УДК 519.62

КВАНТОРНАЯ АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Н.Т. Процай

ХНУРЭ, г.Харьков, Украина

В статье представлена кванторная алгебра предикатных операций. Доказана теорема о равносильности фундаментальной и кванторной алгебр предикатных операций. Сформулирована теорема о полноте кванторной алгебры предикатных операций. Приведены система основных тождеств и аксиоматическое построение кванторной алгебры.

КВАНТОРНАЯ АЛГЕБРА, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ, ПРИКЛАДНАЯ АЛГЕБРА, ЛИНЕЙНЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ОПЕРАТОР

Введение

Первая научно-техническая революция содействовала усилению физических возможностей человека за счет создания механизмов и машин. Она потребовала интенсивного изучения внешнего по отношению к человеку физического мира и развития *числовой математики*. Вторая научно-техническая революция призвана содействовать усилению интеллектуальных возможностей людей за счет совершенствования искусственного интеллекта. Она требует объективного изучения внутреннего психологического мира человека и развития *математики интеллекта*, в роли которой выступает *логическая математика*. Для развития логической математики и ее приложений в искусственном интеллекте особую роль играет *алгебрологический анализ естественного языка и мышления* человека [1] Так, Джордж Буль, изучая в середине 19-го столетия логическую структуру сложных предложений естественного языка, открыл алгебру логики, которая впоследствии стала теоретической базой построения схем первых ЭВМ и программ для них. В конце того же века Готлоб Фреге, алгебраизируя естественный язык математики, извлек из него кванторы, играющие в современной логической математике важную роль. В 70-х годах 20-го столетия попытки формального описания морфологии естественного языка привели к открытию *алгебры предикатов*. Наконец, работы 90-х годов по абстрактному описанию смысла текстов естественного языка содействовали отысканию целого семейства *алгебр предикатных операций*. Фундаментальная алгебра предикатных операций, описанная в работе [2], – первая полная алгебра из этого семейства. Кроме того, для фундаментальной алгебры известна полная система законов. Эти качества фундаментальной алгебры сделали ее незаменимой для теоретических изысканий в области логической математики. Вместе с тем, для практических применений фундаментальная алгебра не всегда удобна, поскольку ее формулы и тождества не обладают достаточной компактностью и изяществом. В связи с этим в [3] разрабатывают алгебру предикатных операций, которая более удобна для для тех или иных приложений, чем фундаментальная алгебра – прикладную алгебру или, как ее еще называют, алгебру подстановочных операций. Прикладная алгебра изучена меньше, чем фундаментальная алгебра. В данной области имеются только отдельные разрозненные результаты. [3,4,5] Один из таких результатов связан с идеей введения так называемой *кванторной алгебры*, являющейся, как выяснилось, логическим аналогом интегрального исчисления и функционального анализа [1]. В прикладной алгебре кванторы вводятся в порядке ее консервативного расширения [3], кванторы вводятся просто по определению, выражаются через базис прикладной алгебры. Однако роль кванторов в классической математике, естественном языке, базах данных, информатике чрезвычайно велика. И сами кванторы обладают достаточной силой, чтобы на них основать особую алгебру предикатных операций.

Цель статьи – разработать кванторную алгебру предикатных операций и обосновать целесообразность ее применения для различных практических приложений. Для достижения поставленной цели, следует решить следующие *задачи*: 1) на основании базиса прикладной алгебры построить несократимый базис кванторной алгебры предикатных операций; 2) определить систему законов кванторной алгебры; 3) дать аксиоматическое описание кванторной алгебры предикатных операций.

1. Кванторная алгебра предикатных операций

В результате, консервативно расширив базис прикладной алгебры [3] кванторами общности и существования, получим какую-то новую алгебру предикатных операций с *базисом операций*, состоящим из дизъюнкции $\mathrm{X} \vee \mathrm{Y}$, отрицания $\neg \mathrm{X}$, подстановок $x_i / a(\mathrm{X}), \left(i = \overline{1,m}, a \in U\right)$, кванторов существования $\exists x_i \in A_i(\mathrm{X})$ и общности $\forall x_i \in A_i(\mathrm{X})$, и с базисом элементов, образованным из предикатов равенства вида $D(x_1, x_i) = \underset{a \in M}{\vee} x_1^a x_i^a$, ($i = \overline{2,m}$) и переменных X_j ($\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in N; i, k = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}; a \in A_i$). Базис этой алгебры избыточен, попытаемся его сократить. Один из кванторов можно исключить из базиса. Исключаем квантор общности:

$$\forall x_i(\mathrm{X}) = \overline{\overline{\forall x_i(\mathrm{X})}} = \overline{\bigwedge_{a\in U} x_i/a(\mathrm{X})} = \overline{\bigvee_{a\in U} \overline{x_i/a(\mathrm{X})}} =$$
$$= \overline{\bigvee_{a\in U_i} x_i/a\left(\overline{\mathrm{X}}\right)} = \overline{\exists x_i\left(\overline{\mathrm{X}}\right)}.$$

