УДК 004.021:519.878

И. В. Гребенник [1], Л. Н. Ребезюк [2], Е. Л. Ребезюк [3]

[1] ХНУРЭ, г.Харьков, Украина, grebennik@kture.kharkov.ua
[2] ХНУРЭ, г.Харьков, Украина, rebezyuk@kture.kharkov.ua
[3] ХНУРЭ, г.Харьков, Украина, stdep@kture.kharkov.ua

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ПОИСКА В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Предлагается подход к математическому описанию задачи поиска экстремума унимодальной функции в условиях действия случайных возмущений на основе рассмотренного в работе понятийного аппарата и анализа общей схемы одномерного поиска в условиях действия случайных возмущений.

ОДНОМЕРНЫЙ ПОИСК, СЛУЧАЙНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ИНТЕРВАЛ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ТОЧКИ ЭКСПЕРИМЕНТОВ, РЕШАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ, СТРАТЕГИЯ ПОИСКА

Введение

При решении задач оптимизации, а также при создании помехоустойчивых преобразователей формы информации компенсационного типа, являющихся неотъемлемой частью любой системы автоматизированного или автоматического управления, возникает необходимость решения задачи поиска в условиях действия случайных возмущений. При этом процесс поиска осуществляется детерминированными методами поиска точки экстремума унимодальной функции.

Однако, как это следует из работ [1-4], классические методы одномерного поиска: дихотомии, золотого сечения [1, 2], алгоритм Кифера [3, 4] не являются помехоустойчивыми, и к настоящему времени не создано метода поиска в условиях действия случайных возмущений, накладываемых на процесс поиска.

Кроме этого, функционирование в условиях действия случайных возмущений (помех) любой системы автоматизированного или автоматического управления сопровождается сбоями, которые не всегда могут быть обнаружены методами информационной и структурной избыточности. В этой связи возникает необходимость в особой организации проектирования таких систем, которая смогла бы выявлять не обнаруженные традиционными методами сбои и отказы системы. Такая организация проектирования систем предполагает использование специальных методов поиска, подавляющих действие случайных возмущений (помех) определенного вида и корректирующих случайное блуждание точки экстремума унимодальной функции, и вводить наряду с различными видами избыточности программную (процедурную) избыточность.

Таким образом, возникает задача разработки специальных методов поиска точки экстремума унимодальной функции в условиях действия случайных возмущений, накладываемых на процесс поиска, и, прежде всего, разработка математической модели одномерного поиска в условиях действия случайных возмущений.

1. Основные понятия и определения задачи одномерного поиска в условиях действия случайных возмущений

Особенностью методов поиска экстремума унимодальной функции путем сокращения интервала неопределенности является то, что в некоторых точках, к примеру, x_1 и x_2, исходного интервала непосредственности (a,b) определяют экспериментально или аналитически значение функции $f(x)$ (совершают в точках x_1 и x_2 эксперименты). Пусть таковыми являются значения $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$, а функция $f(x)$ является выпуклой. Тогда на основании сопоставления y_1 и y_2 можно сделать заключение о новом интервале неопределенности относительно точки x^*, в котором функция принимает наибольшее значение.

Действительно, пусть имеет место соотношение $y_1 > y_2$. Тогда в силу унимодальности функции правее точки x_2 точка x^* не может располагаться [3]. На этом основании новым полуоткрытым интервалом относительно x^* будет $(a,x_2]$. Если же справедливо неравенство $y_1 < y_2$, то в силу унимодальности функции левее точки x_1 точка x^* не может располагаться. Поэтому будет справедливо такое выражение $x^* \in [x_1,b)$. Если же $y_1 = y_2$, то на основании унимодальности функции $f(x)$ утверждают, что $x^* \in [x_1,x_2]$. В этом случае в выделенном интервале выбирают другие точки x_3 и x_4 и определяют экспериментальным или аналитическим способом значения $y_3 = f(x_3)$, $y_4 = f(x_4)$ и продолжают описанным выше способом процесс уменьшения интервала неопределенности относительности x^*.

Из краткого описания общей схемы поиска x^* путем сокращения интервала неопределенности следует, что каждое из направлений поиска характеризуется длиной поиска, количеством возможных экспериментов, способом размещения точек экспериментов в исходном интервале и правилами обработки полученных результатов (в рассмотренном случае попарно сравнивались значения функции $f(x)$).

