УДК 519.7

ТЕОРИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ. VI[1]

БОНДАРЕНКО М.Ф., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО С.Ю.

Рассматривается аксиоматическая теория цветового зрения человека. Решается задача математического описания механизмов цветовой инерции и иррадиации для общего случая освещения поля зрения, т.е. когда освещение меняется во времени по произвольному закону.

6.1. Распадающиеся и разностные ядра

Обозначим при произвольном числе t через L_t^2 пространство измеримых на $[0,1]\times(-\infty,t]$ дейс-тви-тельных функций $x(\lambda,\tau)$, для которых конечен интеграл

$$\int_0^1\int_{-\infty}^t e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau.$$

Пусть $\overline{K}_t$ − положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим однопараметрическое семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$, каждый из которых при соответствующем t определен на $\overline{K}_t\times\overline{K}_t$ и удовлетворяет условиям [1]. В настоящем разделе устанавливаются условия, при которых существуют n функций $g_i(\lambda)$ $0\le\lambda\le1$, и неотрицательная функция $B(\xi)$ $(\xi\ge0)$ такие, что при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и всех $x,y\in K_t$ равенство

$$\Phi_t(x,y)=1 \qquad (6.1)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(y),\quad i=1,2,...,n, \qquad (6.2)$$

где

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\int_0^1\int_{-\infty}^t g_i(\lambda)B_i(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \qquad (6.3)$$

Отметим два частных случая этой задачи. Предположим вначале, что рассматриваемая функция $x(\lambda,\tau)$ на самом деле не зависит от τ. Для того чтобы избежать в дальнейшем недоразумений, мы будем обозначать всюду на протяжении этого раздела такие и только такие функции символами u и v, возможно с какими-либо индексами. Для функций, не зависящих от τ, сформулированный выше вопрос примет следующий вид. При каких условиях, накладываемых на семейство предикатов, существует линейно-независимая система функций $\{g_i(\lambda)\}_{i=1}^n,\lambda\in[0,1]$, такая, что при всех $t\in(-\infty,\infty)$ и u, v из положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ равенство

$$\Phi_t(u,v)=1 \qquad (6.4)$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$\alpha_i(u)=\alpha_i(v),\quad i=1,2,...,n., \qquad (6.5)$$

где

$$\alpha_i(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.\ ? \qquad (6.6)$$

Ответ на этот вопрос содержится в теореме 4.1. Будем для краткости именовать совокупность условий этой теоремы условиями A.

Другой частный случай функций из $\overline{K}_t$ доставляют функции x вида

$$x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)\cdot u(\lambda), \qquad (6.7)$$

где $\beta(\tau)\in K_t$, $u(\lambda)\in K$. Для таких функций требуемый результат состоит в следующем. Для любой функции $u\in K$ существует почти всюду неотрицательная функция $B_u(\xi)$, удовлетворяющая условиям (5.15), и такая, что при любой функции $\beta(\tau)$ равенство

$$\Phi_t(\beta\cdot u, c\cdot v)=1 \qquad (6.8)$$

выполняется тогда и только тогда, когда число $c=f_u^{(t)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t)}(\beta)=\int_{-\infty}^t B_n(t-\tau)\beta(\tau)d(\tau). \qquad (6.9)$$

Для справедливости этого условия необходимо и достаточно выполнение условий теоремы 5.1. Ниже они именуются условиями B.

Теорема 6.1. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ нашлась система линейн-независимых функций $\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ и неотрицательная функция $\beta(\xi)$, удовлетворяющая условиям* (5.15) *и такая, что равенство* (6.1) *эквивалентно равенствам* (6.2), *необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, B и*

4) *для любых $t\in(-\infty,\infty)$ и $x,x',y,y'\in\overline{K}_t$ из равенств*

$$\Phi_t(x,x')=1\ \ и\ \ \Phi_t(y,y')=1 \qquad (6.10)$$

следует, что

$$\Phi_t(x+y,x'+y')=1; \qquad (6.11)$$

[1] Ч. I-V см. в журнале “Радиоэлектроника и информатика”; I: 1998. №1. С. 106-117; II и III: 1998. №4. С 000-000; IV: 1999. №1. С 135-143; V: 1999. №2. С 135-143.

