_z(x + y, x' + y').$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим обобщение пространственного закона Талбота, состоящее в следующем. Пусть $\{x_n\}_1^\infty$ – произвольная последовательность излучений, сходящихся к некоторому (не обязательно постоянному по u, v) излучению x в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\Omega x_n(u,v)dudv = \iint_\Omega x(u,v)dudv,$$

где Ω – любое измеримое ограниченное множество. Тогда при достаточно больших n излучения x_n и x визуально не различимы. Рассуждая так же, как и выше, можно показать, что из этого вытекает аддитивность для достаточно широкого класса зрительных картин.

Выясним теперь вопрос о том, при каких дополнительных условиях на предикат $\Phi_z(x, y)$ можно уточнить теорему 3, конкретизируя вид ядра $Q(u,v)$ в виде функции, зависящей только от расстояния точки (u,v) от нуля. В этом случае формула (64) принимает вид

$$\begin{gathered}\Phi_z(x, y) = D(\iint T((u-\xi)^2 + (v-\eta)^2)x(u,v)dudv, \\ \iint T((u-\xi)^2 + (v-\eta)^2)y(u,v)dudv),\end{gathered} \tag{74}$$

где D – предикат равенства, $z = (\xi, \eta) \in R^2$; T – почти всюду неотрицательная функция.

Пусть $x(u,v)$ – произвольная функция; θ – произвольное число из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Положим

$$\bar{x}_\theta(u,v) = x(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta), \tag{75}$$

то есть функция $\bar{x}_\theta$ получается из функции x в результате поворота вокруг нуля на угол θ.

Теорема 4. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_z(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная на полуоси $[0, \infty)$ функция T, удовлетворяющая при любых ξ, η условиям*

$$\begin{gathered}\iint e^{(u-\xi)^2+(v-\eta)^2} T^2(u^2+v^2)dudv < \infty, \\ \int_0^\infty T(r)dr = \frac{1}{\pi}\end{gathered} \tag{76}$$

и такая, что имеет место равенство (74), необходимо и достаточно, чтобы семейство удовлетворяло условиям г – ж теоремы 3 и условию

з) для любых $x, y \in K(R^2)$ и любого $Q \in [0, 2\pi)$ из равенства

$$\Phi_0(x, y) = 1 \tag{77}$$

вытекает равенство

$$\Phi_0(\bar{x}_\theta, \bar{y}_\theta) = 1\,. \tag{78}$$

Доказательство. *Достаточность.* Поскольку выполняются условия *г – ж*, то в силу теоремы 3 имеет место равенство (65). Пусть x – произвольный неотрицательный элемент из $K(R^2)$. Из условия *д* имеем

$$\Phi_0(x, [fx](0)) = 1.$$

Тогда из условия *з* получаем

$$\Phi_0(\bar{x}, ([\bar{f}x](0))_\theta) = 1. \tag{79}$$

Но согласно условию *д* единственной константой C, удовлетворяющей условию $\Phi_0(\bar{x}_\theta, C) = 1$, является $C = [f\,\bar{x}_\theta](0)$. Поэтому из (79) имеем

$$([\bar{f}x](0))_\theta = [f\,\bar{x}](0). \tag{80}$$

Но постоянная функция $[fx](0)$ не изменяется при преобразовании координат (75), так что

$$[\bar{f}x](0)_\theta = [fx](0).$$

Сравнивая это равенство с (79), получаем

$$[f\,\bar{x}_\theta](0) = [fx](0).$$

Подставляя сюда выражения для $[f\,\bar{x}_\theta](0)$ и $[fx](0)$. в виде (65), находим

$$\begin{gathered}\iint Q(-u, -v)x(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)dudv = \\ = \iint Q(-u, -v)x(u, v)dudv.\end{gathered}$$

Сделав в этом интеграле замену переменных, перепишем это равенство в виде

$$\begin{gathered}\iint Q(-u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta - v\cos\theta)x(u, v)dudv = \\ = \iint Q(-u, -v)x(u, v)dudv.\end{gathered}$$

Поскольку x – произвольный элемент из $K(R^2)$, и $K(R^2)$ – воспроизводящий конус, отсюда следует, что

$$\begin{gathered}Q(-u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta - v\cos\theta) = \\ = Q(-u, -v)\end{gathered} \tag{81}$$