Оказывается, можно исключить из базиса новой алгебры и операцию подстановки, выразив ее через квантор существования: $x_i/a(\mathrm{X}) = \exists x_i \in A_i(x_i^a \wedge \mathrm{X})$. Операцию конъюнкции выразим посредством операций дизъюнкции и отрицания, имеющихся в базисе прикладной алгебры, применяя законы де Моргана. Для выражения подстановки нам потребовались предикаты узнавания предмета $x_i^a, \left(i=\overline{1,m}, a\in U\right)$, а их нет в базисе прикладной алгебры. Вводим их в базис новой алгебры. Располагая предикатами узнавания предмета, дизъюнкцией и конъюнкцией, можем исключить из базиса новой алгебры предикаты равенства: $D\left(x_1, x_i\right) = \bigvee_{a\in u} x_1^a x_i^a$, ($i=\overline{2,m}$). Итак, мы получили новую алгебру предикатных операций, которая называется кванторной. Для ее получения мы исключили из базиса прикладной алгебры операции подстановки и предикаты равенства, а добавили кванторы существования $\exists x_i\left(\mathrm{X}\right), \left(i=\overline{1,m}\right)$ и предикаты узнавания предмета $x_i^a, \left(i=\overline{1,m}, a\in U\right)$. Таким образом, приходим к следующему определению кванторной алгебры.

Кванторной алгеброй называется алгебра предикатных операций с базисом операций, образованным из квантора существования $\exists x_i \in A_i(\mathrm{X}), i=\overline{1,m}$, отрицания $\neg\mathrm{X}$ и дизъюнкции $\mathrm{X}\vee\mathrm{Y}$ всевозможных предикатных операций, и с базисом элементов, образованным из предикатов узнавания предметов x_i^a и предикатных переменных X_j ($\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in N; i, k=\overline{1,m}; j=\overline{1,n}; a\in A_i$). Таким образом, несократимый базис кванторной алгебры состоит из операций дизъюнкции, отрицания и m кванторов существования, из $\sum_{i=1}^{m} k_i$ предикатов узнавания предмета, где k_i – число предметов в множестве A_i ($i=\overline{1,m}$) и из n предикатных переменных. Дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов является подалгеброй кванторной алгебры, поскольку в базисе последней имеются дизъюнкция, конъюнкция (выражается посредствам операций дизъюнкции и отрицания) и предикаты узнавания предмета, а также предикаты 0 ($0 = X\wedge\overline{X} = \overline{\overline{X\wedge\overline{X}}} = \overline{\overline{X}\vee\overline{\overline{X}}}$) и 1 (используем закон истинности для предикатов узнавания предмета: $\bigvee_{b\in U} x_i^b = 1$, $i=\overline{1,m}$).

Теорема: Фундаментальная и кванторная алгебры предикатных операций равносильны.

Доказательство. Равносильность кванторной и фундаментальной алгебр будет доказана, если удастся базисные элементы и операции фундаментальной алгебры выразить через базисные элементы и операции кванторной алгебры, и наоборот.

1) Выражаем базис фундаментальной алгебры через базис кванторной. Базисными операциями в фундаментальной алгебре служат дизъюнкция и конъюнкция. Дизъюнкция присутствуют уже в базисе кванторной алгебры. Конъюнкцию выражаем через дизъюнкцию и отрицание:

$$X\wedge Y = \overline{\overline{X}\vee\overline{Y}}. \tag{1}$$

Базисными элементами в ней являются элемент 0, предикаты узнавания предмета x_i^a и предиката X_j^P. Предикаты узнавания предмета x_i^a в базисе кванторной алгебры уже имеются. Осталось выразить элементы X_j^P и 0. Это можно сделать посредством зависимостей: $0 = X_j\wedge\overline{X_j}$, где X_j – предикатная переменная, а операция конъюнкции выражена выше (1). В свою очередь предикат узнавания предиката выражается с помощью постоянных предикатов P и предикатных переменных X_j, $j=\overline{1,n}$ [6]:

$$X_j^P = \forall x_1\in A_1(\forall x_2\in A_2...(\forall x_m\in A_m(X_j(x_1,x_2,...,x_m)\sim$$
$$\sim P(x_1,x_2,...,x_m))...);\ X\sim P = \overline{X}\,\overline{P}\vee XP.$$

