УДК 519.7

**М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко**

ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

# ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДИКАТЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ ЧЕЛОВЕКА

Рассмотрены проблемы построения математических моделей цветового зрения человека. Проанализированы результаты, полученные в области моделирования цветового зрения человека Ньютоном, Максвеллом, Шредингером и Грассманом. В качестве формального аппарата предложен метод компараторной идентификации и модели в виде линейных предикатов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

## Введение

Одно из главных препятствий, с которым сталкивается исследователь, стремящийся математически описать работу органов чувств, заключается в неразработанности необходимого математического аппарата. Оказывается, что математики не позаботились о конструировании таких форм, в которые можно было бы облечь наблюдаемые психофизические явления. Поначалу этот факт изумляет. Не верится, что среди огромного множества формальных структур, накопленных математикой за многие века ее существования, нет таких, которые подошли бы для решения интересующих нас задач. Однако если разобраться, то именно этого и следовало бы ожидать. Ведь математический аппарат, в конечном счете, всегда развивается в ответ на запросы практики, удовлетворяя потребности тех областей знания, которые в нем нуждаются. Так, желание решать задачи небесной механики вынудило Ньютона разработать дифференциальное и интегральное исчисления. Стремление постичь законы мышления привело Буля к необходимости создания аппарата алгебры логики. Подобные примеры можно было бы умножить.

Психофизика – весьма своеобразная область знания. Она изучает связи, существующие между объективными процессами, происходящими в физическом мире, и явлениями субъективной сферы – ощущениями, представляющими собой факты нашего сознания. С проблемой математического описания подобных связей науке прошлого почти не приходилось сталкиваться. Лишь после возникновения кибернетики и информатики задачи моделирования психофизических процессов стали актуальными, и к их решению всерьез обратилась научная мысль. Нет никаких оснований надеяться на то, что такая специфическая и не похожая на другие область знания, как психофизика, не потребует для своей математизации никаких дополнительных формальных средств и сможет обойтись уже имеющимися математическими разработками. Напротив, следует ожидать, что потребности в математических средствах, возникающие в процессе моделирования психофизических процессов, приведут в будущем к развитию новых обширных и глубоких областей математического знания. В этой статье предпринята попытка положить начало математическим разработкам такого рода. Источником, из которого черпались математические задачи, для нас служили запросы практики моделирования функции человеческого зрения.

Одна из классических задач психофизики зрения заключается в изучении связи между *световым излучением*, падающим на сетчатку глаза, и *цветом* ощущения, возникающим в сознании наблюдателя в ответ на этот зрительный стимул. Еще Ньютон установил, что качество цвета всецело определяется спектром соответствующего светового излучения. Он, кроме того, предложил изображать цвета в виде точек некоторой области в трехмерном пространстве. Ньютон также обнаружил некоторые закономерности восприятия при сложении излучений, которые наводили на мысль, что *координаты цвета* (то есть координаты точек, изображающих цвета) линейно зависят от спектров соответствующих световых излучений. Отталкиваясь от этих результатов, Максвелл [1] записал координаты $u_1$, $u_2$, $u_3$ цвета, соответствующего световому излучению со спектром $b(\lambda)$, в виде интегралов вида

$$u_i = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda) K_i(\lambda) d\lambda, \quad i = \overline{1,3}. \qquad (1)$$

Здесь $b(\lambda)$ – это зависимость плотности энергии $b$ светового излучения от длины волны $\lambda$ электромагнитных колебаний; $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$, $K_3(\lambda)$ – некоторые весовые функции, характеризующие чувствительность глаза к лучам с различной длиной волны; $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – минимальная и максимальная длины волн световых излучений, видимых глазом. Максвелл первым предпринял попытку опытным путем определить конкретный вид функций $K_1(\lambda)$, $K_2(\lambda)$, $K_3(\lambda)$, получивших название *функций спектральной чувствительности зрения*. Впоследствии эти функции определялись многими авторами на базе более совершенной аппаратуры и улучшенной методики. В настоящее время значения функций спектральной чувствительности зрения определяют с весьма высокой точностью, указывая для них три, а иногда и более значащих цифр.

Наконец, Шредингер [2] поставил задачу построения аксиоматической теории цветового зрения. Отталкиваясь от законов цветового зрения, сформулированных Грассманом [3], он попытался чисто формальным путем вывести из них преобразования (1). Однако недостаточный уровень развития необходимого математического аппарата, а также недостаточно совершенная формулировка законов зрения не позволили ему сделать это достаточно корректно.

### 1. Изучение цветового зрения методом сравнения

Изложим некоторые известные результаты теории цветового зрения человека, необходимые для того, чтобы продемонстрировать читателю естественность и полезность решаемых задач. Эти результаты должны разъяснить мотивы, побудившие авторов взяться за разработку представленного здесь математического аппарата.

Основным инструментом *колориметрии* – науки об измерении цвета является *метод сравнения* цветов. Согласно этому методу наблюдателю предъявляют на двух небольших полях, имеющих общую границу, световые излучения, характеризующиеся соответственно *спектрами* $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. Наблюдатель воспринимает эти излучения в виде соприкасающихся цветных пятен. От него требуется дать ответ на вопрос: совпадают или не совпадают друг с другом цвета полей сравнения? Формирование ответа существенно облегчается тем, что в случае совпадения цветов граница между цветными пятнами исчезает. Таким образом, наблюдатель фактически принимает решение о совпадении или различии цветов с помощью очень тонкого индикатора – отсутствия или наличия видимой границы между полями сравнения. О высокой чувствительности метода сравнения свидетельствует такой факт. Если подать на поля сравнения пару идентичных излучений $(b(\lambda), b(\lambda))$, то наблюдатель зарегистрирует равенство цветов. Однако если предъявить пару излучений $(b(\lambda), 1{,}01b(\lambda))$, то есть на правом поле энергетический уровень излучения повысить всего лишь на 1% без изменения спектрального состава света, то наблюдатель с нормальным зрением отчетливо зафиксирует различие цветов. Установлено, что методом сравнения можно различить по цвету много миллионов световых излучений.

С первого взгляда может показаться, что цвета взаимно однозначно связаны с порождающими их световыми излучениями, и поэтому наблюдатель, регистрирующий равенство или неравенство цветов, тем самым обнаруживает совпадение или различие соответствующих световых излучений. Факты, однако, говорят, что это не так. Оказывается, существует множество совершенно различных по спектру и по мощности световых излучений (их называют *метамерными*), которые для глаза неотличимы по цвету. Отсюда следует, что различных цветов гораздо меньше, чем различных световых излучений. Орган зрения реагирует одним и тем же цветом на огромное число различных световых излучений. Таким образом, глаз, формируя цвет, тем самым группирует световые излучения в некоторые классы. Установлено, кроме того, что различные наблюдатели классифицируют световые излучения не совсем одинаково. Поэтому световые излучения, видимые одним наблюдателем как одноцветные, для другого наблюдателя будут, как правило, выглядеть не совсем одинаковыми по цвету.

Из этих фактов следует, что каждый человек представляет собой особый объект для колориметрического обследования. Более того, оказывается, что один и тот же наблюдатель в различные периоды своей жизни в колориметрических опытах может реагировать по-разному. Это означает, что параметры зрительной системы человека с течением времени изменяются, эволюционируют. Несмотря на эти обстоятельства и на то, что в колориметрических опытах приходится иметь дело с субъективными ощущениями наблюдателя и с его субъективно формируемым решением о равенстве или неравенстве цветов, эти опыты строго объективны и вполне могут быть отнесены к разряду чисто физических экспериментов. Исход колориметрических опытов совершенно не зависит от желания наблюдателя. Хотя наблюдатель может произвольно выдумать свой ответ или же ошибиться в выработке правильного ответа (например, при отвлечении внимания в процессе сравнения цветов), однако исследователь имеет возможность обнаружить такие ответы и отвергнуть их, подобно тому, как в процессе обработки результатов физического эксперимента удается выявить и исключить промахи экспериментатора.

Наблюдатель в колориметрическом опыте действует вполне машинообразно: повторное предъявление той же самой пары световых излучений приводит к тому же самому ответу (если, конечно, не растягивать проведение эксперимента на многие годы, когда сам наблюдатель станет иным). Правда, в особых случаях, а именно – когда цвета находятся на границе между равенством и неравенством, наблюдается элемент случайности в ответе. Но такой же элемент случайности появляется в любом физическом эксперименте в тех случаях, когда приходится работать на пределе возможностей измерительных приборов. В этих случаях точность исхода физических опытов обычно повышают за счет многократного повторения одних и тех же испытаний с последующей статистической обработкой результатов экспериментов. Такая же статистическая обработка ответов испытуемого возможна и в колориметрических опытах. Точность, достигаемая в колориметрических опытах, составляет 2 – 3 знака, а при глубокой статистической обработке может доходить до четырех. Далеко не каждый физический эксперимент можно выполнить с такой высокой точностью.

Из всего изложенного вывод таков: в колориметрических опытах мы имеем тот, по существу, поразительный случай, когда субъективные ощущения человека и его субъективные действия, производимые им при сравнении цветов, успешно исследуются вполне объективными, чисто физическими методами. Иными словами, колориметрические опыты демонстрируют нам принципиальную возможность объективного изучения субъективных состояний человека, дают конкретный прецедент такого изучения. Это заключение очень ответственно, поскольку из него можно извлечь ряд далеко идущих выводов. В самом деле, если это так, тогда нет непроходимой пропасти между объективным физическим миром и субъективным миром человека. Значит, понятия, выражаемые словами “объективный” и “субъективный”, логически не исключают друг друга, и второе поглощается первым. Это значит также, что субъективные состояния поддаются вполне объективному изучению чисто физическими методами.

В связи со столь кардинальными выводами тезис о возможности успешного объективного изучения некоторых субъективных состояний человека с помощью колориметрических опытов, на котором эти выводы основываются, должен быть подвергнут тщательнейшей проверке и придирчивому критическому рассмотрению. К выполнению этой задачи мы сейчас и приступим. Главное возражение состоит в следующем. В колориметрических опытах действительно изучается объективно регистрируемое поведение человека. В них наблюдатель выступает в роли некоего “черного ящика” с двумя входами и одним выходом. На входы “черного ящика” поступают световые излучения, характеризуемые своими спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. С математической точки зрения эти спектры представляют собой некоторые функции вещественного аргумента $\lambda$, заданного на интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, с вещественными значениями $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$. На выходе "черного ящика" формируется двоичный сигнал $y \in \{0, 1\}$. Его значение 1 будем интерпретировать как ответ наблюдателя "да", означающий равенство цветов на полях сравнения, а значение 0 – как ответ "нет", означающий неравенство цветов. Таким образом, наблюдатель своим поведением реализует некоторый предикат:

$$y=\Phi(b'(\lambda), b''(\lambda)), \tag{2}$$

и именно свойства этого предиката изучаются в колориметрических экспериментах. Как входные сигналы $b'(\lambda)$, $b''(\lambda)$, так и выходной сигнал $y$ могут быть зарегистрированы физическими приборами и поэтому дают вполне объективную информацию для установления вида предиката $\Phi$.

Однако во всем этом еще нет места для субъективных состояний наблюдателя; пока ни слова не сказано о цветах зрительных ощущений и об операции сравнения цветов, осуществляемой сознанием наблюдателя. Правда, основываясь на собственном субъективном опыте, мы можем утверждать, что: 1) когда наблюдатель формирует сигнал $y=1$, то при этом цвета его ощущений равны; 2) при этом наблюдатель каким-то усилием своего сознания сравнивает между собой цвета и приходит к заключению об их равенстве. Тем не менее, в справедливости этих двух утверждений мы не можем удостовериться посредством объективных наблюдений.