На основании обработки результатов эксперимента (найденных значением $f(x)$) формируют новый интервал. В теории поиска функция, на основании которой создают новый интервал неопределенности, называется решающей функцией [3, 5], а функция, на основании которой формируют значения координат точки экспериментов во вновь выделенном интервале, – стратегией поиска. Итак, для того чтобы построить какой-то метод поиска x^*, необходимо знать длину поиска, количество возможных экспериментов, определить стратегию поиска и решающую функцию. Для одних и тех же параметров поиска (длины поиска и количества возможных экспериментов) существует множество вариантов поиска. Выделение из множества вариантов поиска "оптимального" осуществляется на основании критерия оценки эффективности поиска. Оптимальным поиском x^* для минимаксного критерия оптимальности является метод Кифера, точки экспериментов которого выбирают на основании чисел Фибоначчи [5, 6]. Однако, как это отмечается в работе [3], этот метод не является помехоустойчивым и "...в настоящее время не создано оснований более широкой теории, которая охватывала бы этот результат (алгоритм Кифера) совместно с результатами, относящимися к стохастической аппроксимации".

В процессе поиска точки x^* могут действовать случайные возмущения (помехи), искажающие реальное значение $f(x)$, т.е. будет иметь место случайное блуждание точки x^* в процессе поиска в исходном интервале, которое, в свою очередь, приводит к дополнительным ошибкам в определении нового интервала неопределенности. Все это приведет к значительному усложнению как стратегии поиска, так и решающей функции.

Для того чтобы в рамках теории поиска описать задачу разработки методов поиска x^* в условиях действия случайных возмущений путем уменьшения интервала неопределенности и случайного блуждания x^* введем ряд понятий и определений. Под экспериментом будем понимать определение истинности предиката [3, 5]:

$$P\left\{f_j(x_\beta^j)=\max_{\rho=\overline{1,k}}\{f_j(x_\rho^j)\}\right\}, \qquad (1)$$

где $f_j(x_\rho^j)$ – значение функции $f(x)$ в точке x_ρ^j, сформированное или вычисленное в условиях действия случайного возмущения на *j*-м шаге поиска; x^* – искомая точка, т.е. точка, в которой функция $f(x)$ принимает максимальное значение, $x^* \in [0,1]$; x_ρ^j – точка эксперимента, выбранная на *j*-м шаге поиска, $\rho=\overline{1,k}$ (на j-м шаге одновременно выбирают k таких точек); j – номер шага поиска, $j=\overline{1,i}$; i – длина поиска [5;6] (количество шагов поиска).

Будем в дальнейшем предполагать, что если в точке x_ρ^j экспериментально или аналитически найдено значение функции $f_j(x_\rho^j)$, то оно может использоваться на последующих шагах (в этом случае значение $f_j(x_\rho^j)$ запоминается); если в точке x_ρ^j сформировано (например, некоторым устройством) значение функции $f_j(x_\rho^j)$, то его невозможно использовать на последующих шагах (в этом случае значение $f_j(x)$) не запоминается и, как следует из соотношения (1), таких значение функции должно быть не менее двух).

Пусть за ℓ шагов поиска требуется сформировать или определить значение функции $f(x)$ в точках $X=\{x_1,...x_q,...x_m\}$, для которых справедливы соотношения: $x_q \in [0,1]$ $q=\overline{1,m}$; $x_\rho^j \in X$. Тогда методом поиска назовем правило, по которому выбирается та или иная последовательность точек экспериментов из множества X.

Положим также, что одновременно выбирается k точек экспериментов. При этом, если $k=m$, то метод назовем параллельным (пассивным [3]); если $k=1$ (значения $f(x)$ определяются и запоминаются) или $k=2$ (значения $f(x)$ формируются и не запоминаются), то – последовательным; если имеет место соотношение $1<k<m$ (значения $f(x)$ запоминаются) или выражение $2<k<m$ (значение $f(x)$ формируются), то метод назовем параллельно-последовательным.

Условимся под шагом (ходом) поиска понимать следующую совокупность действий: формирование или определение k значений функций $f(x)$; выполнение эксперимента типа (1) и выделение нового интервала неопределенности (длительность шага обозначим символом Δt). Из введенного нами понятия эксперимента следует, что для его выполнения необходимо определить координаты k точек экспериментов, принадлежащих некоторому отрезку $[a,b]\subset[0,1]$. Формирование этого отрезка осуществляется на основе результатов экспериментов или одного эксперимента решающей функцией. В общем случае решающая функция определяется результатами ранее выполненных экспериментов и результатом только последнего эксперимента. Координаты точек экспериментов формируются на j-м шаге другой функцией, которая, как нам уже известно, называется стратегией поиска. Точки экспериментов разбивают исходный интервал неопределенности на j-м шаге поиска на k пересекающихся полуоткрытых интервалов. Действительно, пусть на $(j-1)$-м шаге поиска сформирован полуоткрытый интервал неопределенности $[\tilde{x}_{q+1}^{j-1},\tilde{x}_{q+1}^{j-1})$, а при выполнении j-го шага поиска выбраны следующие точки экспериментов: $x_1^j,x_2^j,...,x_\rho^j,...,x_k^j$. Тогда возможны следующие исходы (см. соотношение (1)):