Постоянные предикаты P выражаем на языке дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов, которая, как было сказано выше, является подалгеброй кванторной алгебры. Любой фиксированный предикат P выражается формулой дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов с помощью операций $\vee$ и $\wedge$, примененных к предикатам узнавания предмета $x_i^a, \left(i=\overline{1,m}, a\in U\right)$. Весь базис фундаментальной алгебры выражен через базис кванторной алгебры.

2) Выражаем базис кванторной алгебры через базис фундаментальной. Операциями в несократимом базисе кванторной алгебры, как было сказано выше, служат дизъюнкция, которая присутствует также и в базисе фундаментальной алгебры, а также операция отрицания и квантор существования. Операцию отрицания в кванторной алгебре выражаем посредствам *законов отрицания* для предикатов узнавания предмета $\overline{x_i^a} = \bigvee_{\substack{b\in A_i \\ b\neq a}} x_i^b$, ($i=\overline{1,m}$) и узнавания предиката $\overline{X_j^P} = \bigvee_{\substack{Q\in B_j \\ Q\neq P}} X_j^Q$, $j=\overline{1,n}$. Квантор существования выражается через дизъюнкцию и подстановки по формуле:

$$\exists x_i\in A_i(\mathrm{X}) = \bigvee_{a\in A_i} x_i/a(\mathrm{X}).$$

Операция дизъюнкции есть в базисе фундаментальной алгебры. Операции подстановки x_i/a ($i=\overline{1,m}$) перемещаются непосредственно на предикаты 0 и x_i^b ($i=\overline{1,m}, b\in A_k$) и на предикатные переменные X_j ($j=\overline{1,n}$), а затем исключаются вовсе с помощью зависимостей [6]:

$$x_i/a(0) = 0;$$

$$x_i/a(x_k^b)=x_k^b,\ \text{если}\ i\neq k\ ;$$

$$x_i/a(x_i^b)=\begin{cases}1, \text{если}\ b=a;\\ 0, \text{если}\ b\neq a.\end{cases}$$

$$x_i/a(X_j)=$$

$$=\bigvee_{P\in B_j}P(x_1,x_2,...,a,...,x_m)X_j^{P(x_1,x_2,...,x_i,...,x_m)};$$

Предикат 0 и предикаты узнавания предмета в базисе фундаментальной алгебры уже есть. Предикат 1 получаем, используя законы истинности для предикатов узнавания предмета и предикатов узнавания предиката:

$$\overline{x_i^a}=\bigvee_{\substack{b\in A_i\\ b\neq a}}x_i^b,\ (i=\overline{1,m}\,);\ \bigvee_{P\in B_j}X_j^P=1,\ j=\overline{1,n}.$$

Постоянные предикаты P выражаем на языке дизъюнктивно-конъюнктивной алгебры предикатов, которая, является подалгеброй фундаментальной алгебры. Предикаты узнавания предиката в фундаментальной алгебре уже есть.

Элементами в несократимом базисе произвольной кванторной алгебры служат предикаты x_i^a $(i=\overline{1,m})$, которые присутствуют также и в базисе фундаментальной алгебры, а также предикатные переменные X_j $(j=\overline{1,n})$. Последние выражаются по формуле $X_j=\bigvee_{P\in B_j}P(x_1,x_2,...,x_m)X_j^{P(x_1,x_2,...,x_m)}$ через дизъюнкцию, конъюнкцию, предикаты узнавания предиката и постоянные предикаты. Дизъюнкция, конъюнкция, предикаты узнавания предиката в фундаментальной алгебре имеются, постоянные же предикаты на языке фундаментальной алгебры, как уже упоминалось, выражаются. Весь базис кванторной алгебры выражен через базис фундаментальной алгебры. Итак, фундаментальная и кванторная алгебры равносильны. Теорема доказана.

Из данной теоремы и теоремы о полноте фундаментальной алгебры [2] непосредственно следует теорема о полноте кванторной алгебры.