Как можно бороться с этим возражением? Оно утратило бы силу, если б нам удалось, исходя только из объективно наблюдаемых свойств предиката $\Phi$, каким-то образом доказать, что преобразование сигналов $\Phi$ можно представить в виде

$$y = D(f(b'(\lambda)), f(b''(\lambda))). \tag{3}$$

Здесь сигналы

$$f(b'(\lambda))=u', \ f(b''(\lambda))=u'', \tag{4}$$

$$u'=(u'_1, u'_2, u'_3), \ u''=(u''_1, u''_2, u''_3) \tag{5}$$

– трехмерные векторы с вещественными компонентами $u'_1$, $u'_2$, $u'_3$ и $u''_1$, $u''_2$, $u''_3$, вычисляемыми по формулам

$$\begin{aligned} u_1' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)K_1(\lambda)d\lambda; \quad u_1'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)K_1(\lambda)d\lambda; \\ u_2' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)K_2(\lambda)d\lambda; \quad u_2'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)K_2(\lambda)d\lambda; \\ u_3' &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)K_3(\lambda)d\lambda; \quad u_3'' = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)K_3(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \tag{6}$$

Формулы (5) математически описывают вид функций $u'=f(b'(\lambda))$ и $u''=f(b''(\lambda))$. Буквой $D$ обозначен *предикат равенства*, определяемый следующим образом:

$$D(u', u'') = \begin{cases} 1, \text{ если } u' = u'', \\ 0, \text{ если } u' \neq u''. \end{cases} \tag{7}$$

Только что описанное представление предиката $\Phi$ легко интерпретируется в психологических терминах. Сигналы $u'$ и $u''$ можно понимать как *цвета* полей сравнения, субъективно переживаемые наблюдателем. Функцию $f$ интерпретируем как *преобразование светового излучения в цвет* зрительного ощущения, производимое зрительной системой человека. Предикат $D$ будем интерпретировать как *операцию сравнения цветов* полей сравнения, осуществляемую сознанием наблюдателя. Если бы удалось доказать, что предикат (2) может быть представлен в виде соотношений (3) – (7), то это дало бы нам право утверждать, что: 1) сигналы $u'$ и $u''$ могут бытъ приняты в качестве математического описания цветов на полях сравнения; 2) функция $f$ может быть принята в качестве математического описания преобразования светового излучения, действующего на сетчатку глаза, в цвет зрительного ощущения, возникающего в сознании наблюдателя. В результате была бы полностью решена задача логического обоснования объективными методами математической модели цветового зрения (1), предложенной Максвеллом.

Описанный подход, однако, тоже может быть подвергнут критике. Возражение состоит в том, что при этом подходе имеется в виду лишь доказательство *возможности* представления преобразования сигналов в зрительной системе в виде (3). Надо же доказывать *необходимость* такого представления. Согласно этой точке зрения следует доказывать, что зрительный анализатор *действительно* обладает анатомо-физиологическими структурами, вычисляющими в процессе зрения значения интегралов (1), и что цвет зрительных ощущений на *самом деле* есть тройка числовых кодов, материально представленных в виде некоторого физико-химического процесса. На это возражение можно ответить следующим образом. Спору нет, было бы очень заманчиво получить не только функциональное, но и структурное описание зрительного анализатора. Однако получение математических зависимостей, описывающих лишь способ функционирования зрительной системы, – это тоже немало. Даже в физике в большинстве случаев ограничиваются функциональным (феноменологическим) описанием процессов. Небесная механика, ядерная физика и многие другие важные разделы физики идут почти исключительно по этому пути. Если же мы хотим ограничиться функциональной стороной дела, тогда с неизбежностью придется довольствоваться лишь возможными математическими моделями изучаемых процессов. Все возможные различающиеся между собой по структуре тождественные формулы, описывающие одну и ту же функцию, придется при этом считать равноценными. Ни одной из этих формул нельзя отдать предпочтения при функциональном подходе, сколь бы сильно они ни отличались друг от друга по своей структуре.

## 2. Исследования Шредингера

Итак, для того чтобы продемонстрировать возможность успешного объективного изучения субъективных состояний человека, осталось сделать “совсем немного”: доказать, что предикат (2) может быть записан в виде системы соотношений (3)÷(7). Первую попытку такого доказательства (и пока единственную) предпринял в 1920 году Шредингер в статье [2]. Насколько нам известно, эта статья вообще является первым исследованием такого рода во всей психофизике. Поэтому она заслуживает самого пристального изучения. Здесь кратко излагается ход идей Шредингера по обоснованию зависимостей (3) – (7).

В начале статьи автор пишет, что в ней разработан *проект* теоретического обоснования колориметрии. Отсюда явствует, что он не претендует в этой статье на исчерпывающее решение поставленной задачи и отдает себе отчет в ее сложности. Далее Шредингер пишет, что искусство измерения цвета он рассматривает преимущественно как составную часть экспериментальной физики, а не как составную часть физиологии ощущений. Вместе с тем, он подчеркивает принципиальное отличие измерений, осуществляемых органами чувств, от любых измерений, производимых при помощи физических приборов. Колориметрические измерения основаны на том, что мы в состоянии вынести суждение о том, одинаковы или нет два граничащих между собою цветных поля. В то время как результаты измерения одного и того же физического параметра не зависят от типа использованного прибора, результаты цветовосприятия существенно зависят от глаза наблюдателя. В последнем случае никак нельзя заменить глаз каким-либо инструментом, так как глаз другого наблюдателя по-иному воспринимает тот же самый световой стимул, и абсолютно излишними будут споры о том, чье восприятие лучше или правильнее. Два различных источника света, видимые одинаковыми, взятые сами по себе, не имеют ничего общего, кроме того, что они кажутся этому глазу одинаковыми; оценка света глазом является неоспоримой и никаким другим измерительным прибором не проверяется и не воспроизводится.

После всего этого можно было бы сказать, что область зрения принадлежит совсем не физике. Здесь исследуются не объективные свойства физического мира, а свойства субъективных ощущений. Шредингер, однако, возражает против такой постановки вопроса. Он говорит, что при исследовании цвета речь идет не об изучении свойств и закономерностей окружающего нас физического мира, а об изучении способа действия органа ощущения. Это сразу приводит к выводу, что цвет является не менее объективным предметом исследований, чем атомы, электромагнитные поля, источники света и т. д. Если все же кто-нибудь будет против этого возражать и настаивать на принципиальном отличии физических явлений от субъективных ощущений, то ему можно ответить следующим образом. Единственной связью человека с внешним миром являются его органы чувств. Вся объективная информация о физических процессах, прежде чем станет достоянием нашего разума, так или иначе проходит через ощущения и в этом смысле является субъективной. Следовательно, это возражение ведет к солипсистскому выводу, что все наши знания об окружающем мире субъективны.

Таким образом, не следует думать, что в то время как тела, которые нас окружают, обладают сами по себе определенными свойствами, цвета имеют значение только для нас. Трехмерное многообразие цвета, цветовое пространство обладает совершенно такой же реальностью, как и наше физическое трехмерное пространство. Конечно, способ, каким мы задаем в нем координаты, классифицируем и измеряем его элементы, является искусственно созданной математической конструкцией, но то же самое относится и к обычному физическому пространству.

После этого введения Шредингер приступает к характеристике света и цвета. Цвет появляется тогда, когда в глаз попадает свет. *Световое излучение* описывается при помощи спектра – функции $f(\lambda)$ длины волны $\lambda$, изменяющейся в пределах от 0,4 до 0,8 мкм. Множество спектров образует функциональное пространство, его мощность больше, чем мощность любого конечномерного пространства. В принципе, возможно, чтобы это же относилось и к множеству цветов, однако это не так: это множество всего лишь трехмерно. Световые спектры группируются по принципу неразличимости соответствующих цветов на полях сравнения в больше классы. Каждый класс равен по мощности функциональному пространству, а многообразие этих классов трехмерно. Шредингер предлагает понимать под выражением "цвет излучения" класс всевозможных излучений, выглядящих одинаковыми по цвету с излучением $f(\lambda)$.

Далее вводится операция *сложения* $f(\lambda)+g(\lambda)$ *световых излучений* $f(\lambda)$ и $g(\lambda)$. Суммарное излучение получается при совмещении лучей в одном и том же месте. Утверждается, что с равным правом можно говорить и о *сложении цветов*, и что это следует из третьего закона Грассмана: “Одинаково выглядящие излучения дают при сложении одинаково выглядящие излучения”. Затем Шредингер вводит обозначения для цветов, знак = для обозначения равенства цветов. Вводится также операция *вычитания цветов*: если $A+X=B$, то полагаем что $X=B-A$. Указывается, что вычитание однозначно, однако оно определено не для всех пар цветов. *Умножение цвета* на натуральное число $m$ определяется как многократное сложение $mA=A+A+A+......+A$ $m$ раз. Обратной к этой операции будет операция умножения на дробь вида $1/m$. Для того чтобы найти цвет $A/m$, нужно разделить спектр $f_A(\lambda)$, соответствующий цвету $A$, на $m$. Спектр $f_A(\lambda)/m$ будет соответствовать цвету $A/m$. Отмечается, что однозначность последней операции не очевидна и требует доказательства. Суперпозиция этих двух операций приводит к операции умножения цвета на рациональное число. Далее производится ссылка на второй закон Грассмана: “Непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета”. Здесь Шредингер предлагает свою редакцию этого закона: “Если $\varphi(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)+\sigma\varphi(\lambda)$ являются двумя мало отличающимися друг от друга излучениями, а $\psi(\lambda)$ означает излучение, выглядящее одинаково с $\varphi(\lambda)$, то среди одинаково выглядящих излучений $\varphi+\sigma\varphi$ найдется минимум одно $\psi+\sigma\psi$ , которое очень ненамного будет отличаться от $\psi$. Сославшись на нее, Шредингер приходит к понятию произведения $\mu A$ произвольного вещественного числа $\mu$ на цвет $A$.

Но можно ли принять постулат об однозначности деления цвета на натуральное число, то есть утверждать, что из равенства $\mu A=\mu B$ следует равенство $A=B$? Шредингер полагает, что этого нельзя сделать без дополнительных ссылок на опыт и здесь же приводит постулат, принадлежащий Герингу: “Одинаково выглядящие изучения будут одинаковыми, если повышать или понижать интенсивность каждого из них в одинаковых размерах”. По поводу этого постулата замечается, что в нем, вероятно, содержится избыточная информация, так как частный случай этого постулата об умножении на натуральные числа был уже логически выведен из сложения цветов.

Переходя к обсуждению вопроса о *размерности цветового пространства*, Шредингер приводит формулировку первого закона Грассмана: “Для любого излучения можно подобрать одинаково выглядящую смесь белого излучения с некоторым чистым спектральным или же пурпурным излучением”. Под *чистым спектральным* понимается монохроматическое излучение, под *пурпурным* – смесь крайних в видимой части спектра монохроматических изучений. Он отмечает, что эта формулировка содержит больше информации, чем это нужно для обоснования размерности цветового пространства, и предлагает свою собственную формулировку постулата: “Существует линейно независимая тройка цветов. Любые четыре цвета всегда линейно зависимы”.

Далее указывается способ взаимно однозначного сопоставления каждому цвету трех вещественных чисел, называемых координатами цвета. Надо взять тройку $A$, $B$, $C$ линейно независимых эталонных цветов и световое излучение со спектром $\Phi(\lambda)$, ни в одной точке не обращающимся в нуль. Из этого спектра вырезается небольшой участок на интервале $[\lambda, \lambda+\Delta\lambda]$ – так называемое "спектральное излучение", и цвет $F_\lambda$ от этого излучения уравнивается линейной комбинацией эталонных цветов $F_\lambda = x_1A + x_2B + x_3C$. Если "спектральное излучение" сдвигать вдоль оси длин волн, меняя значение величины $\lambda$, то коэффициенты $x_1, x_2, x_3$ при эталонных цветах будут изменяться, таким образом получаем три функции $x_1(\lambda), x_2(\lambda), x_3(\lambda)$. В качестве координат цвета "спектрального излучения" единичной мощности принимаются числа

$$\frac{x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)}, \quad \frac{x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)}.$$

Координаты цвета произвольного излучения $f(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$\sum_1^n \frac{fx_1}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{fx_2}{\Phi}, \quad \sum_1^n \frac{fx_3}{\Phi}.$$

Утверждается, что эти результаты можно с достаточной точностью заменить определенными интегралами вида

$$\int \frac{f(\lambda)x_1(\lambda)}{\Phi(\lambda)} d\lambda, \quad \int \frac{f(\lambda)x_2(\lambda)}{\Phi(\lambda)} d\lambda, \quad \int \frac{f(\lambda)x_3(\lambda)}{\Phi(\lambda)} d\lambda.$$

Интегрирование здесь ведется по всей видимой части спектра в диапазоне $\lambda \in [0{,}4 - 0{,}8$ мкм$]$.

В статье Шредингера рассматривается также много других вопросов, однако они не отражены в нашем изложении, как не относящиеся к интересующей нас теме. Вместе с тем, мы постарались извлечь из нее все существенное, что связано с обоснованием соотношений (3) – (7).

### 3. Анализ и оценка результатов Шредингера

Соображения Шредингера, изложенные выше, имеют, на наш взгляд, огромное значение для науки. Здесь впервые провозглашается, что ощущения человека могут успешно исследоваться чисто объективными методами и описываться математическими зависимостями точно так же, как и физические процессы. Более того, на примере зрительных ощущений показывается, как конкретно должно вестись исследование психических состояний, чтобы оно, в конечном итоге, приводило к их достоверному математическому описанию. Тезис Шредингера о возможности объективного изучения субъективных состояний не противоречит философии диалектического материализма, который считает, что между физическим и психическим нет непроходимой пропасти. В.И. Ленин пишет: "...противоположность материи и сознания имеет абсолютное значение только в пределах очень ограниченной области: в данном случае исключительно в пределах основного гносеологического вопроса о том, что признать первичным, а что вторичным. За этими пределами относительность данного противоположения несомненна" [4]. "За этими пределами оперировать с противоположностью материи и духа, физического и психического, как с абсолютной противоположностью, было бы громадной ошибкой" [4].