$$\max_{\rho=\overline{1,k}}\{f_j(x_\rho^j)\}=f_j(x_1^j);$$

$$\max_{\rho=\overline{1,k}}\{f_j(x_\rho^j)\}=f_j(x_2^j);$$

. . . .

$$\max_{\rho=\overline{1,k}}\{f_j(x_\rho^j)\}=f_j(x_\rho^j);$$

. . . .

$$\max_{\rho=\overline{1,k}}\{f_j(x_\rho^j)\}=f_j(x_k^j).$$

Для непомехоустойчивых методов поиска, как это следует из особенностей их стратегий, соответственно выделяются такие полуоткрытые интервалы:

$$[\tilde{x}_{q-1}^{j-1}, x_2^j),\ [x_1^j, x_3^j), \dots, [x_{\rho-1}^j, x_{\rho+1}^j), \dots, [x_{k-1}^j, \tilde{x}_{q+1}^{j-1}).$$

Для помехоустойчивых методов, как это будет показано, выделяется столько же полуоткрытых интервалов неопределенности относительно x^*, их отличие состоит в особом формировании начальных и конечных точек.

Метод поиска x^* определяется параметрами i и k, изменением в процессе поиска координаты точки x^* и случайным возмущением $\xi(t)$, накладываемым на процесс поиска.

В процессе поиска возможны следующие характерные случаи:

а) в процессе поиска координаты x^* не изменяются (x^* не меняет своего местоположения на отрезке $[0,1]$) и случайные возмущения отсутствуют;

б) в процессе поиска x^* не меняет своего местоположения и на процесс поиска накладываются случайные возмущения;

в) в процессе поиска x^* меняет свое местоположение и случайные возмущения отсутствуют;

г) в процессе поиска изменяется координата точки x^* и на процесс поиска накладываются случайные возмущения $\xi(t)$.

Методы, осуществляющие поиск для условий случая а), являются непомехоустойчивыми; методы, синтезированные для условий случая б), являются помехоустойчивыми; методы, осуществляющие поиск в условиях случая в), являются корректирующими.

Эффективность методов поиска x^* будем оценивать длиной интервала неопределенности, полученного на последнем шаге поиска [5,7]. В общем случае длина интервала неопределенности определяется функцией $f(x)$ из заданного множества унимодальных функций F и методом поиска. Поэтому в качестве оценки эффективности Z_1-го метода поиска возьмем величину (рассматривается наихудший случай):

$$L_{Z_1} = \max_{f \in F}\{\ell_i(f, Z_1)\} + \varepsilon, \tag{2}$$

где ε — минимально возможное расстояние между двумя соседними точками экспериментов; $\ell_i(f, Z_1)$ — длина интервала неопределенности, полученного на последнем шаге Z_1-го метода поиска.

Оптимальным методом назовем метод, оценка которого удовлетворяет соотношению:

$$\max_{f \in F}\{\ell_i(f, Z_1^*)\} \le \min_{Z_1 \in M_1} \max_{f \in F}\{\ell_i(f, Z_1)\} + \varepsilon, \tag{3}$$

где M_1 — множество возможных методов поиска.

Обратную величину от L_{Z1} обозначим $\varphi_{Z_1}(i,k)$, которая в работе [7] названа (i,k)-точностью метода поиска. В данной работе в основном используется такая оценка эффективности метода, которая показывает, на сколько равных частей длины L_{Z1} разбивается первоначальный интервал неопределенности. Для такой оценки эффективности метода поиска оптимальным методом с параметрами i и k назван метод, для которого справедливо соотношение

$$\varphi_{Z_1^*}(i,k) = \max_{Z_1 \in M_1} \varphi_{Z_1}(i,k).$$

Для того, чтобы подчеркнуть специфику методов, осуществляющих поиск в различных условиях, их оценки эффективности при заданных i и k будем обозначать посредством различных символов функций двух переменных:

$$\varphi(i,k),\ \varphi_Z(i,k), \dots,\ \psi_\ell^\nu(i,k).$$

Стратегия поиска, синтезированная на основании критерия оптимальности (3), названа ε — минимаксной стратегией [5].

