УДК 519.713

А.С. МАЗМАНИШВИЛИ, Т.А. СИЛА, Н.И. СЛИПЧЕНКО

АДДИТИВНЫЙ КВАДРАТИЧНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ В ЗАДАЧАХ РИСКА И УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЕРОЯТНОСТИ ЛИНЕЙНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ

Рассматривается линейная система, возмущенная белым шумом, и интегральный квадратичный функционал. Получены явные выражения для решения задачи риска в подобных системах.

1. Рассмотрим систему, которая описывается линейным стохастическим уравнением в пространстве размерности M:

$$\frac{d}{dt}X + AX = f(t), \tag{1}$$

где $X(t)$ – вектор состояния; $f(t)$ – стороннее возмущение, обладающее свойствами векторного белого шума; A – диссипативная матрица размером $(M \times M)$. Примем, что результатом наблюдения за системой в течение временного интервала $(0 \le t \le T)$ является интегральный квадратичный функционал следующего вида:

$$J_{x+s} = \int_0^T dt \left(X(t) + s(t)\right)^{\mathrm{T}} V \left(X(t) + s(t)\right), \tag{2}$$

здесь V – заданная $(M \times M)$ матрица наблюдения; а $s(t)$ – заданная векторная функция. Эту функцию можно интерпретировать как сигнал, регистрируемый согласно (1) на фоне шума $X(t)$.

Функционал (2) определен на ограниченном отрезке времени, он зависит от случайной функции $X(t)$ и в силу (1) является случайной величиной. Поставим задачу [1] о нахождении статистических свойств функционала J_{x+s}. Информация о плотности распределения вероятностей случайной величины J_{x+s} или, что эквивалентно, о производящей функции (ПФ) этой случайной величины необходима, например, в задачах синтеза оптимальных приемников или задачах риска [2,3].

2. В целях теоретико-вероятностного анализа свойств функционала (2) рассмотрим производящую функцию следующего вида:

$$Q_{x+s}(\lambda) = \mathbf{M}\left[\exp\left(-\lambda J_{x+s}\right)\right], \tag{3}$$

где λ – параметр; $\mathbf{M}[.]$ – символ математического ожидания.

Пусть $S = \mathbf{M}[f(t) \otimes f(t)]$ – ковариационная матрица шума в (1), а $(M \times M)$ – матрица L – решение стационарного матричного уравнения Ляпунова $AL + LA^{\mathrm{T}} = S$. Тогда корреляционный оператор $K(\tau, \tau')$ случайного процесса $X(t)$ равен [2]

$$K(\tau,\tau') = \mathbf{M}[X(\tau) \otimes X(\tau')] = \tag{4}$$
$$= \theta(\tau - \tau')\exp\left(-A\tau + A\tau'\right)L + \theta(\tau' - \tau)L\exp\left(-A^{\mathrm{T}}\tau' + A^{\mathrm{T}}\tau\right)$$

где $\theta(.)$ – функция Хэвисайда.

В дальнейшем выберем какое-либо зафиксированное значение квадратного корня $V^{1/2}$ из матрицы наблюдения V. Для учета явного вида функционала J_{x+s} используем $V^{1/2}$ в качестве матрицы поворота из исходного (физического) в новое пространство (в котором будем обозначать все величины индексом "V") по правилу $X_V(t) = V^{1/2}X(t)$, $A_V = V^{1/2}AV^{-1/2}$, $S_V = V^{1/2}SV^{-1/2}$ и $L_V = V^{1/2}LV^{-1/2}$. На основе корреляционного оператора (4) можно [3] осуществить разложение процесса $X_V(t)$ в каноническом базисе $\{e_n(t)\}$ с отвечающим ему набором собственных чисел $\{\lambda_n\}$, где $n = 1,2,\ldots$. При этом базисные функции удовлетворяют следующему интегральному уравнению Карунена-Лоэва:

$$e_n(\tau) - \lambda_n \int_0^T d\tau' K(\tau, \tau') e_n(\tau') = 0. \tag{5}$$

Базис $\{e_n(t)\}$ является оптимальным по сходимости и равномерности [3]. В этом базисе ПФ принимает следующий вид:

$$Q_{x+s}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \left(2\pi\lambda_n\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_n x_n^2 - \lambda\left(x_n + s_n\right)^2\right), \tag{6}$$