Вместе с тем, как пишет сам Шредингер, его работа является лишь попыткой создания проекта теоретического обоснования колориметрии, она представляет собой не завершение, а только начало разработки проблемы. Ниже анализируются недостатки и пробелы в работе Шредингера. Это делается не с той целью, чтобы умалить его заслуги, которые, в действительности, очень велики, а затем, чтобы, отталкиваясь от достижений Шредингера, двигаться дальше в разработке поставленной им проблемы. Шредингер указывает, что множество спектров световых излучений образует функциональное пространство. Но какое именно? Этот вопрос остается без ответа. Между тем понятно, что ход дальнейших рассуждений должен существенно зависеть от выбора конкретного способа математического описания всей совокупности возможных зрительных стимулов, что световые спектры по признаку цвета группируются в классы. Ясно, что имеются в виду классы эквивалентности. Однако далеко не каждый бинарный предикат порождает классы эквивалентности. Так, множества равноцветных излучений в принципе могли бы и пересекаться – в этом нет ничего логически невозможного. Классы излучений, дающих один и тот же цвет на левом поле, могли бы и не совпадать с классами равноцветных излучений для правого поля. Чтобы этого не случилось, нужно потребовать, чтобы поведение наблюдателя подчинялось некоторым специальным свойствам. Однако об этих свойствах в работе Шредингера ничего не говорится. Вследствие этого существование классов излучений, которые можно было бы отождествить с цветами, остается недоказанным.

Шредингер без каких-либо оговорок пользуется операцией сложения излучения и операцией умножения излучения на вещественное число. При этом, очевидно, молчаливо предполагается, что пространство излучений является линейным. Однако об аксиомах линейного пространства, которые должны при этом выполняться в опыте, ничего не говорится. Далее вводятся операции сложения и вычитания цветов (то есть классов излучений). При этом указывается, что вычитание цветов определено не для всех пар цветов. Но это противоречит прежде сделанному предположению о том, что множество всех излучений, видимых глазом, есть функциональное пространство. На самом же деле Шредингер, очевидно, имеет в виду, что спектры не могут иметь отрицательных значений, следовательно, речь должна идти не обо всем функциональном пространстве, а только о какой-то его части, по-видимому, о положительном конусе, однако это не оговаривается, эта сторона дела никак не отражена в постулатах, которые должны выполняться в опыте.

Много неясного в понятии непрерывности множества цветов. Что значат слова "непрерывное изменение цвета", если под цветом понимается класс излучений? Как вывести из закона непрерывности в формулировке Грассмана или в формулировке Шредингера существование и единственность произведения цвета на вещественное число? Эти и многие другие вопросы, которые можно было бы здесь поставить, остаются без ответа. То же самое относится и к проблеме доказательства конечномерности пространства цветов. Выглядят весьма бездоказательными и рассуждения о введении тройки чисел для математической характеристики цвета. Как доказать, что эта тройка чисел взаимно однозначно связана с цветом?

Приведенного достаточно, чтобы убедиться в том, что работа Шредингера, действительно, дает лишь *проект* теоретического обоснования колориметрии. К сделанному надо добавить еще очень многое, чтобы этот проект превратился в законченную научную теорию цвета. Целью настоящей статьи является разработка идей, сформулированных Шредингером.

### 4. Определение линейного предиката

Пусть $V$ – *выпуклое множество* в пространстве $L^2[0, 1]$. Это значит, что для любых двух точек $x$, $y \in V$ отрезок $[x, y]=\{Z/Z=(1-\gamma)x+\gamma y,\ 0\le\gamma\le 1\}$ является частью множества $V$. Отметим несколько частных случаев, которые, в основном, будут нас интересовать в приложениях. А именно, когда $V$ – все пространство, $V$ – окрестность некоторой точки, $V$ – положительный конус пространства $L^2[0, 1]$ и, наконец, $V$ – пересечение положительного конуса с некоторым телесным ограниченным множеством. Второй из этих случаев встречается, когда существуют экспериментальные возможности лишь для локального изучения предиката. Естественно, на основе такой информации могут быть сделаны доказательные выводы лишь для изученной окрестности. С математической точки зрения это означает, что рассматривается только ограничение предиката на эту окрестность, хотя физически предикат может быть определен и вне ее.

*Положительным конусом* в пространстве $L^2[0, 1]$ называется множество всех неотрицательных функций (более точно, всех классов эквивалентности по отношению равенства почти всюду, содержащих неотрицательные функции) этого пространства с линейной и топологической структурой, индуцированной на нем в пространство. Это множество *выпукло*: если $x(t)$ и $y(t)$ – неотрицательные функции, то их выпуклая комбинация $z(t)=(1-\gamma)x(t)+\gamma y(t)$ $(0\le\gamma\le 1)$ также является неотрицательной функцией. Необходимость изучения только неотрицательных функций возникает, например, в случаях, когда функции являются математическим описанием спектра. Наконец, четвертый случай на практике возникает, когда существенны оба приведенные выше соображения. Например, при изучении зрения человека ограничиваются излучениями с не очень большими энергиями, поскольку чрезмерно интенсивные излучения могут разрушить орган зрения. Это значит, что рассматриваются излучения со спектральными характеристиками, являющимися неотрицательными функциями $x(\lambda)$, удовлетворяющими условиям $\|x\|\le c$, где $c$ – некоторая положительная константа. Другими словами, в этом случае множество $V$ является пересечением положительного конуса и некоторого шара с центром в нуле.

Договоримся о терминологии и обозначениях. *Линейным оператором* будем называть аддитивный, однородный и непрерывный оператор в $L^2[0, 1]$. Для любого линейного оператора $A$ и множества $V$ через $A(V)$ будем обозначать множество всех точек $y\in L^2[0, 1]$, для которых существуют точки $x\in V$ такие, что $y=Ax$. В частном случае, когда $V$ совпадает со всем пространством, это множество называется *образом оператора* $A$ и обозначается $\mathrm{Im}A$. Множество всех точек $x\in L^2[0, 1]$, для которых $Ax=0$, называется *ядром оператора* и обозначается через $\mathrm{Ker}A$. Через $A^*$ будем обозначать оператор, сопряженный с оператором $A$, то есть такой оператор, для которого при всех $x$, $y\in L^2[0, 1]$ справедливо равенство $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Если подпространства $X$ и $Y$ пространства $L^2[0, 1]$ обладают тем свойством, что для любого элемента $z\in L^2[0, 1]$ существуют единственные элементы $x\in X$ и $y\in Y$ такие, что $z=x+y$, то говорят, что пространство $L^2[0, 1]$ разложено в прямую сумму подпространств $X$ и $Y$. Этот факт будем изображать равенством $L^2[0, 1]=X\dot{+}Y$. В частном случае, когда в прямом разложении подпространства $X$ и $Y$ взаимно ортогональны, говорят об *ортогональном разложении*. Будем писать в таком случае $L^2[0, 1]=X\oplus Y$. Оператор $A$ называется *проектором*, если он линеен и *идемпотентен*, то есть $A^2=A$. Для любого проектора существует разложение в прямую сумму:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}A\dot{+}\mathrm{Ker}A, \tag{8}$$

причем $A$ является тождественным преобразованием на $\mathrm{Im}A$. Проектор проектирует параллельно своему ядру. В частном случае, когда проектор $P$ является *самосопряженным оператором* (то есть $P^*=P$), он называется *ортопроектором*. В этом случае прямое разложение (8) является ортогональным:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}P\oplus\mathrm{Ker}P. \qquad (9)$$

Множество $M$ называется *аффинным многообразием*, если $(1-\gamma)x+\gamma y\in M$ для всех $x, y\in M$ и всех чисел $\gamma$. Каждое аффинное многообразие $M$ параллельно единственному линейному многообразию $M_0$ в том смысле, что $M=M_0+\alpha$ для некоторой точки $\alpha\in M$. Линейное многообразие $M_0$ называется *транслянтом аффинного многообразия* $M$. Для всякого множества $V$ существует единственное минимальное по включению аффинное множество $M$, содержащее $V$. Оно именуется *аффинной оболочкой множества* $V$ и обозначается aff$V$. Транслянт множества aff$V$ будем обозначать $T(V)$. Наконец, договоримся для всякого множества $V$ обозначать через $L(V)$ его линейную оболочку.

Рассмотрим предикат $\Phi$, определенный на декартовом квадрате $V\times V$, где $V$ – некоторое множество в $L^2[0, 1]$. Другими словами, $\Phi$ – функция, которая ставит в соответствие любой паре $x, y\in V$ число нуль или один. Будем предполагать, что этот предикат удовлетворяет условиям:

*а) для любого* $x\in V$ *имеет место равенство* $\Phi(x, x)=1$,

*б) для любых* $x, y\in V$ *равенство* $\Phi(x, y)=1$ *влечет равенство* $\Phi(y, x)=1$,

*в) для любых* $x, y, z\in V$ *равенства* $\Phi(x, y)=1$ *и* $\Phi(y, z)=1$ *влекут равенство* $\Phi(x, z)=2$.

При этих условиях отношение между $x$ и $y$, состоящее в выполнении равенства $\Phi(x, y)=1$, обладает рефлексивностью, симметричностью и транзитивностью. Такое отношение порождает на $V$ разбиение на классы, а именно $x$ и $y$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=2$. Нас будут интересовать условия, при которых это разбиение на классы согласуется с линейной и топологической структурой пространства $L^2[0, 1]$.

Назовем предикат $\Phi$ *линейным*, если в $L^2[0, 1]$ существует такой ортопроектор $P$, что для всех $x, y\in V$

$$\Phi(x, y)=D(Px, Py), \qquad (10)$$

где $D$ – *предикат равенства*: $D(u, v)=1$ тогда и только тогда, когда $u=v$.

**Лемма 1.** *Для того чтобы предикат* $\Phi$, *определенный на квадрате произвольного множества V, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы в* $L^2[0, 1]$ *существовал такой линейный оператор B с замкнутым образом, что*

$$\Phi(x, y)=D(Bx, By),\ \ x, y\in V. \qquad (11)$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть линейный оператор $B$ связан с предикатом $\Phi$ равенством (11). Для любого оператора с замкнутым образом существует разложение в ортогональную сумму:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}B^*\oplus\mathrm{Ker}B. \qquad (12)$$

Обозначим через $P$ ортопроектор $L^2[0, 1]$ на подпространство $\mathrm{Im}B^*$. Комбинация равенств (9) и (12) дает

$$\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}B^*, \qquad \mathrm{Ker}P=\mathrm{Ker}B. \qquad (13)$$

Покажем, что для так определенного ортопроектора $P$ выполняется равенство (10).

Пусть $\Phi(x, y)=2$. Тогда в силу (11), $Bx=By$, или, что то же самое, $B(x, y)=0$. Значит, $x-y\in\mathrm{Ker}B$. Поэтому из (13) следует, что $x-y\in\mathrm{Ker}P$, то есть $Px=Py$. Обратно, если $Px=Py$, то $Bx=By$. Таким образом, $\Phi(x, y)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $x,y\in V$ и $Px=Py$. Другими словами, справедливо (10).

*Необходимость* очевидна, поскольку в качестве $B$ можно взять ортопроектор $P$.

Лемма 1 доказана.

Наша дальнейшая цель заключается в разработке конструкции, которая позволит каждому $x\in V$ ставить в соответствие единственный элемент $y(x)\in V$ такой, что $\Phi(x, y(x))=2$. В случае, когда $V$ – все пространство, таким элементом мог бы быть $Px$. В остальных случаях это уже не так, так как точка $Px$ может не принадлежать множеству $V$. Способ выбора элемента $y(x)$ зависит от характера множества $V$. Поэтому, начиная с этого места, мы будем некоторое время раздельно рассматривать различные случаи.

## 5. Предикаты на всем пространстве

**Лемма 2.** *Для того чтобы предикат* $\Phi$, *определенный на квадрате пространства* $L^2[0, 1]$, *был линейным, необходимо и достаточно, чтобы в* $L^2[0, 1]$ *существовал такой линейный оператор A с замкнутым образом, для которого равенство*

$$\Phi(x, Ay)=1 \qquad (14)$$

*выполняется тогда и только тогда, когда* $Ax=Ay$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть оператор $A$ с указанными свойствами существует. Покажем, что

$$\Phi(x, y)=D(Ax, Ay). \qquad (15)$$

Действительно, пусть $\Phi(x, y)=2$. Из условия леммы следует, что $\Phi(y, Ay)=2$. Из двух последних равенств и условия транзитивности *в* вытекает равенство $\Phi(x, Ay)=2$. Тогда по условию $Ax=Ay$. Пусть обратно $Ax=Ay$. Вместе с равенством $\Phi(x, Ax)=1$ это дает $\Phi(x, Ay)=2$. Но $\Phi(y, Ay)=2$. Применяя к двум последним равенствам условия *б* и *в*, получаем $\Phi(x, y)=2$. Равенство (15) доказано. Из этого равенства и леммы 1 следует, что предикат $\Phi$ – линейный. Положим $A=P$, где $P$ – ортопроектор, связанный с

Φ равенством (10), и покажем, что равенство (14) выполняется тогда и только тогда, когда $Px=Py$. Действительно, согласно формуле (10), равенство (14) при $A=P$ может быть переписано в виде $Px=P^2y$. Но $P$ – проектор. Поэтому последнее равенство означает, что $Px=Py$.