5) *для любого* $t \in (-\infty, \infty)$ *и любого* $x \in \overline{K}_t$ *существует (не единственная) функция* $u \in K$ *такая, что*

$$\Phi_t(x, u) = 1; \qquad (6.12)$$

6) *для любой последовательности* $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \overline{K}_t$*, сходящейся к нулю в метрике* $\overline{L}_t^2$*, существует последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$*, сходящаяся к нулю в метрике* $L^2[0,1]$ *и такая, что*

$$\Phi_t(x_k, u_k) = 1, \quad k = 1,2,\ldots .$$

Доказательство. Проверим достаточность. Пусть x — произвольный элемент из $\overline{K}_t$, u — элемент из K такой, что имеет место равенство (6.12). Существование такого u гарантируется условием 5. Положим

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (6.13)$$

где α_i — линейный функционал, определенный равенством (6.6). Следует проверить, что это определение корректно в том смысле, что величина $\alpha_i(u)$ не зависит от выбора элемента u, удовлетворяющего равенству (6.12). Пусть V — какой-либо другой элемент из K такой, что $\Phi_t(x, v) = 1$. Тогда в силу условий [1] будет $\Phi_t(u, v) = 1$. Поэтому имеет место равенство (6.5), что и требовалось. Заметим, что отсюда, в частности, вытекает равенство

$$\alpha_i^{(t)}(u) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad u \in K. \qquad (6.14)$$

Проверим теперь, что для всех $x, y \in \overline{K}_t$ равенства (6.1) и (6.2) эквивалентны. Пусть выполняется (6.1). Подберем в соответствии с условием 5 элементы $u, v \in K$ так, чтобы

$$\Phi_t(x, u) = 1, \quad \Phi_t(y, v) = 1. \qquad (6.15)$$

Из (6.1) с помощью условий [1] можно вывести, что $\Phi_t(u, v) = 1$ и поэтому в силу эквивалентности равенств (6.4) и (6.5) будет выполняться (6.5). Тогда согласно определению (6.13) должно выполняться равенство (6.2). Пусть, обратно, имеет место (6.2). По определению величин $\alpha_i^{(t)}$ найдутся такие $u, v \in K$, что

$$\begin{gathered} \Phi_t(x, u) = 1, \quad \Phi_t(y, v) = 1, \\ \alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i(v). \end{gathered} \qquad (6.16)$$

Тогда из (6.2) следует, что $\alpha_i(u) = \alpha_i(v)$. Но в таком случае выполняется (6.4). Из (6.5) и первых двух равенств (6.16) с помощью условий [1] можно вывести (6.1).

Итак, нужно лишь доказать, что функционалы $\alpha_i^{(t)}(x)$ имеют вид (6.3). Проверим вначале, что эти функционалы аддитивны. Пусть x, y — произвольные элементы из $\overline{K}_t$; u, v — элементы из K, отвечающие им в силу условия 5. Тогда имеет место равенство (6.15). Из условия 4 следует, что $\Phi_t(x + y, u + v) = 1$. По определению функционалов имеем

$$\begin{gathered} \alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i(v), \\ \alpha_i^{(t)}(x + y) = \alpha_i(u + v). \end{gathered}$$

Но функционалы α_i аддитивны. Поэтому из трех последних равенств вытекает аддитивность функционалов $\alpha_i^{(t)}(x), i = 1, 2, \ldots, n$.

Покажем, что эти функционалы непрерывны в нуле. Пусть $\{x_k(\lambda, \tau)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $\overline{K}_t$, сходящаяся к нулю. Согласно условию 6 существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$, сходящаяся к нулю и такая, что $\Phi_t(x_k, u_k) = 1$. Поскольку α_i — линейные функционалы, то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i(u_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда из определения (6.13) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i^{(t)}(x_k) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Итак, функционалы $\alpha_i^{(t)}(x)$ на $\overline{K}_t$ аддитивны и непрерывны в нуле. Поскольку $\overline{K}_t$ — воспроизводящий конус в пространстве $\overline{L}_t^2$, эти функционалы являются однозначно продолжаемыми до линейных функционалов на всем пространстве $\overline{L}_t^2$. Согласно теореме об общем виде таких функционалов, существуют функции $A_i^{(t)}(\lambda, \tau) \in \overline{L}_t^2$ такие, что

$$\begin{gathered} \alpha_i^{(t)}(x) = \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A_i^{(t)}(\lambda, \tau) x(\lambda, \tau) d\lambda d\tau, \\ x \in \overline{K}_t, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \end{gathered} \qquad (6.17)$$