2. Общая схема одномерного поиска в условиях действия случайных возмущений

Процесс поиска, как уже отмечалось, состоит из последовательности шагов. Для первого шага интервала неопределенности относительно x^* служит отрезок $[0,1]$, который k точками экспериментов разбивается на k полуоткрытых пересекающихся интервалов:

$$A_1 = \{[0, x_2^1), [x_1^1, x_3^1), \dots, [x_{k-1}^1, 1)\}. \tag{4}$$

Признаком того, что $x^* \in [x_{\beta-1}^1, x_{\beta+1}^1)$, является истинность такого соотношения

$$P\left\{f(x_\beta^1) = \max_{\rho=\overline{1,k}}\left\{f(x_\rho^1)\right\}\right\} = 1.$$

На втором шаге поиска полуоткрытый интервал $[x_{\beta-1}^1, x_{\beta+1}^1)$ разбивается в результате выбора новых точек экспериментов и выполнения эксперимента на k полуоткрытых интервалах и т.д.

В процессе поиска действуют случайные возмущения $\xi(t)$, поэтому в эксперименте на j-м шаге поиска сопоставляются между собой величины $f_j(x_\rho^j)$, где $\rho = \overline{1,k}$, которые можно представить в таком виде (значения $f(x)$ запоминаются):

$$f_j(x_\rho^j) = f_j(x_\rho^j + \xi'(t));$$

$$\xi'(t) \in [\xi'_{\min}, \xi'_{\max}];\ \xi(t) \in [\xi_{\min}, A];$$

$$\xi_{\min} = \xi'_{\min}/(x_{\max}^* - x_{\min}^*);\ A = \xi'_{\max}/(x_{\max}^* - x_{\min}^*), \tag{5}$$

где $\xi(t)$ — нормированное значение случайного возмущения в момент времени t; $[x_{\max}, x_{\min}]$ — исходный интервал неопределенности относительно x^*.

Поскольку в общем случае $f(x_\rho^j) \ne f_j(x_\rho^j)$, то интервал неопределенности относительно x^* на j-м шаге выделяется с ошибкой, а вероятность события $P_1\{x^* \in [x_{q-1}^j, x_{q+1}^j)\}$, где x_q^j удовлетворяет соотношению $P\{f_j(x_q^j) = \max_{\rho=\overline{1,k}} f_j(x_\rho^j)\} = 1$, меньше единицы. Если в этом интервале планировать распределение точек экспериментов, то с вероятностью $(1 - P_1)$ возникает ошибка в определении местоположения x^*.

Если $[x_{q-1}^j, x_{q+1}^j)$ путем его расширения (значение $f_j(x_\rho^j)$ формируется) преобразовать в полуоткрытый интервал $[x_{q-1}^{j,1}, x_{q+1}^{j,2})$, для которого

$x_{q-1}^{j,1} = x_{q-1}^{j} - A$; $x_{q+1}^{j,2} = x_{q+1}^{j} + A$, где A – максимально возможное значение амплитуды случайного возмущения $\xi(t)$ (см. соотношение 5), то для вновь выделенного интервала неопределенности будет выполняться соотношение:

$$P_1\{x^* \in [x_{q-1}^{j,1}, x_{q+1}^{j,2})\} = 1 .$$

Следовательно, процедурное (алгоритмическое) подавление помех должно включать операцию расширения вновь выделенных интервалов неопределенности.

Однако расширение интервала неопределенности наряду с подавлением помех увеличивает интервал неопределенности относительно x^*, который на j-м шаге хотя и определяется параметром A, но не может быть больше интервала неопределенности относительно x^*, полученного на предыдущих шагах. Действительно, если перед совершением j-го шага достоверно известно, что $x^* \in [x_{q_1-1}^{z}, x_{q_1+1}^{z})$, то для $x_{q-1}^{j,1}$ и $x_{q+1}^{j,2}$ справедливы соотношения:

$$x_{q-1}^{j,1} = \begin{cases} x_{q-1}^{j} - A, \text{ если } x_{q-1}^{j} - A \ge x_{q_1-1}^{z}; \\ x_{q_1-1}^{z}, \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$$x_{q+1}^{j,2} = \begin{cases} x_{q+1}^{j} + A, \text{ если } x_{q+1}^{j} + A \le x_{q_1+1}^{z}; \\ x_{q_1+1}^{z}, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Расширение возможных интервалов неопределенности для j-го шага поиска приводит к их взаимному пересечению. Поэтому коррекция случайных возмущений возможна тогда и только тогда, когда возможные интервалы неопределенности пересекаются между собой. Такой подход в процедурном подавлении случайных возмущений называется принципом "пересечения", и он используется в задачах синтеза помехоустойчивых и корректирующих методов одномерного поиска в условиях действия случайных возмущений.