Лемма 2 доказана.

Назовем любой линейный оператор $A$ с замкнутым образом, для которого выполняются условия леммы 2, *присоединенным* к предикату Φ. Как видно из определения (10), каждому ортопроектору $P$ можно поставить в соответствие единственный линейный предикат Φ. Верно и обратное – каждому линейному предикату Φ соответствует только один ортопроектор, удовлетворяющий равенству (10). Это следует из того, что если для двух ортопроекторов равенства $P_1x=P_1y$ и $P_2x=P_2y$ эквивалентны при всех $x, y\in L^2[0, 1]$, то $\mathrm{Ker}P_1=\mathrm{Ker}P_2$ и, следовательно, $P_1=P_2$. Таким образом, существует однозначное соответствие между всеми линейными предикатами и всеми ортопроекторами, или, что то же самое, всеми линейными подпространствами.

С операторами, присоединенными к линейному предикату Φ, дело обстоит не так. Полная характеристика таких операторов дается следующими утверждениями.

**Лемма 3**. *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, $P$ – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства*:

$$AP=A,\quad PA=P. \tag{16}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для линейного оператора $A$ выполняются равенства (16). Покажем, что образ оператора $A$ замкнут и

$$\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P,\quad \mathrm{Im}A^*=\mathrm{Im}P,\quad A^2=A. \tag{17}$$

Действительно, пусть $x\in \mathrm{Ker}A$, то есть $Ax=0$. Тогда из второго равенства (16) следует, что $Px=PAx=0$, то есть $x\in \mathrm{Ker}P$. Обратно, если $x\in \mathrm{Ker}P$, то $Px=0$ и $Ax=APx=0$, то есть $x\in \mathrm{Ker}A$. Первое равенство (17) доказано. Далее, $A^2=(AP)\times(AP)=A(PA)P=AP^2=AP=A$. Итак, третье равенство (17) выполняется. Из этого равенства вытекает замкнутость образа оператора $A$. Действительно, пусть $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}\subset \mathrm{Im}A$, $y_k\to y$ при $k\to\infty$. Поскольку $A$ – ограниченный оператор, то тогда $Ay_k\to Ay$ при $k\to\infty$. Но каждая точка $y_k$ представима в виде $y_k=Ax_k$. Поэтому $Ay_k=A^2x_k=Ax_k=y_k$. Таким образом, $y=Ay\in \mathrm{Im}A$. Поскольку $\mathrm{Im}A$ замкнут, то справедливо ортогональное разложение:

$$L^2[0, 1]=\mathrm{Im}A^*\oplus \mathrm{Ker}A \tag{18}$$

Сравнивая это равенство с равенством (9) и учитывая, что $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$, получаем второе равенство (17).

Равенство (14), учитывая (10), можно переписать в виде $Px=PAy$, или, используя (16), $Px=Py$. Последнее равенство означает, что $x-y\in \mathrm{Ker}P=\mathrm{Ker}A$, а значит, $Ax=Ay$. Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть линейный оператор $A$ присоединен к линейному предикату Φ. Формула (10) позволяет переписать равенство (14) в виде $Px=PAy$. Таким образом, $Px=PAy$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Поэтому, в частности, $Px=PAy$ для всех $x\in L^2[0, 1]$. Второе равенство (16) доказано. Поскольку оператор A присоединен к предикату Φ, то справедливо (15). Сравнивая это равенство с (10), получаем $D(Ax, Ay)=D(Px, Py)$. Таким образом $A(x-y)=0$ тогда и только тогда, когда $P(x-y)=0$, то есть $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Разложим произвольный элемент $x\in L^2[0, 1]$ в ортогональную сумму $x=x_1\oplus x_2$, где $x_1\in \mathrm{Im}P$, $x_2\in \mathrm{Ker}P$. Тогда $Ax=Ax_1$, так как $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. С другой стороны, $Px=Px_1$ и, следовательно, $APx=Ax_2$. Поэтому $Ax=APx$ для любого элемента $x\in L^2[0, 1]$, то есть выполняется первое равенство (16).

Лемма 3 доказана.

Представим для выразительности этот результат в матричном виде. Напомним, что если линейные пространства $X_1$ и $X_2$ представлены в виде прямых сумм $X_1=Y_1\dot{+}Z_1$, $X_2=Y_2\dot{+}Z_2$, то линейный оператор $A{:}X_1\to X_2$ порождает четыре линейных оператора $A_{11}{:}\ Y_1\to Y_2$, $A_{12}{:}Z_1\to Y_2$, $A_{21}{:}Y_1\to Z_2$, $A_{22}{:}Z_1\to Z_2$ таких, что $A(y_1\dot{+}Z_1)=(A_{11}y_1+A_{12}Z_1)\dot{+}(A_{21}y_1+A_{22}Z_1)$. Матрица, составленная из этих операторов, называется *матричным представлением оператора A.* Пусть

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{19}$$

– матричное представление оператора $A$, соответствующее прямому разложению (9).

**Следствие 1.** *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, P – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор A был присоединен к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы его матричное представление* (19) *имело вид*

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

*где I – тождественный оператор в пространстве* $\mathrm{Im}P$, $A_{21}$: $\mathrm{Im}P\to\mathrm{Ker}P$ *– произвольный линейный оператор.*

Доказательство. Матричное представление оператора P имеет вид

$$P=\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Отсюда и из (19) получаем

$$PA = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; AP = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (22)$$

Предположим, что оператор $A$ присоединен к линейному предикату $\Phi$. Тогда имеют место равенства (16). Сравнивая равенство (21) с первым равенством (22), получаем, что $A_{11}=I$, $A_{12}=0$. Аналогично из сравнения (19) со вторым равенством (22), находим, что $A_{22}=0$. Таким образом, справедливо (20). Обратно, пусть справедливо (20), то есть $A_{11}=I$, $A_{12}=0$, $A_{22}=0$. Тогда из (22) вытекают равенства (16). Поэтому в силу леммы 3 оператор $A$ является присоединенным к предикату $\Phi$.

Следствие 1 доказано.

Приведем теперь другое описание множества всех операторов, присоединенных к линейному предикату $\Phi$.

**Следствие 2.** *Пусть $\Phi$ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, $P$ – соответствующий ортопроектор. Для того, чтобы линейный оператор $A$ был присоединен к предикату $\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы $A$ был проектором параллельно* $\mathrm{Ker}P$.

Доказательство. Пусть линейный оператор $A$ является присоединенным к предикату $\Phi$. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 3, $A^2=A$, то есть $A$ – проектор. Проектор проектирует параллельно своему ядру, но в нашем случае $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Следовательно, проектор $A$ проектирует параллельно $\mathrm{Ker}P$. Обратно, пусть $A$ – проектор параллельно $\mathrm{Ker}P$, то есть $A^2=A$, $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Представим произвольный элемент $x\in L^2[0, 1]$ в виде $x=x_1+x_2$, $x_1\in \mathrm{Im}P$, $x_2\in \mathrm{Ker}P$. Как видно из матричного представления (19), $x\in \mathrm{Ker}P$ тогда и только тогда, когда

$$A_{11}x_1+A_{12}x_2=0, \quad A_{21}x_1+A_{22}x_2=0.$$

Так как $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$, последние равенства эквивалентны равенству $x_1=0$. Это значит, что $A_{12}=0$, $A_{22}=0$ и $\mathrm{Ker}(A_{11}\oplus A_{21})=\{0\}$. Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

Возводя последнее равенство в квадрат, получаем

$$A^2 = \begin{pmatrix} A^2{}_{11} & 0 \\ A_{21}A_{11} & 0 \end{pmatrix}.$$

Но по условию $A^2=A$, то есть $A_{11}^2=A_{11}$, $A_{21}A_{11}=A_{22}$. Из двух последних равенств следует, что $(A_{11}\oplus A_{21})A_{11}=A_{11}\oplus A_{22}$. Отсюда видно, что оператор $A_{11}\oplus A_{21}$ может быть невырожденным лишь если $\mathrm{Ker}A_{11}=\{0\}$. Поскольку $A_{11}^2=A_{11}$ то имеет место прямое разложение $\mathrm{Im}P=\mathrm{Im}A_{11}\dot{+}\mathrm{Ker}A_{12}$. Следовательно, $\mathrm{Im}A_{11}=\mathrm{Im}P$. Тогда $A_{11}=2$. Действительно, пусть $y\in \mathrm{Im}P$, и следовательно, $y\in \mathrm{Im}A_{12}$. То есть существует $x\in \mathrm{Im}P$ такой, что $y=A_{11}x$. Имеем $A_{11}y=A_{11}^2x=A_{11}x=y$. Итак, равенство $A_{11}=1$ справедливо. Тогда из (23) и следствия 1 вытекает, что оператор $A$ присоединен к предикату $\Phi$.

Следствие 2 доказано.

Из формулы (15) видно, что оператор, присоединенный к линейному предикату, удовлетворяет условиям леммы 1. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Связь между двумя свойствами оператора – удовлетворять условию леммы 1 и быть присоединенным – описывается следующим утверждением.

**Следствие 3**. *Пусть $\Phi$ – линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[0, 1]$. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату $\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы $A$ был проектором и для него выполнялось равенство* (15).

Доказательство. Пусть оператор $A$ присоединен к предикату $\Phi$. При доказательстве леммы 2 было показано, что тогда справедливо (15). Тот факт, что $A$ является проектором, вытекает из следствия 2. Обратно, пусть $A$ – проектор и имеет место равенство (15). Сравнивая (15) и определение (10), получаем, что для $x$, $y\in L^2[0, 1]$ $Px=Py$ тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Следовательно, $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Поэтому из следствия 2 вытекает, что оператор $A$ присоединен к предикату $\Phi$.

Следствие 3 доказано.

**Следствие 4**. *Для того чтобы для линейного оператора $A$ существовал линейный предикат, к которому оператор $A$ является присоединенным, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A$ был проектором.*

## 6. Предикаты на конусе

Подмножество $K$ пространства $L^2[0, 1]$ называется *конусом*, если $\lambda x\in K$ для любых $x\in K$, $\lambda\geq 0$ и $x_1+x_2\in K$ для любых $x_1$, $x_2\in K$. Линейная оболочка $L(K)$ конуса $K$ совпадает с множеством всех точек $x$ пространства, представимых в виде $x=x_1-x_2$, $x_1$, $x_2\in K$. Нас будут интересовать конусы с замкнутой линейной оболочкой. Подклассом таких конусов являются воспроизводящие конусы. Конус $K$ называется *воспроизводящим*, если $L(K)$ совпадает со всем пространством. Отметим важный частный случай – положительный конус в $L^2[0, 1]$. Он является воспроизводящим, поскольку любая функция $x(t)$, суммируемая с квадратом на $[0, 1]$, может быть представлена в виде $x(t)=x_+(t)-x_-(t)$, где

$$\begin{aligned} E_+(t) &= \begin{cases} x(t), & \text{если } E(t)\geq 0, \\ 0, & \text{если } E(t)<0, \end{cases} \\ E_-(t) &= \begin{cases} 0, & \text{если } E(t)\geq 0, \\ x(t), & \text{если } E(t)<0. \end{cases} \end{aligned} \qquad (24)$$

Очевидно, функции $x_+$ и $x_-$ являются неотрицательными и суммируемыми с квадратом.

Если конус $K$ является воспроизводящим, то всякому линейному предикату $\Phi$ соответствует лишь один ортопроектор $P$, связанный с ним равенством (10). Это видно из того, что если для двух ортопроекторов $P_1$ и $P_2$ равенства $P_1x=P_1y$ и $P_2x=P_2y$ эквивалентны при всех $x, y\in K$, то $\mathrm{Ker}P_1=\mathrm{Ker}P_2$. Действительно, пусть $x\in \mathrm{Ker}P_2$. Так как $K$ – воспроизводящий конус, то существуют $x_1,x_2\in K$: $x=x_1-x_2$. Тогда $P_1(x)=P_1(x_1)-P_1(x_2)=0$, $P_2(x_1)=P_1(x_1)$, $P_2(x_2)=P_1(x_2)$. Значит, $P_2(x_1)-P_2(x_2)=0$ и $\mathrm{Ker}P_1\subset\mathrm{Ker}P_2$. Очевидно, верно и обратное включение. Следовательно, $P_1=P_2$. Если $K$ – не воспроизводящий конус, но $L(K)$ – замкнутое множество, то ортопроектор $P$ не определен однозначно. Поскольку принципиально этот случай не отличается от случая воспроизводящего конуса (вместо всего пространства $L^2[0, 1]$ можно с самого начала рассматривать подпространство $L(K)$), мы, чтобы не усложнять формулировки, ограничимся в настоящем параграфе случаем воспроизводящего конуса.