Применим полученный результат к функциям вида (6.7). Из (6.8) имеем

$$\Phi_t(\beta u, f_u^{(t)}(\beta) u) = 1.$$

Поскольку равенства (6.1) и (6.2) эквивалентны, это значит, что

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f_u^{(t)}(\beta) \cdot \alpha_i^{(t)}(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (6.18)$$

Исключив из первых двух равенств системы (6.18) величину $f_u^{(t)}(\beta)$, получbм

$$\alpha_1^{(t)}(\beta u)\cdot\alpha_2^{(t)}(u)=\alpha_2^{(t)}(\beta u)\cdot\alpha_1^{(t)}(u). \quad (6.19)$$

Это равенство справедливо для всех векторов $u\in K$. Однако линейные функционалы $\alpha_i^{(t)}$ определены при любых (не обязательно положительных) $u\in L^2[0,1]$. Покажем, что равенство (6.19) справедливо при всех таких u. Зафиксируем функцию $\beta(\tau)$ и рассмотрим произвольный элемент $u_0\in L^2[0,1]$. Поскольку положительный конус K является воспроизводящим в этом пространстве, то найдутся такие элементы $u_1,u_2\in K$, что

$$u_0=u_1-u_2. \quad (6.20)$$

Рассмотрим линейные функционалы на R^2

$$a_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2),$$
$$b_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(\beta(\gamma_1u_1+\gamma_2u_2)),$$

где $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in R^2$. При $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$ элемент $u=\gamma_1u_1+\gamma_2u_2\in K$. Следовательно, для u имеет место равенство (6.19). Таким образом, при любых $\gamma_1,\gamma_2\ge 0$ будет

$$b_1(\gamma)a_2(\gamma)=b_2(\gamma)a_1(\gamma). \quad (6.21)$$

Перепишем это равенство в координатах

$$\begin{aligned}&(b_{11}\gamma_1+b_{12}\gamma_2)(a_{21}\gamma_1+a_{22}\gamma_2)-\\ &-(b_{21}\gamma_1+b_{22}\gamma_2)(a_{11}\gamma_1+a_{12}\gamma_2)=0,\end{aligned} \quad (6.22)$$

где

$$b_{ik}=\alpha_i^{(t)}(\beta u_k),\quad a_{ik}=\alpha_i^{(t)}(u_k),$$
$$i=1,2,...,n,\quad k=1,2.$$

Это значит, что многочлен от двух переменных, стоящий в левой части (6.22), равен нулю на положительнhjv квадранте. Но для многочлена это означает тождественное равенство нулю. Следовательно, (6.22) справедливо при всех γ_1,γ_2. В частности, при $\gamma_1=1,\gamma_2=-1$, поскольку

$$b_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(\beta u_0),\quad a_i(\gamma)=\alpha_i^{(t)}(u_0),$$

равенство (6.22) или, что то же самое, (6.21) примет вид

$$\alpha_1^{(t)}(\beta u_0)\alpha_2^{(t)}(u_0)=\alpha_2^{(t)}(\beta u_0)\alpha_1^{(t)}(u_0).$$

Таким образом, равенство (6.19) справедливо при всех n. Для любого линейного функционала α будем через $\operatorname{Ker}\alpha$ обозначать множество всех его нулей:

$$\operatorname{Ker}\alpha=\{x\mid\alpha(x)=0\}.$$

Из (6.19) видно, что при обращении в нуль функционала $\alpha_1^{(t)}(u)$ должен обращаться в нуль хотя бы один из функционалов, стоящих в левой части равенства. Поэтому, обозначая функционалы $u\to\alpha_i^{(t)}(\beta u)$ через $\alpha_i^{(t)}(\beta)$, получаем $\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}\subset\operatorname{Ker}\alpha_2^{(t)}\cup\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}(\beta)$. Если линейное многообразие является частью теоретико-множественного объединения двух других линейных многообразий, то оно обязано быть частью одного из них. Поэтому из последнего включения следует, что

$$\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}\subset\operatorname{Ker}\alpha_2^{(t)} \quad (6.23)$$

или

$$\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}\subset\operatorname{Ker}\alpha_1^{(t)}(\beta). \quad (6.24)$$