Выводы

В рамках теории поиска детерминированными методами рассмотрена общая схема поиска точки экстремума унимодальной функции в условиях действия случайных возмущений, которые приводят к случайному блужданию точки экстремума.

Одномерный поиск совершается путем сокращения интервала неопределенности на основе решающей функции, которая в общем случае определяется резуль-татами ранее выполненных экспериментов и которая используется для создания нового интервала неопределенности, и стратегии поиска как функции, синтезированной на основании критерия оптимальности и на основании которой формируют значения координат точек экспериментов во вновь выделенном интервале.

Для построения какого-нибудь метода одномерного поиска необходимо знать длину поиска, количество возможных экспериментов, определить стратегию поиска и решающую функцию.

В процессе одномерного поиска точки экстремума могут действовать случайные возмущения, искажающие реальное значение, т.е. будет иметь место случайное блуждание точки экстремума в процессе поиска в исходном интервале, которое, в свою очередь, приводит к дополнительным ошибкам в определении нового интервала неопределенности. Все это приведет к значительному усложнению как стратегии поиска, так и решающей функции.

Подробный анализ общей схемы одномерного поиска точки экстремума в условиях действия случайных возмущений позволил сформулировать общий принцип "пересечения" при расширении возможных интервалов неопределенности, который должен использоваться в задачах синтеза помехоустойчивых и корректирующих методов одномерного поиска в условиях действия случайных возмущений.

Список литературы: **1.** *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации / Ф.П. Васильев. – М.: Факториал пресс, 2002. – 824 с. **2.** *Петров Э.Г.* Методы и средства принятия решений в социально- экономических и технических системах. Учебное пособие / Э.Г. Петров, М.В. Новожилова, И.В. Гребенник, Н.А. Соколова; Под общей редакцией Э.Г. Петрова. – Херсон: ОЛДІ – плюс, 2003. – 380 с. **3.** *Альсведе Р.* Задачи поиска / Р. Альсведе, И. Вегенер. – М.: Мир, 1982. – 365 с. **4.** *Реклейтис Г.* Оптимизация в технике / *Г. Реклейтис*. – М.: Мир, 1986. – 349 с. **5.** *Уайлд Д.Дж.* Методы поиска экстремума (перевод с английского) / Д.Дж. Уайлд. – М.: Наука, 1967. – 267 с. **6.** *Стахов А.П.* Введение в алгоритмическую теорию измерений / А.П. Стахов. – М.: Сов. радио, 1977. – 288 с. **7.** *Алипов Н.В.* Синтез помехоустойчивых алгоритмов поиска точки на отрезке 0,1 / Н.В. Алипов // Проблемы бионики: Сборник. – Харьков, Вища школа.– 1986. – Вып. 37. – С. 72-84.

Поступила в редколлегию 20.06.2013

УДК 004.021:519.878

Математична модель задачі одновимірного пошуку в умовах випадкових збурень / І.В.Гребеннік, Л.М.Ребезюк, О.Л.Ребезюк // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. 2013. – № 2 (81). – С. 57-60.

Розроблено математичну модель задачі детермінованого пошуку екстремуму унімодальної функції в умовах дії випадкових збурень. На основі аналізу загальної схеми одновимірного пошуку в умовах дії випадкових збурень сформульовано загальний принцип «перетинання» інтервалів невизначеності, на основі якого в подальшому будуть розроблені завадостійкі та корегуючи методи пошуку.

Бібліогр.: 7 найм.

UDC 004.021:519.878

Mathematical models of one-dimensional search under random perturbations / I.V.Grebennik, L.M.Rebezyuk, O.L.Rebezyuk //Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2013. – № 2 (81). – P. 57-60.

The mathematical model of the problem determined search extremum unimodal function under the action of random perturbations. Based on the analysis of the general scheme in one-dimensional search conditions of validity of random perturbations formulated the general principle of "intersection" of the uncertainty on the basis of which will be further developed noise-resistant and corrective search methods.

Ref.: 7 items.