Лемма 2 не может быть перенесена на случай конуса дословно, поскольку элементы вида $Ax$ ($x\in K$) вообще говоря, не принадлежат конусу $K$ и поэтому выражение $\Phi(x, Ax)$ может не иметь смысла. Аналогом леммы 2 для случая конуса может служить следующая.

**Лемма 4**. *Для того чтобы предикат $\Phi$, определенный на квадрате воспроизводящего конуса $K$ был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовал линейный оператор $A$ с замкнутым образом и отображения (вообще говоря, линейные) $f_i$: $L^2[0, 1]\to K$ ($i=1, 2$), удовлетворяющие следующим условиям*:

$$(f_2-f_1)=I, \tag{25}$$

где I – тождественное отображение;

*для $x, y\in K$ равенство $\Phi(x+f_1(Ay), f_2(Ay))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$*;

*для $x, y\in K$ равенство $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y)=2$.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть оператор $A$ и отображения $f_1$, $f_2$ с указанными свойствами существуют. Рассмотрим произвольные $x, y\in K$, для которых $\Phi(x, y)=2$. Тогда $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=2$. Вместе с равенством $\Phi(x+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ это дает $\Phi(y+f_1(Ax), f_2(Ax))=2$. Но тогда в силу свойства оператора $A$ и отображений $f_1, f_2$ должно быть $Ax=Ay$. Пусть обратно, $x, y\in K$ и $Ax=Ay$. Имеем $\Phi(y+f_1(Ay), f_2(Ay))=2$. Комбинируя это равенство с равенством $Ax=Ay$, получаем $\Phi(y+f_1(Ax), f_2(Ax))=2$. Отсюда и из равенства $\Phi(x+f_1(Ax), f_2(Ax))=1$ находим, что $\Phi(x+f_1(Ax), y+f_1(Ax))=2$. Следовательно, $\Phi(x, y)=2$.

Итак, для любых $x, y\in K$ равенство $\Phi(x, y)=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Это означает, что справедливо равенство $\Phi(x, y)=D(Ax, Ay)$, $x, y\in K$. Тогда в силу леммы 1 предикат $\Phi$ является линейным.

*Необходимость.* Поскольку $K$ – воспроизводящий конус, любой элемент $z\in L^2[0, 1]$ может быть представлен в виде $z=z_2-z_1$, где $z_1, z_2\in K$. Такое представление, вообще говоря, не является единственным. Воспользуемся аксиомой выбора и выберем произвольным образом одно из таких представлений для каждого $z$. Тогда $z_2=f_2(z)$, $z_1=f_1(z)$, где $f_1$, $f_2$ – некоторое отображение $L^2[0, 1]\to K$. Очевидно, $f_2-f_1=I$, где $I$ – тождественное отображение. Покажем, что второе и третье условия леммы также выполняются, если положить $A=P$, где $P$ – ортопроектор, соответствующий $\Phi$. Равенство $\Phi(x+f_1(Py), f_2(Py))=1$ в силу формулы (10) означает, что $P(x+f_1(Py))=Pf_2(Py)$, то есть $Px=P(f_2-f_1)(Py)$. Формулы (17) и равенство $P^2=P$ позволяют заключить, что это равенство выполняется тогда и только тогда, когда $Px=Py$. Выполнимость третьего условия леммы очевидна.

Лемма 4 доказана.

**Замечание**. Как видно из доказательства леммы, отображения $f_1$ и $f_2$ являются совершенно произвольными, лишь бы для них выполнялось равенство $f_2-f_1=I$. Другими словами, если какие-либо отображения $f_1$ и $f_2$ удовлетворяют условиям леммы 4, то любые другие отображения, обладающие данным свойством, также удовлетворяют этим условиям. Кроме того, следует отметить, что отображения $f_1$ и $f_2$ могут быть определены не на всем пространстве $L^2[0, 1]$, а лишь на $\mathrm{Im}A$, поскольку они применяются к элементам вида $Ax$.

Будем называть линейный оператор $A$ в $L^2[0, 1]$ *присоединенным к линейному предикату* $\Phi$, определенному на $K\times K$, если для него существуют такие отображения $f_1$ и $f_2$, что выполняются условия леммы 4.

**Лемма 5**. *Пусть $\Phi$ – линейный предикат на квадрате воспроизводящего конуса $K$; $P$ – отвечающий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату $\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие равенства:*

$$AP=A, \quad PA=P. \tag{26}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть для линейного оператора $A$ выполняются равенства (26). Тогда, как было показано при доказательстве леммы 3, $\mathrm{Im}A$ замкнут. Обозначим через $f_1$ и $f_2$ произвольные отображения $L^2[0, 1]\to K$, для которых $f_2-f_1=I$. Как было показано при доказательстве леммы 4, в сторону необходимости, эти отображения вместе с ортопроектором $P$ удовлетворяют условиям леммы 4. Покажем, что они удовлетворяют тем же условиям и совместно с оператором $A$.

В силу формулы (10) равенство $\Phi(x+f_1(Ay), f_2(Ay))=1$ выполняется тогда и только тогда, когда $P(x+f_1(Ay))=PAy$, то есть $Px=P(f_2-f_1)Ay$, или с учетом (25) и (26), $Px=Py$. Таким образом, второе условие леммы 4 выполняется. Выполнение третьего условия очевидно.

*Необходимость.* Пусть оператор $A$ является присоединенным к предикату Φ. Второе из условий леммы 4 позволяет заключить, что для любых $x$, $y \in K$ равенство $Ax=Ay$ выполняется тогда и только тогда, когда $Px=P(f_2-f_1)Ay$ или, в силу (25), $Px=PAy$. В частности, отсюда следует, что $Px=PAx$ для всех $x \in K$. Поскольку $K$ – воспроизводящий конус, отсюда вытекает второе из равенств (26). При доказательстве леммы 4 было показано, что для оператора $A$, присоединенного к предикату Φ, имеет место равенство (26). Вместе с (10) это дает: для любых $x$, $y \in K$ равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Поскольку $K$ – воспроизводящий конус, отсюда следует, что $\mathrm{Ker}A=\mathrm{Ker}P$. Окончание доказательства леммы совпадает с окончанием доказательства леммы 3.

Лемма 5 доказана.

Линейный оператор, присоединенный к предикату Φ, был определен различным образом в случаях всего пространства и конуса. Тем не менее, формулировки лемм 3 и 5 почти совпадают. Почти совпадают соответственно и формулировки следствий. Поскольку их доказательства различаются лишь в деталях, приведем здесь для случая конуса лишь формулировки.

**Следствие 5.** *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса $K$; $P$ – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы его матричное представление, соответствующее ортогональному разложению $L^2[0, 1]=\mathrm{Im}P \oplus \mathrm{Ker}P$, имело вид*

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

*где $I$ – тождественный оператор в пространстве $\mathrm{Im}P$, $A_{21}$: $\mathrm{Im}P \to \mathrm{Ker}P$ – произвольный линейный оператор.*

**Следствие 6.** *Пусть Φ – линейный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса $K$, $P$ – соответствующий ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы $A$ был проектором параллельно $\mathrm{Ker}P$.*

**Следствие 7**. *Пусть Φ – линейно порожденный предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса $K$. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату Φ, необходимо и достаточно, чтобы $A$ был проектором и выполнялось равенство* (25).

**Следствие 8.** *Для того чтобы для линейного оператора $A$ существовал линейный предикат на квадрате воспроизводящего конуса $K$, к которому оператор $A$ присоединен, необходимо и достаточно, чтобы оператор $A$ был проектором.*

### 7. Предикаты на выпуклом множестве

Аффинная оболочка любого множества $V$ состоит из всех векторов $x$ вида

$$x=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\ , \tag{27}$$

где $m$ – любое натуральное число, $x_i \in V$, а $\lambda_i$ – произвольные числа, сумма которых равна 2. В случае, когда $V$ – выпуклое множество, это утверждение можно уточнить. А именно,

$$\mathrm{aff}V=\{X|X=\beta_1 x_1+\beta_2 x_2,\ x_i \in \mathrm{V},\ \beta_1+\beta_2=1\}. \tag{28}$$

Проверим это равенство. Пусть $x \in \mathrm{aff}V$. Тогда он представим в виде (27). Пусть $I$ – множество всех номеров $i$ в (27), для которых $\lambda_i<0$. Если $I=\varnothing$, то $x \in V$ и для него выполняется (28). Пусть $I \neq \varnothing$. Положим

$$\beta_1=\sum_{i\in I}\lambda_i\ ;\quad \beta_2=+\sum_{i\,\overline{\in}\, I}\lambda_i\ ;$$

$$\mu_i=\beta_1^{-1}\lambda_i\ ,\ i\in I;\quad \mu_i=+\beta_2^{-1}\lambda_i\ ,\ i\,\overline{\in}\, I\ .$$

Тогда из (27) вытекают представления (28), где

$$x_1=\sum_{i\in I}\mu_i x_i\ ,\quad x_2=\sum_{i\,\overline{\in}\, I}\mu_i x_i\ .$$

Поскольку $V$ – выпуклое множество и $\mu_{i\geq}0, \sum_{i\in I}\mu_i=1, \sum_{i\,\overline{\in}\, I}\mu_i$ , то $x_1$, $x_2 \in V$. Кроме того, очевидно, $\beta_1+\beta_2=2$. Равенство (28) доказано.

В дальнейшем нам понадобится еще одно равенство, справедливое для выпуклых множеств:

$$\mathrm{aff}V=\{X|X=\alpha+\beta(x_1-x_2),\ \beta>0,\ x_1 \in V,\ x_2 \in V\}. \tag{29}$$

Здесь α – произвольная фиксированная точка множества $V$. Проверим это равенство. Обозначим множество, фигурирующее в правой части (29), через $Z$. Это множество является аффинным многообразием. Действительно, пусть $z$, $z' \in Z$. Тогда $z=\alpha+\beta(x_1-x_2)$, $z'=\alpha+\beta'(x_1'-x_2')$; $\beta>0$, $\beta'>0$; $x_1$, $x_2$, $x_1'$, $x_2' \in V$. Зададим произвольное число α и положим $\xi=|1-\lambda|\beta+|\lambda|\beta'$, $\gamma=|\lambda|\beta'\xi^{2.}$ Тогда $\xi>0$, $\gamma \in [0, 1]$ и справедливо равенство:

$$(1-\lambda)z+\lambda z'=\alpha+\xi(y_1-y_2), \tag{30}$$

где $y_1=(1-\gamma)x_1+\gamma x_1'$, $y_2=(1-\gamma)x_2+\gamma x_2'$, в случае $0\leq\lambda\leq1$; $y_1=(1-\gamma)x_2+\gamma x_1'$, $y_2=(1-\gamma)x_1+\gamma x_2'$, в случае $\lambda>1$; $y_1=(1-\gamma)x_1+\gamma x_2'$, $y_2=(1-\gamma)x_2+\gamma x_1'$, в случае $\lambda<0$. В любом случае $y_1$, $y_2 \in V$ и из (30) вытекает, что $(1-\lambda)z+\lambda z' \in Z'$. Итак, $Z$ – аффинное многообразие. Любая точка $v \in V$ представима в виде $v=\alpha+(v-\alpha)$. Поэтому $Z \supset V$. По определению $\mathrm{aff}V$ является минимальным аффинным многообразием, содержащим $V$. Из доказанного выше тогда вытекает, что $\mathrm{aff}V \subset Z$. Проверим справедливость обратного включения. Точки α, $x_1$, $x_2 \in V \subset \mathrm{aff}V$. Поэтому $(1+\beta)x_1-\beta x_2 \in \mathrm{aff}V$ и $(1+\beta)\alpha-\beta x_2 \in \mathrm{aff}V$. Легко видеть, что

$$\alpha+\beta(E_1-E_2)=\frac{\beta}{1+\beta}\big((1+\beta)x_1-\beta x_2\big)+$$
$$+\frac{1}{1+\beta}\big((1+\beta)\alpha-\beta x_2\big).$$

Следовательно, и $\alpha+\beta(x_1\text{-}x_2)\in \operatorname{aff}V$ и $Z\subset\operatorname{aff}$. Формула (29) доказана.