В случае (6.23) линейные функционалы $\alpha_1^{(t)}$ и $\alpha_2^{(t)}$ линейно-зависимы. Но в соответствии с определением (6.13) $\alpha_1^{(t)}(u)=\alpha_i(u)$, причем, согласно предположению, функционалы $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ линейно-независимы. Таким образом, включение (6.23) не может иметь места и, следовательно, справедливо (6.24). Но в таком случае существует такое число $f^{(t)}(\beta)$, что

$$\alpha_1^{(t)}(\beta)=f^{(t)}(\beta)\alpha_1^{(t)}.$$

Повторяя это рассуждение при $i=2,3,...,n$, получаем аналогичное равенство для всех i, т.е. при всех $u\in L[0,1]$

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=f^{(t)}(\beta)\alpha_i(u),\quad i=1,2,...,n. \quad (6.25)$$

Это равенство является усилением (6.18), так как из (6.25) видно, что величина $f_n^{(t)}(\beta)$, на самом деле, не зависит от n. Поэтому равенство (6.9) можно переписать в виде

$$f^{(t)}(\beta)=\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau. \quad (6.26)$$

Подставляя в (6.25) значения $\alpha_i^{(t)}(\beta u), f^{(t)}(\beta)$ и $\alpha_i^{(t)}(u)$ в виде (6.17), (6.26) и (6.6) соответственно, получаем

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}\beta(\tau)u(\lambda)A_i^{(t)}(\lambda,\tau)d\lambda d\tau=$$
$$=(\int_{-\infty}^{t}\beta(\tau)B(t-\tau)d\tau)\cdot(\int_0^1u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda).$$

Воспользовавшись теоремой Фубини, перепишем последнее равенство в виде

$$\int_0^1 u(\lambda)(\int_{-\infty}^t \beta(\tau)(e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau)-g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau)d\lambda=0.$$

Здесь $u(\lambda)$ – произвольный элемент положительного конуса K, т.е. функция от переменной λ

$$\int_{-\infty}^t \beta(\tau)(e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau)-g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau$$

ортогональна к этому конусу. Поскольку этот конус является воспроизводящим, отсюда следует, что данная функция равна нулю. Повторяя это рассуждение для функции $\beta(\tau)$, получаем, что

$$e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau)-g_i(\lambda)B(t-\tau)=0.$$

Поэтому (6.17) можно переписать в виде (6.3). Достаточность доказана.

Проверим необходимость. Пусть семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$ обладает тем свойством, что для него равенства (6.1) и (6.2) эквивалентны. Для функций $u\in K$ равенство (6.3) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(u)=(\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^t B(t-\tau)d\tau).$$

Поскольку функция $B(\xi)$ $(\xi\geq 0)$ удовлетворяет равенству (5.15), это дает

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda.$$

Правая часть этого равенства не зависит от t. Значит и левая часть не должна зависеть от t. В силу эквивалентности между равенствами (6.1) и (6.2) и ограничение предиката Φ_t на $K\times K$ не зависит от t. Таким образом, на $K\times K$ определен предикат Φ такой, что при всех $u,v\in K$ равенство $\Phi(u,v)=1$ эквивалентно равенствам $\alpha_i(u)=\alpha_i(v)$, $i=1,2,...,n$, где

$$\alpha_i(u)=\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda,$$

$\{g_i\}_{i=1}^n\subset L^2[0,1]$ – линейно-независимая система. Это и означает выполнимость условий A.

Проверим теперь выполнимость условий B. Пусть функция $x(\lambda,\tau)$ имеет вид (6.7). В этом случае равенство (6.3) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=(\int_0^1 u(\lambda)g_i(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \quad (6.27)$$

Зафиксируем u и положим

$$f^{(t)}(\beta)=\int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau. \quad (6.28)$$

Рассмотрим наряду с функцией $x(\lambda,\tau)$ функцию $x_\beta(\lambda,\tau)=f^{(t)}(\beta)\cdot u(\lambda)$. Эта функция не зависит от τ и, как видно из (6.27),

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=\alpha_i^{(t)}(f^{(t)}(\beta)u),\quad i=1,2,...,n.$$

В силу эквивалентности между равенствами (6.1) и (6.2) отсюда следует, что $\Phi_t(\beta u, f^{(t)}(\beta)u)=1$. С другой стороны, если константа C при данных u и β удовлетворяет условию $\Phi_t(\beta u, Cu)=1$, то в силу эквивалентности между равенствам (6.1) и (6.2) должно быть $\alpha_i^{(t)}(\beta u)=\alpha_i^{(t)}(Cu)$. Используя (6.27), перепишем это равенство в виде

$$(\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda)\cdot(\int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau)=$$
$$=(\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda)\cdot C\int_{-\infty}^t B(t-\tau)d\tau.$$

Отсюда, из (6.28) и равенства (5.15) следует, что $C=f^{(t)}(\beta)$. Таким образом, условие B выполняется.