для всех $(u,v) \in R^2$ и всех θ. Зафиксируем произвольное $R \ge 0$. Пусть (u,v) и (u',v') – две произвольные точки, удовлетворяющие условию

$$u^2 + v^2 = R^2 \text{ и } (u')^2 + (v')^2 = R^2.$$

Тогда точка (u',v') может быть получена из точки (u,v) поворотом на некоторый угол θ и, следовательно,

$$u' = u\cos\theta - v\sin\theta, v' = u\sin\theta + v\cos\theta.$$

Но тогда из (81) следует, что

$$Q(u', v') = Q(u, v). \tag{82}$$

Таким образом, равенство $u'^2 + v'^2 = u^2 + v^2$ влечет за собой равенство (82). Это и означает, что

$$Q(u, v) = T(u^2 + v^2), \tag{83}$$

где T – некоторая функция на $[0, \infty)$. Подставляя $Q(u, v)$ в виде (83) в (65), приходим к (74). Неотрицательность функции T вытекает из неотрицательности функции Q.

Из условий, которым удовлетворяет функция $Q(u,v)$, вытекает неравенство (76) и равенство

$$\iint T(u^2+v^2)dudv=1.$$

Сделаем в последнем интеграле полярную замену переменных. Получаем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} T(\rho^2)\rho d\rho = 1.$$

Еще одна замена координат $\rho^2 = r$ приводит к равенству

$$\pi\int_0^{\infty} T(r)dr = 1.$$

Таким образом, соотношения (76) выполняются.

Необходимость. Пусть имеет место равенство (74) с неотрицательной на $[0,\infty)$ функцией T, удовлетворяющей условиям (76). Поскольку (74) является частным случаем формулы (65), то в силу теоремы 3 выполняются условия *г – ж*. Пусть x и y – произвольные элементы из K, для которых справедливо (77). В силу формулы (74) имеем

$$\begin{aligned}&\iint T((u')^2+(v')^2)x(u',v')du'dv' = \\ &= \iint T((u')^2+(v')^2)y(u',v')du'dv'.\end{aligned} \qquad (84)$$

Сделав замену переменных при произвольно фиксированном θ

$$u' = u\cos\theta + v\sin\theta, \;\; v' = -u\sin\theta + v\cos\theta,$$

преобразуем (84) к виду

$$\begin{aligned}&\iint T(u^2+v^2)x(u\cos + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)dudv = \\ &= \iint T(u^2+v^2)y(u\cos + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)dudv,\end{aligned}$$

то есть

$$\iint T(u^2+v^2)\bar{x}_\theta(u,v)dudv = \iint T(u^2+v^2)\bar{y}_\theta(u,v)dudv.$$

Но тогда в силу (74)

$$\Phi_0(x_0,y_0)=1.$$

Теорема 4 доказана.

Выводы

В статье решена задача структурной компараторной идентификации в виде интегральных операторов специального вида – однопараметрических операторов, описывающие инерционные процессы, в частности, в зрительной системе человека; операторы с распадающимися и разностными ядрами, описывающие процессы цветовой инерции в случаях, когда излучения имеют спектральную плотность, не меняющуюся во времени или постоянный спектральный состав и изменяющуюся во времени интенсивность; двухпараметрические семейства операторов, применяемые для моделирования явления иррадиации зрения. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид и условия существования соответствующих операторов.

Список литературы: **1.** *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3.** *Бондаренко, М.Ф.* Интегральные представления линейных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78. **4.** *Бондаренко, М.Ф.* Дедуктивное построение теории цвета предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 79-85.

Поступила в редколлегию 28.04.2011.

УДК 519.7

Моделі компараторної ідентифікації у вигляді сімейств інтегральних одно- і двохпараметричних операторів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 86-97.

Вирішено завдання структурної компараторної ідентифікації у вигляді інтегральних операторів спеціального виду - однопараметричних операторів; операторів з ядрами, що розпадаються і різницевими, які описують процеси колірної інерції у випадках, коли випромінювання мають спектральну щільність, що не змінюється в часі, або постійний спектральний склад і інтенсивність, що змінюються в часі; двохпараметричних сімейств операторів, вживаних для моделювання явища іррадіації зору.

Іл. 1. Бібліогр.: 4 найм.

UDC 519.7

Models of comparator identification as one- and two-parameters integral operators families / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 86-97.

The task of structural comparator identification is decided as integral operators of the special kind - oneself-reactance operators; operators with disintegrating and differential kernels, describing the processes of colour inertia in the cases when radiations have a spectral closeness, not changing in time or permanent spectral composition and time-varying intensity; two-parameter families of operators, applied for the sight irradiation phenomenon design.

Fig. 1. Ref.: 4 items.