**Лемма 6.** *Пусть $V$ — выпуклое множество и* $\operatorname{aff}V=L^2[0,1]$. *Для того чтобы предикат* $\Phi$*, определенный на квадрате множества $V$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали линейный оператор $A$ с замкнутым образом и отображения*

$$f_i\colon L^2[0,1]\to V(i=1,2),\quad \gamma_0\colon L^2[0,1]\to[0,1],$$

*удовлетворяющие условиям*

$$\gamma_0(x)x+(1-\gamma_0(x))f_1(x)=f_2(x); \tag{31}$$

*для $x, y\in V$ равенство*

$$\Phi(\gamma_0(Ax)y+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1 \tag{32}$$

*выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$;*
*для $x, y\in V$ равенство*

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax),$$
$$\gamma_0(Ax)y+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax))=1 \tag{33}$$

*выполняется тогда и только тогда, когда* $\Phi(x,y)=$ $=2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность.* Пусть оператор $A$ и отображения $\gamma_0$, $f_1$, $f_2$ удовлетворяют условиям леммы. Рассмотрим какую-либо пару точек $x, y\in V$, для которых $\Phi(x,y)=2$. Тогда для них выполняется (33). Комбинируя это равенство с равенством

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1, \tag{34}$$

получим (32). Но тогда $Ax=Ay$. Пусть обратно $Ax=Ay$. Тогда выполняется (32). Вместе с равенством

$$\Phi(\gamma_0(Ax)x+(1-\gamma_0(Ax))f_1(Ax), f_2(Ax))=1$$

это дает (33). Значит, $\Phi(x,y)=2$. Итак, имеет место равенство

$$\Phi(x,y)=D(Ax,Ay);\ x,y\in V. \tag{35}$$

Поэтому из леммы 1 следует, что предикат $\Phi$ является линейным.

*Необходимость.* Пусть оператор $\Phi$ является линейным. По условию $\operatorname{aff}V=L^2[0,1]$. Поэтому любой вектор $x\in L^2[0,1]$ представим (не единственным образом) в виде (28). Выберем для любого $X$ произвольным образом числа $\beta_i$ и точки $x_i$, для которых справедливо это равенство. В случае $\beta_1<0$, $\beta_2>0$ положим $\gamma_0=\beta_2^{-1}$, $f_1(x)=x_1$, $f(x_2)=x_2$. Случай $\beta_1>0$, $\beta_2<0$ рассматривается аналогично. Другие случаи исключены равенством $\beta_1+\beta_2=2$. Легко проверить, что в любом случае $f_1(x), f_2(x)\in V$ и справедливо (31). Проверим выполнимость второго и третьего условий леммы 6, полагая $A=P$, где $P$ — ортопроектор, соответствующий предикату $\Phi$. В соответствии с (10) равенство (32) может быть переписано в виде

$$\gamma_0(Px)Py+(1-\gamma_0(Px))Pf_1(Px)=Pf_2(Px)).$$

Вместе с равенством (31) это дает $\gamma_0(Px)Py=$ $=\gamma_0(Px)Px$, то есть $Px=Py$. Тем самым проверено второе условие. Выполнимость третьего очевидна.

Лемма 6 доказана.

Будем называть оператор $A$ *присоединенным* к линейному предикату $\Phi$ на $V\times V$, если он вместе с некоторыми отображениями $\gamma_0, f_1$ и $f_2$ удовлетворяет условиям леммы 6.

**Лемма 7.** *Пусть $\Phi$ — линейный предикат на квадрате выпуклого множества $V$ с* $\operatorname{aff}V=L_2[0,1]$, *а $P$ — соответствующий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату $\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$AP=A,\quad PA=P. \tag{36}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о . *Достаточность.* Пусть оператор $A$ связан с ортопроектором $P$, соответствующим предикату $\Phi$, равенствами (36). Тогда, как было показано при доказательстве леммы 3, образ оператора $A$ замкнут.

Для оператора $P$, как было показано при доказательстве леммы 6, существуют отображения $\gamma_0, f_1$ и $f_2$, которые вместе с $P$ удовлетворяют условиям леммы 6. Покажем, что они удовлетворяют условиям этой леммы и вместе с оператором $A$. Первое и третье условия очевидны. Проверим второе. Формула (10) позволяет переписать равенство (32) в виде

$$\gamma_0(Ax)Py+(1-\gamma_0(Ax))Pf_1(Ax)=Pf_2(Ax),$$

или, учитывая (31) и (36), $\gamma_0(Ax)Py=\gamma_0(Ax)Px$, то есть $Py=Px$. Последнее равенство эквивалентно равенству $Ay=Ax$, поскольку $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}P$.

*Необходимость.* Пусть линейный оператор $A$ присоединен к предикату $\Phi$. Тогда в соответствии с леммой 6 предикат является линейным. Формула (10) позволяет переписать равенство (32) в виде

$$\gamma_0(Ax)Py+(1-\gamma_0(Ax))Pf_1(Ax)=Pf_2(Ax),$$

или, учитывая (31), $Py=PAx$. Таким образом, для всех $x, y\in V$ последнее равенство выполняется тогда и только тогда, когда $Ax=Ay$. Отсюда, в частности, вытекает, что $Px=PAx$, $x\in V$. Формула (28) позволяет распространить это равенство на множество $\operatorname{aff}V$, которое по условию совпадает со всем пространством. Таким образом, второе равенство (36) выполняется.

Как было показано при доказательстве леммы 6, для оператора $A$ имеет место равенство (35). Вместе с равенством (10) это дает: для любых $x, y\in V$ равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны. Покажем, что эта эквивалентность сохраняется для любых точек пространства. Пусть $x, y \in L^2[0, 1]$. Тогда по условию леммы $x, y \in \operatorname{aff} V$. Воспользуемся равенством (29): $x=\alpha+\beta(x_1-x_2)$, $y=\alpha+\gamma(y_1-y_2)$; $\alpha, x_1, x_2, y_1, y_2 \in V$; $\beta, \gamma > 0$. Тогда равенство $Ax=Ay$ означает, что $\beta(Ax_1 - Ax_2)=\gamma(Ay_1-Ay_2)$, то есть $Au=Av$, где

$$u=\frac{\beta}{\beta+\gamma}x_1+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}y_2, \qquad v=\frac{\beta}{\beta+\gamma}x_2+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}y_1.$$

Аналогично, равенство $Px=Py$ означает, что $Pu=Pv$. Но $u, v \in V$. Поэтому равенства $Au=Av$ и $Pu=Pv$ эквивалентны. Значит, и равенства $Ax=Ay$ и $Px=Py$ эквивалентны.

Итак, $\operatorname{Ker}A=\operatorname{Ker}P$ и $Pa=P$. Как было показано при доказательстве леммы 3, отсюда вытекает равенство $AP=A$.

Лемма 7 доказана.

**Замечание**. Выбор отображений $f_1$, $f_2$ и $\gamma_0$ в представлении линейного предиката через присоединенный оператор не существенен. Если какие-либо отображения $f_1, f_2$ и $\gamma_0$ удовлетворяют второму и третьему условиям леммы 6, то любые другие отображения, для которых выполняется (31), также удовлетворяет этим условиям. Это было видно при доказательстве лемм 6 и 7. Кроме того, отображения $f_1$, $f_2$ и $\gamma_0$ могут рассматриваться не на всем пространстве, а лишь на $\operatorname{Im}A$, так как и во всех формулировках, и во всех доказательствах они применяются, по существу, лишь к элементам вида $Ax$.

В случае выпуклого множества справедливы аналоги следствий 1–4. Приведем их формулировки.

**Следствие 9.** *Пусть $\Phi$ – линейный предикат, определенный на квадрате выпуклого множества $V$ с* $\operatorname{aff}V=L^2[0, 1]$, *$P$ – соответствующий ему ортопроектор. Для того чтобы линейный оператор $A$ был присоединенным к предикату $\Phi$, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий (тем самым эти условия эквивалентны).*

Матричное представление оператора $A$, соответствующее прямому разложению $L^2[0, 1]=\operatorname{Im}P\oplus\operatorname{Ker}P$, имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где $I$ – тождественный оператор в пространстве $\operatorname{Im}P$, $A_{21}$: $\operatorname{Im}P \to \operatorname{Ker}P$ – произвольный линейный оператор.

Оператор $A$ является проектором параллельно $\operatorname{Ker}P$.

Оператор $A$ является проектором и для него справедливо равенство (35).

**Следствие 10.** *Для того чтобы для линейного оператора $A$ существовал линейный предикат на квадрате выпуклого множества $V$ с* $\operatorname{aff}V=L^2[0, 1]$, *к которому оператор $A$ присоединен, необходимо и достаточно, чтобы $A$ был проектором.*

## 8. Координатные формулировки

В приложениях особенно важен случай, когда оператор $P$ конечномерен, то есть его образ имеет конечную размерность. Будем называть линейный предикат *n-мерным*, если ранг (*рангом* линейного оператора $B$ называется размерность его образа; будем обозначать ранг оператора $B$ через $\operatorname{rg} B$) соответствующего ему ортопроектора $P$ равен $n$. Заметим, что это определение корректно, если аффинная оболочка выпуклого множества $V$, на квадрате которого определен предикат $\Phi$, совпадает со всем пространством. В противном случае ортопроектор $P$ не определен равенством (10) однозначно. Из первого равенства (13) видно, что для любого линейного оператора $B$, связанного с предикатом $\Phi$ равенством (11), $\operatorname{rg} B=\operatorname{rg} P$. Таким образом, если предикат $\Phi$ является $n$-мерным, то для любого такого оператора $B$ будет $\operatorname{rg} B=n$. В частности, так будет для любого оператора $A$, присоединенного к предикату $\Phi$. В этом параграфе, используя предыдущие результаты, мы разовьем координатную теорию линейных предикатов.

**Лемма 8.** *Для того чтобы предикат $\Phi$, определенный на квадрате выпуклого множества $V$ с $\operatorname{aff} V=L_2[0,1]$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовала линейно-независимая система линейных функционалов* (в силу теоремы Рисса в гильбертовом пространстве существует канонический изоморфизм между векторами и линейными функционалами. Мы, однако, не всегда будем отождествлять векторы и функционалы в формулировках результатов, имея в виду удобство приложений) $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *такая, что для любых $x, y \in V$ равенство*

$$\Phi(x,\ y)=1 \tag{37}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(x)=\alpha_i(y), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{38}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ – линейно-независимая система линейных функционалов, для которой равенства (37) и (38) эквивалентны. Выберем любую линейно-независимую систему векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$ и рассмотрим оператор $B$, определенный равенством

$$Bx=\sum_{1}^{n}\alpha_i(x)e_i. \tag{39}$$

Тогда равенства (38) означают, что $Bx=By$. Таким образом, для любых $x, y \in V$ равенства $\Phi(x,\ y)=1$ и $Bx=By$ выполняются или не выполняются одновременно. Другими словами, имеет место равенство (11). Согласно лемме 1, предикат $\Phi$ является линейным. Из линейной независимости систем $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{e_i\}_{i=1}^n$ следует, что $\operatorname{rg} B=n$. Но тогда, как было замечено выше, и $\operatorname{rg} P = n$. Значит, предикат Ф является $n$-мерным. Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть Ф — $n$-мерный линейный предикат. Выберем любой линейный оператор $B$, связанный с предикатом Ф равенством (11). Тогда $\operatorname{rg} B = n$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — любой базис в подпространстве $\operatorname{Im} B$. Тогда для оператора $B$ найдется такая линейно-независимая система линейных функционалов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\alpha_i(x) = (Bx, e_i)$, что при всех $x \in L^2[0,1]$ справедливо равенство (39). Очевидно, для любых $x, y \in L^2[0,1]$ $Bx = By$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i = 1, 2, ..., n$. Комбинируя этот факт с формулой (4), получаем, что равенства (37) и (38) эквивалентны.

Лемма 8 доказана.

Если Ф — линейный предикат, $P$ — соответствующий ортопроектор, то оператор $B$ удовлетворяет равенству (11) тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im} B^* = \operatorname{Im} P$. Нас будет интересовать координатная формулировка этого утверждения. Если оператор $B$ представлен в виде (39), то для оператора $B^*$ имеет место равенство

$$B^* y = \sum_{i=1}^{n} (e_i, y)\, \alpha_i. \tag{40}$$

Это значит, что

$$\operatorname{Im} B^* = L\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}. \tag{41}$$

**Следствие 11.** *Для того чтобы две линейно-независимые системы функционалов* $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *и* $\{u_i\}_{i=1}^n$ *определяли в смысле леммы 8 на квадрате выпуклого множества* $V$ *с* $\operatorname{aff} V = L^2[0, 1]$ *один и тот же n-мерный линейный предикат, необходимо и достаточно, чтобы*

$$L\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} = L\{u_1, u_2, ..., u_n\}. \tag{42}$$

Доказательство. Пусть система $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ определяет в смысле леммы 8 предикат Ф, а система $\{u_i\}_{i=1}^n$ — предикат $A$. Обозначим через $P$ и $Q$ ортопроекторы, соответствующие предикатам Ф и $T$ соответственно. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} P &= L\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}, \\ \operatorname{Im} Q &= L\{u_1, u_2, ..., u_n\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Поэтому (43) означает, что $\operatorname{Im} P = \operatorname{Im} Q$. Поскольку $P$ и $Q$ — ортопроекторы, последнее равенство эквивалентно $P = Q$. Но в случае $\operatorname{aff} V = L^2[0, 1]$ равенство $P = Q$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ф = T$.