Теорема о полноте кванторной алгебры: Кванторная алгебра полна при любых U, m и n.

Кванторная алгебра с несократимым базисом, состоящим из операций дизъюнкции и конъюнкции, из m кванторов существования и m кванторов общности, из предикатов узнавания предмета, где k_i – число предметов в множестве $A_i, i=\overline{1,m}$, из n предикатных переменных и константы 0, представлена в работах [6,7]. Также в этих же работах доказана теорема о равносильности фундаментальной и кванторной алгебр предикатных операций с вышеуказанным базисом.

2. Законы кванторной алгебры

Формулами кванторной алгебры служат кванторные выражения. Кванторные выражения используются в двух ролях: для записи предикатных операций и для записи отношений второго порядка. Во второй роли они используются в классической математике для записи ее утверждений. В первой роли – в информатике для преобразования отношений первого порядка. Кванторные выражения в числовой математике используются как логический инструментарий математики. Лишь логическая математика поставила вопрос о предании им статуса операций некой алгебры, а именно – алгебры предикатных операций, сделала их предметом специального изучения.

Кванторная алгебра имеет такую же описательную силу, как и язык. Однако наряду с наличием полного базиса кванторной алгебры, у нас нет полной системы законов данной алгебры. Законы однозначно определяют алгебру, если их набор полон, мы можем образовать все ее свойства. Тождеств в кванторной алгебре очень много. Здесь вопрос лишь в том, чтобы отобрать в полную систему законов законы из числа уже известных. Приведем ниже известные законы для кванторов, которые являются базой для поиска полной системы законов кванторной алгебры.

Законы исключения и введения кванторов:

$$\forall yP(x)=P(x);\ \exists yP(x)=P(x).$$

Эти равенства справедливы для любого предиката P. Квантор можно опускать, если предикат, на который он действует, не зависит от переменной, по которой берется этот квантор. И обратно – в этом случае квантор можно вводить.

Законы переброски кванторов:

$$\forall y\big(P(x)Q(y)\big)=P(x)\forall yQ(y);$$

$$\forall y\big(P(x)\vee Q(y)\big)=P(x)\vee\forall yQ(y);$$

$$\exists y\big(P(x)Q(y)\big)=P(x)\exists yQ(y);$$

$$\exists y\big(P(x)\vee Q(y)\big)=P(x)\vee\exists yQ(y).$$

Это – обобщение законов исключения и введения кванторов. Квантор по переменной y можно перебрасывать через любой предикат, не зависящий от переменной y.

Законы замены связанной переменной:

$$\forall xP(x)=\forall yP(y);\ \exists xP(x)=\exists yP(y).$$

Связанную квантором переменную можно менять на любую другую, но только в тех случаях, когда это не приводит к коллизии предметных переменных. Например неверно, что $\forall x\forall yP(x,y)=\forall x\forall xP(x,x)$. Связанную переменную нельзя заменять на такую другую, которая уже имеется в том же кванторном выражении. Но можно заменить предметную переменную y в той же формуле на переменную z, так как она не встречается в этой формуле.

Частные законы дистрибутивности для кванторов:

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) = \forall x \big(P(x) \wedge Q(x)\big),$$
$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) = \exists x \big(P(x) \vee Q(x)\big).$$

Эти равенства верны для любых предикатов P и Q. Это – дистрибутивные свойства кванторов, регулирующие раскрытие скобок и вынос кванторов за скобки. Под символом x можно понимать также и целый набор переменных. После раскрытия скобок первое условие становится более сильным, а второе – более слабым. Поэтому имеют место такие следования:

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x \big(P(x) \vee Q(x)\big),$$
$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Rightarrow \exists x \big(P(x) \wedge Q(x)\big).$$

Обратные следования неверны.