Проверим теперь выполнимость условий 4-6. Выполнимость 4 очевидна. Пусть $x(\lambda,\tau)$ – произвольный элемент конуса $\overline{K}_t$. Положим при $\lambda\in[0,1]$

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^t B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau). \quad (6.29)$$

Покажем, что $u\in K$. Неотрицательность функции $u(\lambda)$ вытекает из неотрицательности функции $B(\xi)$. Далее имеем

$$u(\lambda)=\int_{-\infty}^t (e^{\sqrt{t-\tau}}B(t-\tau))\cdot(e^{-\sqrt{t-\tau}}x(\lambda,\tau)d\tau)\leq$$
$$\leq\sqrt{\int_{-\infty}^t (e^{t-\tau}B^2(t-\tau)d\tau}\cdot\sqrt{\int_{-\infty}^t (e^{-(t-\tau)}x^2(\lambda,\tau)d\tau}\leq$$
$$\leq C\sqrt{\int_{-\infty}^t (e^{-(t-\tau)}x^2(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Мы воспользовались при оценке неравенством (5.15). Таким образом,

$$\int_0^1 u^2(\lambda)d\lambda\leq C^2e^{-t}\int_0^1\int_{-\infty}^t e^\tau x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \quad (6.30)$$

Так как $x(\lambda,\tau)\in L_t^2$, то из последнего равенства видно, что $u\in L^2[0,1]$. Легко видеть, что $\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(u),\quad i=1,2,...,n.$ Тогда $\Phi_t(x,u)=1$. Выполнимость условия 5 проверена. Заметим теперь, что неравенство (6.30) может быть переписано в виде

$$\|u\|\le Ce^{-\frac{t}{2}}\|x\|. \tag{6.31}$$

Здесь $\|u\|$ – норма элемента u в метрике $L^2[0,1]$, $\|x\|$ – норма элемента x в метрике $\overline{L}_t^2$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\overline{K}_t$ – произвольная, сходящаяся к нулю последовательность. Для каждого x_k выберем элемент $x_k\in K$ по формуле (6.29). Тогда $\Phi_t(x_k,u_k)=1$ и, как видно из (6.31), последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю в метрике $L^2[0,1]$. Выполнимость 6 проверена.

Теорема 6.1 доказана.

Обсудим теперь физический смысл условий теоремы. Рассмотрим задачу о математическом описании цветовой инерции. Пусть экран равномерно освещен излучением с изменяющимся во времени спектральным составом. Предполагается, что коэффициент диффузного отражения экрана во всех точках является одинаковым. Обозначим через $x(\lambda,\tau)$ спектральную плотность лучистой яркости в момент времени τ. Пусть $[\lambda_1,\lambda_2]$ – диапазон видимого спектра. С математической точки зрения конкретное значение величин λ_1 и λ_2 не существенно. Поэтому мы будем считать $\lambda_1=0$, $\lambda_2=1$. Пусть t – произвольно фиксированный момент времени. Будем говорить, что два излучения $x(\lambda,\tau)$ и $y(\lambda,\tau)$ t*-метамерны*, если они фотометрически уравниваются в момент времени t. Записывать утверждение о t*-метамерности* будем в виде $\Phi_t(x,y)=1$. Мы предполагаем, что Φ_t – отношение эквивалентности на множестве излучений. В этом смысл условий 1-3.

Частным случаем рассматриваемых излучений являются излучения со спектральной плотностью, не меняющейся во времени. Для таких стимулов t*-метамерность* означает классическую метамерность, т.е. визуальную неразличимость в любой момент времени. Условия A являются математической записью законов Грассмана – аддитивности, трехмерности (при $n=3$) и непрерывности. Справедливость этих законов доказана многочисленными экспериментами и в настоящее время является общепризнанной.

Другим частным случаем являются излучения с постоянным спектральным составом и меняющейся во времени интенсивностью, т.е. излучения со спектральной плотностью вида $x(\lambda,\tau)=\beta(\tau)u(\lambda)$, где $u(\lambda)$ – спектральная плотность постоянного во времени излучения; $\beta(\tau)$ – интенсивность как функция времени. Такие излучения рассматривались в предыдущем разделе и там обсуждался смысл предположений *B*.