Следствие 11 доказано.

Для получения координатных аналогов результатов из параграфов 5 – 7 мы, как и ранее, раздельно рассмотрим различные случаи множеств $V$.

**Лемма 9**. *Для того чтобы предикат Ф, определенный на квадрате пространства* $L^2[0, 1]$, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы линейно-независимых векторов* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *и линейно-независимых функционалов* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *такие, что для любого* $x \in L^2[0,1]$

$$Ф(x, \xi_1 e_1 + ... + \xi_n e_n) = 1 \tag{44}$$

*тогда и только тогда, когда*

$$\xi_k = \alpha_k(x), \quad k = 1, 2, ..., n. \tag{45}$$

*Достаточность.* Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существуют. Рассмотрим оператор $A$, определенный равенством

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) e_k. \tag{46}$$

Пусть векторы $x$ и $y$ таковы, что $Ф(x, Ay) = 1$, то есть

$$Ф(x,\ \alpha_1(y)e_1 + ... + \alpha_n(y)e_n) = 1. \tag{47}$$

Тогда по условию леммы $\alpha_k(y) = \alpha_k(x)$, $k = 1, 2, ..., n$, то есть $Ax = Ay$. Пусть обратно для векторов $x, y \in L^2[1, 2]$ имеет место равенство $Ax = Ay$. Поскольку $\{e_k\}_{k=1}^n$ — линейно-независимые, то тогда $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$. Поэтому из условия леммы вытекает равенство (40) или, что то же самое, равенство $Ф(x, Ay) = 1$. Итак, $Ф(x, Ay) = 1$ тогда и только тогда, когда $Ax = Ay$. Согласно лемме 8, отсюда следует, что предикат Ф — линейный. То, что этот предикат является $n$-мерным, следует из тех же соображений, что и в лемме 8. Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть Ф — $n$-мерный линейный предикат. Согласно лемме 8 существует такой линейный оператор $A$, что равенство $Ф(x, Ay) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $Ax = Ay$. Как было отмечено в начале настоящего параграфа, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} P$. По условию $\operatorname{rg} P = n$. Значит, и $\operatorname{rg} A = n$. Тогда существуют такие линейно-независимые системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ и функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, что имеет место равенство (46). Легко видеть, что (47) выполняется тогда и только тогда, когда $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$, $k = 1, 2, ..., n$. Но это значит, что равенства (44) и (31) эквивалентны.

Лемма 9 доказана.

Будем говорить, что пара систем $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *присоединена* к $n$-мерному линейному предикату Ф, определенному на квадрате пространства $L^2[0, 1]$, если она удовлетворяет условиям леммы 8.

**Следствие 12.** *Для того чтобы пара линейно-независимых векторов и функционалов* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *была присоединена к n-мерному линейному предикату Ф, определенному на квадрате пространства* $L^2[0, 1]$, *необходимо и достаточно, чтобы равенство (37) было эквивалентно равенству (38) и*

$$\alpha_i(e_k) = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, 2, ..., n, \tag{48}$$

*где* $\delta_{ik}$ *– символ Кронекера:* $\delta_{ik}$ *=1 тогда и только тогда, когда* $i = k$ *.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ таковы, что равенства (37) и (38) для них эквивалентны и выполняется (48). Определим оператор $A$ равенством (46). Как и при доказательстве леммы 8, можно проверить, что выполняется равенство $\Phi(x, y) = D(Ax, Ay)$ . Далее, используя (48), получаем

$$\alpha_j(Ax) = \left(\alpha_j, \sum_{k=1}^n \alpha_k(x)e_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_j(e_k)\alpha_k(x) = \alpha_j(x).$$

Поэтому

$$A^2x = \sum_{j=1}^n \alpha_j(Ax)e_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x)e_j = Ax.$$

Таким образом, $A$ – проектор. Эквивалентность равенств (37) и (38) означает справедливость формулы (15). Из следствия 11 вытекает, что оператор $A$ присоединен к предикату Ф. Отсюда вытекает, что (44) эквивалентно (45).

*Необходимость.* Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ присоединены к $n$-мерному линейному предикату Ф. Определим оператор $A$ равенством (46). При доказательстве леммы 9 в сторону достаточности было показано, что так определенный оператор $A$ является присоединенным к предикату Ф. Тогда согласно следствию 11 оператор $A$ является проектором и имеет место равенство (15), которое означает, что (37) и (38) эквивалентны. Из равенства $A^2 = A$ следует, что

$$\alpha_j(Ax) = \alpha_j(x), x \in L^2[1, 2], \ j = 1, 2, ..., n. \quad (49)$$

Это значит, что

$$\sum_{k=1}^n \alpha_j(e_k)\alpha_k(x) = \alpha_j, j = 1, 2, ..., n. \quad (50)$$

Поскольку предикат Ф является $n$-мерным, то $\mathrm{rg}\, A = n$ . Отсюда следует, что система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ линейно-независимая. Но тогда (50) может выполняться лишь при условии (48).

Следствие 12 доказано.

Перейдем теперь к случаю конуса.

**Лемма 10**. *Для того чтобы предикат, определенный на квадрате воспроизводящего конуса K, был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы линейно-независимых векторов* $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$ *и линейно-независимых функционалов* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *такие, что*

$$\Phi\left(x + \sum_{i \in I} \xi_i e_i, \sum_{i \in \bar{I}} \xi_i e_i\right) = 1; \ \xi_i \ge 0; \xi_i > 0, i \in I \quad (51)$$

*тогда и только тогда, когда* $I = \{i \mid \alpha_i(x) < 0\}$ *,* $\xi_i = \alpha_i(i)$ *при* $i \notin I$ *,* $\xi_i = -\alpha_i(i)$ *при* $i \in I$ *; равенство*

$$\Phi\left(x - \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x)\alpha_i, y - \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x)e_i\right) = 1 \quad (52)$$

*выполняется тогда и только тогда, когда* $\Phi(x, y) = 1$ *.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существуют. Определим, как и ранее, оператор $A$ равенством (46). Далее, определим на $\mathrm{Im}\, A$ отображения $f_1$ и $f_2$ равенствами

$$f_1(Ax) = -\sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x)e_i, \ f_2(Ax) = \sum_{i \notin I(x)} \alpha_i(x)e_i. \quad (53)$$

Легко видеть, что $f_i(\mathrm{Im}\, A) \subset K$ и $f_2 - f_1$ является тождественным отображением на $\mathrm{Im}\, A$. В замечании к лемме 4 было отмечено, что для применения этой леммы достаточно, чтобы отображения $f_1$ и $f_2$ были определены только на $\mathrm{Im}\, A$. Легко видеть, что условия леммы 4 выполняются. Из этой леммы следует, что предикат Ф является линейным. Поскольку системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – линейно независимые, то, следовательно, $rgA = n$ . Достаточность доказана.

*Необходимость.* Пусть предикат Ф является $n$-мерным линейным, $P$ – соответствующий ортопроектор. Множество $P(K)$, очевидно, является конусом. Проверим, что это конус, воспроизводящий в подпространстве $\mathrm{Im}\, P$ . Действительно, пусть $y \in \mathrm{Im}\, P$ . Тогда существует $x \in L^2[0, 1]$ такой, что $y = Px$ . Поскольку $K$ – воспроизводящий конус, найдутся $x_1, y_2 \in K$ , при которых $x = x_1 - x_2$ . Положим $y_1 = Px_1, y_2 = Px_2$ . Тогда $y = y_1 - y_2, y_i \in P(K)$ .

Пусть $\{g_i\}_{i=1}^n$ – произвольный базис в $\mathrm{Im}\, P$ . Поскольку $P(K)$ – воспроизводящий конус в $\mathrm{Im}\, P$ , существуют $g'_i, g''_i \in P(K)$ такие, что $g_i = g'_i \quad g''_i$, $i = 1, 2, ..., n$ . Система $\{g_i'\}_{i=1}^n \cup \{g_i''\}_{i=1}^n$ полна в подпространстве $\mathrm{Im}\, P$ . Пусть $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ – базис, отобранный из элементов этой системы. Таким образом, в $\mathrm{Im}\, P$ существует базис $\{\beta_i\}_{i=1}^n \subset P(K)$. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – двойственный базис в $\mathrm{Im}\, P$ . (Базисы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ в одном и том же евклидовом пространстве называются *взаимно двойственными* (*дуальными, биортогональными*), если для каждого базиса существует единственный двойственный ему базис). Тогда ортопроектор $P$ может быть представлен в виде

$$Px = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)\beta_i. \quad (54)$$

Выберем произвольным образом элементы $e_i \in K$ такие, что $Pe_i = \beta_i$ , и положим

$$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)e_i. \quad (55)$$

Заметим теперь, что

$$(\alpha_i, e_j) = (P\alpha_i, e_j) = (\alpha_i, \beta_j) = \delta_{ij} \ .$$

Поэтому

$$Ae_i = e_i,\ \ i = 1, 2, ..., n. \tag{56}$$

Положим $I(x) = \{i \mid \alpha_i(x) < 0\}$. Из (55), (56) и линейной независимости векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ следует, что равенство

$$A\left(x + \sum_{i\in I}\xi_i e_i\right) = A\left(\sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right); \xi_i \geq 0; \xi_i > 0, i \in I \tag{57}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $I = I(x)$, $\xi_i = \alpha_i(x)$ при $i \notin I, \xi_i = -\alpha_i(x)$ при $i \in I$.

Сравнивая равенства (54), (55) и $Pe_i = \beta_i$, находим, что $D(Px, Py) = D(Ax, Ay)$ при всех $x, y \in L^2[0,1]$. Поэтому из определения (10) вытекает равенство

$$\Phi(x, y) = D(Ax, Ay),\ \ x, y \in K, \tag{58}$$

которое позволяет переписать (57) в виде (51). Тем самым доказано выполнение первого из условий леммы 10. Выполнимость второго очевидна.

Лемма 10 доказана.

Будем говорить, что пара систем $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *присоединена* к $n$-мерному линейному предикату Ф, определенному на квадрате воспроизводящего конуса *K*, если она удовлетворяет условиям леммы 2.3.

**Следствие 13**. *Пусть K — воспроизводящий конус в* $L^2[0,1]$. *Для того чтобы пара линейно-независимых систем векторов и функционалов* $\{e_k\}_{k=1}^n$ *и* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ *была присоединена к* $n$ *-мерному линейному предикату Ф, определенному на квадрате конуса K, необходимо и достаточно, чтобы равенство (37) было эквивалентно (38) и имело место (48).*

Это утверждение проверяется аналогично следствию 12.

Рассмотрим случай выпуклого множества $V$. Нам понадобятся некоторые определения из выпуклого анализа [5, 6]. Функция $\beta(x), x \in V$ называется *аффинной*, если для любых $x_1, x_2 \in V$

$$\beta(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 \beta(x_1) + \lambda_2 \beta(x_2), \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

Если $V = L^2[0,1]$, то непрерывная аффинная функция $\beta$ однозначно представима в виде

$$\beta(x) = (b,\ x) + c, \tag{59}$$

где $b \in L^2[0,1]$, $c$ — число. Система точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ называется *аффинно-независимой*, если равенства

$$\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k e_k = 0,\quad \sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k = 0$$

могут выполняться лишь при $\gamma_k = 0, k = 1, 2, ..., n+1$. В любом $n$-мерном аффинном многообразии существуют аффинно-независимые системы из $n+1$ точек и не существуют такие системы из большего числа точек. Таким образом, если система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая, то $rg\, aff\{e_i\}_{i=1}^{n+1} = n$. Любой вектор $x \in aff\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i = 1. \tag{60}$$

Если система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая (и только в этом случае), представление (60) единственно. В этом случае $\beta_i(x)$ — непрерывные аффинные функции, удовлетворяющие тому условию, что система линейных уравнений

$$\beta_i(x) = s_i,\ \ i = 1, 2, ..., n+1 \tag{61}$$

разрешима при любых правых частях таких, что $s_1 + ... + s_{n+1} = 1$. Эти функции называются *барицентрическими координатами*. Полагая в (60)

$$I(x) = \{i \mid \beta_i(x) < 0\},\quad \alpha_0(x) = \left(\sum_{i\notin I(x)}\beta_i(x)\right)^{-1}, \tag{62}$$
$$\alpha_i(x) = \alpha_0 |\beta_i(x)|,$$

приходим к представлению (здесь и далее сумму по пустому множеству индексов считаем равной нулю):

$$\alpha_0 x + \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i = \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i, \tag{63}$$

$$\alpha_i \geq 0;\quad \alpha_0 > 0;\quad \alpha_i > 0\ \text{ при }\ i \in I;$$

$$\alpha_0 + \sum_{i\in I}\alpha_i = 1;\quad \sum_{i\notin I}\alpha_i = 1. \tag{64}$$

Обратно, если для точки $x$ имеет место представление (63), (64), то, полагая

$$\beta_i(x) = \begin{cases}\alpha_i(x)/\alpha_o(x), & i \notin I(x),\\ -\alpha_i(x)/\alpha_o(x), & i \in I(x),\end{cases} \tag{65}$$

приходим к представлению (60). Представление (63), (64) для каждой точки $x \in \mathrm{aff}\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ является единственным тогда и только тогда, когда система $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ — аффинно-независимая.