здесь обозначено в качестве результата скалярного произведения

$$x_n = \int_0^T d\tau\, x_V(\tau) e_n(\tau) \equiv (x_V, e_n), \quad s_n = \int_0^T d\tau\, s_V(\tau) e_n(\tau) \equiv (s_V, e_n). \tag{7}$$

Обозначив значение ПФ (3) при $s(t) = 0$ (отсутствие сигнала) через $Q_x(\lambda)$, запишем

$$Q_{x+s}(\lambda) = Q_x(\lambda)\exp\left\{-\lambda\left(s_V, \left(I + 2\lambda K_V\right)^{-1}\right)s_V\right\}, \tag{8}$$

где I – единичная $(M \times M)$ матрица, а ПФ $Q_x(\lambda)$, согласно (6), равна

$$Q_{x+s}(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + 2\lambda / \lambda_n\right)^{-1/2}. \tag{9}$$

Следующая функция

$$\varphi_V(\tau) = \left(I + 2\lambda K_V\right)^{-1} s_V(\tau)$$

является решением интегрального уравнения $\left(I + 2\lambda K_V\right)\varphi_V(\tau) = s_V(\tau)$ и для рассматриваемого корреляционного оператора равна

$$\varphi_V(\tau) = s_V(\tau) + 2\lambda\left[E_2(2\lambda,\tau) + L_V E_4(2\lambda,\tau)\right]E_4^{-1}(2\lambda, T) \times \tag{10}$$

$$\times \int_0^T d\tau' \left[E_3(2\lambda, T-\tau') L_V - E_4(2\lambda, T-\tau') \right] s_V(\tau') -$$

$$-2\lambda \int_0^T d\tau' [E_1(2\lambda, \tau-\tau') L_V - E_2(2\lambda, \tau-\tau') +$$

$$+ L_V E_3(2\lambda, \tau-\tau') L_V - L_V E_4(2\lambda, \tau-\tau')\,] s_V(\tau').$$

Здесь обозначено $E_1(\lambda,\tau)$, $E_2(\lambda,\tau)$, $E_3(\lambda,\tau)$, $E_4(\lambda,\tau)$ – блоки размером $(M \times M)$, последовательно образующие в совокупности матричную экспоненту $\exp(\tau H_V(\lambda))$ размером $(2M \times 2M)$, т.е.

, (11а)

$$H_V(\lambda) = \begin{pmatrix} -A_V + \lambda L_V & \lambda L_V^2 \\ -\lambda I & A_V^{\mathrm{T}} - \lambda L_V \end{pmatrix}. \quad (11б)$$

Парциальную ПФ $Q_x(\lambda)$ (9) можно найти, согласно теореме Адамара [4], если построить аналитическую функцию $\Phi(\lambda)$, последовательность нулей у которой совпадает с набором собственных чисел $\{\lambda_n\}$. В целях совокупного определения набора $\{\lambda_n\}$ рассмотрим (5) как характеристическое уравнение. Из (5) следует, что нетривиальное решение этого интегрального уравнения будет иметь место, если для правого нижнего блока $E_4(\lambda,T)$ матрицы $\exp(\tau H_V(\lambda))$ выполняется $\det E_4(\lambda,T)=0$, другими словами, $\Phi(\lambda)=\det E_4(\lambda,T)$. Поэтому, с учетом условия нормировки $Q_x(0)=1$, для чисто шумовой ПФ найдем

$$Q_x(\lambda) = \left[\det E_4(0,T) / \det E_4(-2\lambda,T)\right]^{1/2}. \quad (12)$$