Общие законы дистрибутивности для кванторов:

Можно так скорректировать частные законы дистрибутивности, приведенные выше, несколько усложнив их, что они будут выполняться в любой комбинации знаков $\forall$, $\wedge$; $\forall$, $\vee$; $\exists$, $\wedge$; $\exists$, $\vee$:

$$\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) = \forall x \big(P(x) \vee \forall y Q(y)\big) =$$
$$= \forall x \forall y \big(P(x) \vee Q(y)\big)$$
$$\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) = \exists x \big(P(x) \wedge \exists y Q(y)\big) =$$
$$= \exists x \exists y \big(P(x) \wedge Q(y)\big).$$

Эти законы верны и при прежних комбинациях знаков:

$$\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x) = \forall x \forall y \big(P(x) \wedge Q(y)\big),$$
$$\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) = \exists x \exists y \big(P(x) \vee Q(y)\big).$$

Однако, как правило, при комбинациях знаков $\forall$, $\wedge$ и $\exists$, $\vee$ переходят на частные дистрибутивные законы, так что последние два закона используются редко (например, когда надо приводить кванторные выражения к стандартной форме, так называемой пренексной стандартной форме Сколема). При переводе этих законов мы воспользовались законами замены связанной переменной и законами переброски кванторов, которые были приведены выше. Имеется важный частный случай, когда можно раскрывать скобки в кванторных выражениях при комбинациях знаков $\forall$, $\vee$ и $\exists$, $\wedge$:

$$\forall y \big(P(x) \vee Q(x,y)\big) = P(x) \vee \forall y Q(x,y),$$
$$\exists y \big(P(x) \wedge Q(x,y)\big) = P(x) \wedge \exists y Q(x,y).$$

Здесь один из компонентов логической суммы (произведения) не зависит от переменной, по которой берется квантор. Для перехода от левой части равенств к правой используются законы переброски кванторов.

Коммутативные законы для кванторов:

$$\forall x \forall y P(x,y) = \forall y \forall x P(x,y),$$
$$\exists x \exists y P(x,y) = \exists y \exists x P(x,y).$$

Однако необходимо отметить, что коммутативные законы справедливы только для одноименных кванторов. Разноименные кванторы менять местами нельзя. Тем не менее, в данном выражении левое условие сильнее правого, поэтому имеет место следование:

$$\exists x \forall y P(x,y) = \forall y \exists x P(x,y).$$

Обратное следование, вообще говоря, неверно.

Кванторные законы де Моргана:

$$\overline{\forall x P(x)} = \exists x \overline{P(x)}; \; \overline{\exists x P(x)} = \forall x \overline{P(x)}.$$

При переброске отрицания через знак квантора он заменяется на противоположный. С помощью этих законов и закона двойного отрицания получают зависимости, выражающие один квантор через другой.

Законы замены кванторов:

$$\forall x P(x) = \overline{\exists x \overline{P(x)}},$$
$$\forall x, y P(x,y) = \overline{\exists x \overline{\forall y P(x,y)}},$$
$$\forall x, y P(x,y) = \overline{\exists y \overline{\forall x P(x,y)}}.$$

Последние два правила непосредственно следуют из первого правила замены кванторов и коммутативных законов для кванторов.

Это только наиболее известные законы. Подобных тождеств – необозримое множество. Актуальная задача – разобраться в тождествах кванторной алгебры; найти полные и несократимые системы законов, удобные для человека и машины.

3. Аксиоматическое построение кванторной алгебры предикатных операций

Аксиоматическое построение кванторной алгебры – это важнейшее направление дальнейшего развития в теории интеллекта. Задание понятий признаками является мощным инструментом, позволяющим определить данное понятие по задающим его свойствам. Попробуем аксиоматически задать кванторную алгебру.

Дизъюнкцию и отрицание определяем законами булевой алгебры. Предикаты узнавания предмета и предикаты узнавания предиката определяем законами отрицания, истинности и ложности для предикатов узнавания предмета и предикатов узнавания предиката соответственно [6]. Остается аксиоматически определить квантор существования. Квантор будет иметь вид:

$$\exists x \in M P(x) K(x,y) = Q(y).$$

Общее решение этой системы логических уравнений: $F(P) = \exists x \in A P(x) K(x,y)$. F – произвольная аддитивная и однородная предикатная операция; $K(x,y)$ – произвольно выбираемый бинарный предикат на A×B. $P(x)$ – унарный предикат на A, $Q(y)$ – унарный предикат на B. $F(P) = Q$.

$$\exists x \in A P(x) K(x,y) = Q(y) \quad (2)$$
$$\quad\; A \quad\; A\times B \quad\; B$$

Равенство (2) дает общий вид линейного логического оператора. Таким образом, общий вид квантора существования можно задать свойствами аддитивности и однородности: $F(P \vee Q) = F(P) \vee F(Q)$; $F(\lambda P) = \lambda F(P)$, $\lambda \in \Sigma$. Вместо однородности достаточно использовать свойство нуля: $F(0)=0$. Возможно, такая система тождеств кванторной алгебры будет полной. Это надо проверять и исследовать. То, что здесь изложено – это только заготовка для дальнейшего исследования.