Пусть $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ — некоторая система функций в $L^2[0,1]$ и $I(x)$ — некоторое отображение $L^2[0,1] \to \{1, 2,..., n+1\}$, удовлетворяющее при всех $x \in L^2[0,1]$ условию (64). Введем систему функций $\{\beta_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ равенствами (65). Будем называть $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ $I(x)$ *системой однородных координат*, если функции $\beta_i(x)$ являются аффинными и система (61) при условии $s_1 + ... + s_{n+1} = 1$ разрешима.

**Лемма 11**. *Для того чтобы предикат Ф, определенный на квадрате выпуклого множества* $V$ *с* $\mathrm{aff}\, V = L^2[0,1]$, *был n-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовали системы аффинно-независимых точек* $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$ *и однородных координат* $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, $I(x)$ *такие, что*

$$\Phi\left(\xi_0 x + \sum_{i\in I}\xi_i e_i, \sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right) = 1; \tag{66}$$

$$\xi_0 > 0, \quad \xi_i > 0, \quad i \in I; \quad \xi_i \geq 0, \quad i \notin I,$$
$$\xi_0 + \sum_{i\in I} \xi_i = 1, \quad \sum_{i \notin I} \xi_i = 1 \tag{67}$$

тогда и только тогда, когда $\xi_i = \alpha_i(x), \quad I = I(x)$; равенство

$$\Phi(\alpha_0(x)x + \sum_{i \in I(x)} \alpha_i(x) e_i,\ \alpha_0(x) y + \\ + \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) e_i) = 1 \tag{68}$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y) = 1$.

Доказательство. *Достаточность*. Пусть системы $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ и $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, $I(x)$ с указанными свойствами существуют. Рассмотрим пару точек $x$, $y$, удовлетворяющих условию $\Phi(x, y) = 1$. Тогда имеет место равенство (68). Кроме того, по условию

$$\Phi\left(\alpha_0(x)x + \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) e_i, \quad \sum_{i \notin I(x)} \alpha_i(x) e_i\right) = 1. \tag{69}$$

Из (68) и (69) получаем

$$\Phi\left(\alpha_0(x)y + \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x) e_i, \quad \sum_{i \notin I(x)} \alpha_i(x) e_i\right) = 1. \tag{70}$$

Поэтому из первого условия леммы следует, что

$$I(y) = I(x); \alpha_i(y) = \alpha_i(x),\ i = 0, 1, ..., n+1. \tag{71}$$

Но тогда и

$$\beta_i(x) = \beta_i(y),\ i = 1, 2, ..., n+1. \tag{72}$$

Пусть обратно выполняется (72) и, следовательно, (68). Тогда имеет место равенство (70). Комбинируя его с (69), получаем (68). Тогда по условию леммы $\Phi(x, y) = 1$.

Исходя из (59), можно переписать равенство (72) в виде $Ax = Ay$, где

$$Ax = \sum_{i=1}^{n+1} (b_i, x) e_i, \qquad (b_i, x) = \beta_i(x) - C_i. \tag{73}$$

Таким образом, $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $Ax = Ay$. Из леммы 1 следует, что предикат $\Phi$ линеен. Осталось показать, что $\mathrm{rg}\, A = n$. Рассмотрим аффинное отображение

$$C(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) e_i. \tag{74}$$

Тот факт, что система (61) разрешима при любых $\{s_i\}^{n+1}$, сумма которых равна 1, означает, что $\mathrm{Jm}\, C = \mathrm{aff}\ \{e_i\}_{i=1}^{n+1}$. Но нетрудно видеть, что $C(x) = = Ax + d$, где $d = c_1 e_1 + ... + c_{n+1} e_{n+1}$ и, следовательно, $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, C \quad d$. Поэтому размерность линейного оператора $A$ совпадает с размерностью аффинного оператора $C$, то есть с размерностью $\mathrm{aff}\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$. Последняя равна $n$, так как векторы $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ – аффинно-независимые. Достаточность доказана.

*Необходимость*. Пусть предикат $\Phi$ является $n$-мерным линейным, $P$ – соответствующий ортопроектор. Проверим, что

$$\mathrm{aff}\, P(V) = \mathrm{Im}\, P. \tag{75}$$

Действительно, $P(V) \subset \mathrm{Im}\, P$. Поскольку $\mathrm{Im}\, P$ – линейно, а следовательно, является аффинным многообразием, отсюда вытекает включение $\mathrm{aff}\, P(V) = \mathrm{Im}\, P$. Пусть $y \in \mathrm{Im}\, P$. Тогда существует $x \in L^2[0,\ 1]$ такой, что $y = Px$. Поскольку $\mathrm{aff}\, V = L^2[0,\ 1]$, то, согласно (28), существуют такие точки $x, y \in V$ и числа $\lambda_1, \lambda_2$, сумма которых равна 1, что $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Поэтому $y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$, где $y_i = Px_i \in P(V)$. Отсюда видно, что $y \in \mathrm{aff}\, P(V)$. Равенство (75) доказано.

По условию $\mathrm{rg}\, P = n$. Поэтому существуют такие векторы $g_i \in \mathrm{Im}\, P,\ i = 1, 2, ..., n+1$, что

$$\mathrm{aff}\{g_i\}_{i=1}^{n+1} = \mathrm{Im}\, P. \tag{76}$$

Согласно (75) и (28) найдутся такие системы $\{u_i\}_{i=1}^{n+1}, \{v_i\}_{i=1}^{n+1} \in P(V)$ и числа $\lambda_{1i}, \lambda_{2i}$, что $g_i = \lambda_{1i} u_i + \lambda_{2i} v_i,\ \lambda_{1i} + \lambda_{2i} = 1,\ i = 1,\ 2, ...,\ n+1$. Поэтому $\mathrm{aff}\{g_i\}_{i=1}^{n+1} \subset \mathrm{aff}\{\{u_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{v_i\}_{i=1}^{n+1}\} = \mathrm{Im}\, P$. Вместе с (76) это дает

$$\mathrm{aff}\{\{u_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{v_i\}_{i=1}^{n+1}\} = \mathrm{Im}\, P. \tag{77}$$

Выберем из системы $\{u_i\}_{i=1}^{n+1} \cup \{v_i\}_{i=1}^{n+1}$ аффинно-независимую подсистему. Из (77) и равенства $\mathrm{rg}\, P = n$ вытекает, что эта подсистема состоит из $(n+1)$-й точки и ее аффинная оболочка совпадает с образом $P$. Таким образом, существует аффинно-независимая система $\{e_i'\}_{i=1}^{n+1} \subset P(V)$ такая, что

$$\mathit{aff}\{e_i'\}_{i=1}^{n+1} = \mathrm{Im}\, P. \tag{78}$$

Отсюда следует, что для любого элемента $x \in L^2[0,\ 1]$ существует единственное представление:

$$Px = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i e_i', \quad \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1, \tag{79}$$

причем барицентрические координаты $\beta_i(x)$ являются аффинными функциями. Пользуясь формулой (65) перехода от представления (60) к представлению (63), можно заключить, что существует такая система однородных координат $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$, $I(x)$, что равенство

$$\xi_0 Px + \sum_{i\in I} \xi_i e_i' = \sum_{i \notin I} \xi_i e_i' \tag{80}$$

при условии (67) выполняется тогда и только тогда, когда $\xi_i = \alpha_i(x), I = I(x)$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$ – любые точки, для которых $e_i = Pe_i$. Равенство (80) может быть переписано в виде

$$P\left(\xi_0 x+\sum_{i\in I}\xi_i e_i\right)=P\left(\sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right)$$

или, учитывая формулу (10), в виде (66). Таким образом, первое условие леммы 11 проверено. Выполнение второго условия очевидно. Лемма 11 доказана.

Будем говорить, что системы точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ *присоединены* к $n$-мерному линейному предикату $\Phi$, определенному на квадрате выпуклого множества $V$ с $\operatorname{aff} V = L^2[0,1]$, если они удовлетворяют условиям леммы 11.

**Следствие 14**. *Пусть $V$ — выпуклое множество $\operatorname{aff} V = L^2[0,1]$. Для того чтобы пара аффинно-независимой системы точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}\subset V$ и системы однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ была присоединена к $n$-мерному линейному предикату $\Phi$, определенному на $V\times V$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x,y)=1$ было эквивалентно (71) и были справедливы соотношения*

$$\alpha_0(e_j)=1, \alpha_0(e_j)=\delta_{ij}, I(e_j)=\varnothing,$$

$$i,j=\overline{1,n+1}. \qquad (81)$$

Доказательство. Пусть пара $\{e_k\}_{k=0}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}$, $I(x)$ присоединена к $n$-мерному линейному предикату $\Phi$. Тогда, как было показано при доказательстве леммы 14 в сторону достаточности, равенство $\Phi(x,y)=1$ эквивалентно (71). Далее $\Phi(e_j,e_j)=1$. Это означает, что выполняется (66) с $\xi_0=1,\xi_j=1,\xi_i=0$ при $i\neq j, I=\varnothing$. В силу первого условия леммы 14 отсюда вытекает (81).

Пусть, обратно, для пары $\{e_k\}_{k=0}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}$, $I(x)$ равенство $\Phi(x,y)=1$ эквивалентно (71) и выполняется (81). Заметим, что в силу соотношений (62) и (65) равенство (71) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется (72), а (81) может быть переписано в виде

$$i,j=1,\ 2,\dots,\ n+1. \qquad (82)$$

В частности, (66) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\beta_j\left(\xi_0 x+\sum_{i\in I}\xi_i\beta_j(e_i)\right)=\beta_j\left(\sum_{i\notin I}\xi_i e_i\right).$$

Поскольку $\beta_j$ — аффинные функции и имеют место равенства (67), то последнее равенство может быть переписано в виде

$$\xi_0\beta_j(x)+\sum_{i\in I}\xi_i\beta_j(e_i)=\sum_{i\notin I}\xi_i\beta_j(e_i)$$

или, с учетом (82),

$$\beta_i(x)=\begin{cases}\xi_i/\xi_0, & i\notin I,\\ -\xi_i/\xi_0, & i\in I.\end{cases}$$

Сравнивая это равенство с (65), находим, что первое условие леммы 14 выполняется. Выполнимость второго условия очевидна.

Следствие 14 доказано.

## Выводы

Проанализированы результаты Шредингера в области объективного изучения субъективных состояний человека и построения проекта теоретического обоснования колориметрии. Проанализированы проблемы разработки математического аппарата, необходимого для описания работы органов чувств. Развивается метод компараторной идентификации на примере цветового зрения человека. Показано, что субъективные состояния человека поддаются объективному изучению физическими методами.

**Список литературы: 1.** *Maxwell, J.C.* On the theory of compound colours and the relations of the spectrum // Proc. Roy. Soc. 1860 – V. 10. **2.** *Schrödinger, E.* Grundlinien einer Theorie der Farbenmetric im Tagessehen // Ann. d. Phys., (4). 1920 – Bd. 63, N22. **3.** *Grassman, H.* Zur Theorie der Farbenmischung // Ann. d. Phys. u Chemie. – 1853 – Bd. 89, N5. **4.** *Ленин, В.И.* Материализм и эмпириокритицизм [Текст] / В.И. Ленин – М.: Госполитиздат, 1967. **5.** *Рокафеллар, Р.* Выпуклый анализ [Текст] / Р. Рокафеллар – М.: Мир, 1973. – 347 с. **6.** *Никайдо, Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика [Текст] / *Х. Никайдо* – М.: Мир, 1972. – 533 с.

***Поступила в редколлегию 11.03.2011.***

УДК 510.6

**Лінійні предикати та їх застосування для моделювання колірного зору людини** / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51.

Пропонується математичний апарат для моделювання психофізичних явищ. Розглянуті проблеми побудови математичних моделей колірного зору людини.

Бібліогр.: 6 найм.

UDC 510.6

**Linear predicates and their applications for the man colour sight modeling** / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 33-51.

A mathematical apparatus is offered for the design of the psychophysical phenomena. The problems of man's colour sight mathematical models construction are considered.

Ref.: 6 items.