Возвращаясь в исходное физическое пространство для $(M \times M)$ матрицы $H(\lambda)$, запишем

$$H(\lambda) = \begin{pmatrix} -A + \lambda LV & \lambda LVL \\ -\lambda V & A^{\mathrm{T}} - \lambda VL \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Отсюда выражение для искомой ПФ $Q_{x+s}(\lambda)$ дается совокупностью формул (8),(9) и (12),(13). Плотность распределения вероятностей случайных значений аддитивного квадратичного функционала качества системы J_{x+s} получается на основе обратного преобразования Лапласа от $Q_{x+s}(\lambda)$. Результат инвариантен относительно выбранного квадратного корня $V^{1/2}$ матрицы наблюдения V.

Рассмотрение поставленной задачи приводит к аналитическим и вычислительным трудностям при любом подходе решения. Альтернативный подход, основанный на использовании разложения в базисе собственных функций, требует определения набора собственных чисел $\{\lambda_n\}$ и отвечающего ему набора собственных функций $\{e_n(t)\}$, оценок возникающих погрешностей и исследования сходимости, при этом выбранная фактическая размерность базиса (число используемых компонент-функций) неравномерно зависит от параметров задачи и требует каждый раз определения [6,7]. Важно отметить, что изложенный подход не требует находить набор $\{\lambda_n\}$ и набор $\{e_n(t)\}$, а также число его компонент. Вместе с тем сохраняются обычные трудности, связанные с решением матричного уравнения Ляпунова $AL + LA^{\mathrm{T}} = S$ и нахождением матричной экспоненты $\exp(\tau H_V(\lambda))$ удвоенной размерности.

3. Распространенные на практике методы решения задач оптимального синтеза линейных стохастических систем опираются, как правило, на информацию о первых двух статистических моментах используемых критериев качества [5]. Вместе с тем большой класс задач (задачи риска), связанных с исчислением вероятности превышения заданного порога заданным функционалом, требует статистической информации обо всех моментах критерия, т.е. его плотности распределения. Несмотря на свою сложность, задачи такого рода важны в практическом отношении. Построенный в настоящей работе алгоритм нахождения производящей функции дает возможность определить (при заданном пороговом уровне) искомую вероятность превышения, т.е. вероятность риска.

Список литературы : 1. *Девятов Б.Н.* Теория и методы анализа управляемых распределенных процессов. Новосибирск: Наука, 1983. 271 с. 2. *Казаков И.Е., Мальчиков С.В.*. Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М.: Наука, 1983. 384 с. 3. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 659 с. 4. *Маркушевич А.И.* Краткий курс теории аналитических функций. М.: Наука, 1978. 416 с. 5. Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. М.: Наука, 1986. 504 с. 6. *Палагин Ю.И., Шалагин А.С.* Вычисление законов распределения квадратичных форм от гауссовых случайных величин // Радиотехника и электроника. 1981. Т.26, № 7. С.1420–1429. 7. *Проскурин В.И.* Распределение вероятностей квадратичного функционала от гауссова случайного процесса // Радиотехника и электроника. 1985. Т.30, № 7. С.1335–1342.

Поступила в редколлегию 11.12.99

Мазманишвили Александр Сергеевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры САУ ХГПУ. Научные интересы: теория связи, радиофизика, прикладная математика. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 40-00-56.

Сила Татьяна Александровна, аспирантка кафедры КГМ ХГПУ. Научные интересы: теория устойчивости, прикладная математика, теория автоматического управления. Адрес: Украина, 61002, Харьков, ул. Фрунзе, 21, тел. 40-03-55.

Слипченко Николай Иванович, канд. техн. наук, доцент кафедры МЭПУ ХТУРЭ, проректор по научной работе ХТУРЭ. Научные интересы: моделирование процессов формирования интегральных структур, разработка теории многофункциональных частотных элементов. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 47-01-07.