Выводы

Основным результатом работы является разработка кванторной алгебры предикатных операций с базисом элементов, состоящим из предикатов узнавания предмета и из предикатных переменных, и базисом операций, состоящим из операций дизъюнкции, отрицания и кванторов существования. Алгебры предикатных операций полезно использовать при проектировании систем обработки информации, различных информационных структур и их электронных схем. При изучении механизмов интеллекта человека алгебры предикатных операций целесообразно использовать для формульной записи свойств (законов) интеллектуального поведения испытуемого. Само же это поведение удачно описывается на языке алгебры предикатов [2]. С помощью формул алгебр предикатных операций изящно и просто выражается смысловая структура предложений и текстов естественного языка [8].

В статье также была предпринята попытка аксиоматического описания кванторной алгебры. Однако данная алгебраическая система изучена еще слабее, чем прикладная алгебра. Главным ее недостатком является то, что неизвестна полная система тождеств. В работе приведены наиболее известные законы. Подобных тождеств – необозримое множество. Актуальная задача – разобраться в тождествах кванторной алгебры; найти полные и несократимые системы законов, удобные для человека и машины; разработать способы тождественного преобразования формул; найти стандартные формы предикатных операций. Если бы мы имели удобные (и единственные для каждой предикатной операции) стандартные формы и умели приводить к ним любые кванторные выражения, то отпала бы необходимость в доказательствах. Но до этого пока еще очень далеко. Необходимы дополнительные исследования, чтобы до конца разработаться в этой алгебраической системе.

Совершенно неизученна и область решения кванторных уравнений: не существует регулярного метода решения систем логических уравнений. А к решению логических уравнений (в том числе и кванторных) сводится задача формирования машиной ответов на запросы. Любой вопрос – это требование найти решение некоторого логического уравнения, системы логических уравнений, обычно кванторных. Отвечая на вопросы, мы, сами того не сознавая, решаем «в уме» логические уравнения. В интеллектуальных системах природа на 95 % использует линейные логические преобразования [7], а линейные логические преобразования, как было показано выше – это ничто иное, как кванторы.

Имеется еще одна проблема, которая пока до конца не решена, но ее чрезвычайно важно решить. Мы сейчас находимся на втором этаже абстракции (алгебры предикатных операций), а есть еще бесконечно много этажей алгебр. Хотелось бы иметь не бесконечную систему алгебр, а одну – единственную алгебру, так называемую универсальную алгебру предикатов, которая бы заменила эту бесконечную иерархию алгебр.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Алгебраизация логики как катализатор информатизации // Радиоэлектроника и информатика. – Харьков: ХНУРЭ. – 2001. № 4. – С. 10-11. 2. *Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О фундаментальной алгебре предикатных операций // АСУ и приборы автоматики. – Харьков: ХНУРЭ. – 1998. – Вып. 49. – С. 68-77. 3. *Дударь З.В., Кравец Н.С., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О прикладной алгебре предикатных операций // Проблемы бионики: наук.-техн. журнал. – 1998. – Вып. 49. – С. 78-87. 4. *Баталин А.В.* Модификация алгебры подстановочных операций» // Сб. материалов 8 Междунар. молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке». – Харьков: ХНУРЭ, 2004. – Ч.2. – С. 115. 5. *Баталин А.В.* О прикладных вариантах алгебры предикатных операций // Сб.материалов 10 Междунар. конф. «Теория и техника передачи, приема и обработки информации». – Харьков-Туапсе, 2004. – Ч.2. – С. 36-39. 6. *Бондаренко М.Ф., Дударь З.В., Процай Н.Т., Черкашин В.В., Чикина В.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Алгебра предикатов и предикатных операций // Радиоэлектроника и информатика. – Харьков: ХНУРЭ. – 2000. – №3. – С.15–23. 7. *Лещинский В.А.* Модели бинарных логических сетей и их применение в искусственном интеллекте. Дисс. ... канд. техн. наук: 05.13.23. – Харьков: ХНУРЭ, 2006 – 160 с. 8. *Дударь З.В., Гвоздинская Н.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* О математическом описании смысла текстов естественного языка // Проблемы бионики:наук.-техн. журнал. – Харьков: ХНУРЭ. – 1998. Вып 48. – С. 141-149.

Поступила в редколлегию 31.03.2008