Перейдем теперь к условиям 4-6. Предположение 4 об аддитивности свойства t-метамерности в частных случаях постоянных во времени излучений или излучений с постоянным спектральным составом, но меняющейся во времени интенсивностью означает соответственно закон аддитивности Грассмана и предположение об аддитивности эффективной яркости. Поэтому для указанных частных случаев предположения 4 можно считать экспериментально обоснованными.

Пусть теперь $x(\lambda,\tau)$ и $y(\lambda,\tau)$ – какая-либо пара излучений, для которой

$$\int_0^1 x(\lambda,\tau)g_i(\lambda)d\lambda=\int_0^1 y(\lambda,\tau)g_i(\lambda)d\lambda, \tag{6.32}$$

где $g_i(\lambda)$ – функции, фигурирующие в формуле (6.6). Произведем замену метамерных излучений, согласно которой зрительное ощущение таких стимулов совпадает в любой момент времени. В литературе отсутствуют данные о каких-либо специальных исследованиях по проверке такой замены. Известно, однако, что при скачкообразной замене во времени излучения $u(\lambda)$ метамерным излучением $v(\lambda)$ наблюдатель не замечает каких-либо изменений в зрительном ощущении. На этом факте основан колориметрический метод, при котором излучения сравниваются не при одновременном, а при последовательном предъявлении. В другом частном случае, когда стимулы не зависят от времени, указанный принцип замены является основным следствием законов Грассмана. Таким образом, для некоторых классов излучений этот принцип выполняется. Очевидно, предположение об аддитивности t*-метамерности* хорошо согласуется с принципом замены метамерных излучений.

Пусть $u_1(\lambda),u_2(\lambda),u_3(\lambda)$ – какая-либо система излучений, удовлетворяющая тому условию, что любое излучение может быть фотометрически уравнено смешением излучений этой системы. В колориметрии такие системы называются основными. Тогда для любого излучения $x(\lambda,\tau)$ однозначно определены три таких функции времени $\beta_1(\tau),\beta_2(\tau),\beta_3(\tau)$, что в любой момент времени t излучения $x(\lambda,\tau)$ и $\sum_{i=1}^{3}\beta_i(\tau)u_i(\lambda)$ визуально не различимы, т.е.

$$\Phi_t(x,\sum_{i=1}^{3}\beta_i u_i)=1. \tag{6.33}$$

Именно этот факт лежит в основе цветного телевидения. Роль $x(\lambda, \tau)$ в (6.33) играет передаваемое излучение, $u_i(\lambda)$ – спектральные характеристики чувствительности трех каналов камеры, $\beta_i(\tau)$ – напряжения сигналов, передаваемых по этим каналам. В частных случаях излучений, не меняющихся во времени или меняющихся по интенсивности при постоянном спектральном составе, величины $\beta_i(\tau)$ при всех τ аддитивно зависят от излучения $x(\lambda, \tau)$. Поэтому есть основание считать, что этот факт имеет место и в общем случае. Если бы было получено экспериментальное подтверждение этого предположения, то оно служило бы сильным аргументом в пользу предположения об аддитивности t *-метамерности*.

Итак, существуют экспериментальные данные, в тех или иных случаях подтверждающие аддитивность t *-метамерности*, но не известны какие-либо экспериментальные исследования, направленные непосредственно на проверку этого предположения.

Обсудим теперь физический смысл условия 5. Пусть $x(\lambda, \tau)$ – произвольное излучение, $\beta_i(\tau)$ – функции времени, согласованные с x условием (6.33). В силу оговоренного в предыдущем разделе предположения о существовании эффективной яркости для любого момента времени t существуют три такие числа $f_{u_i}^{(t)}(\beta_i)$, что

$$\Phi_t(\beta_i u_i, f_{u_i}^{(t)}(\beta_i) u_i) = 1.$$

Тогда из аддитивности отношения Φ_t следует, что

$$\Phi_t\Big(\sum_{i=1}^{3} \beta_i u_i, \sum_{i=1}^{3} f_{u_i}^{(t)}(\beta_i) u_i\Big) = 1. \qquad (6.34)$$

Полагая

$$u = \sum_{i=1}^{3} f_{u_i}^{(t)}(\beta_i) u_i, \qquad (6.35)$$

из (6.33) и (6.34) получаем $\Phi_t(x, u) = 1$.

Другими словами, в силу экспериментального факта (6.33) предположение 5 справедливо, если справедливо предположение 4 об аддитивности.

Из практики цветного телевидения хорошо известно, что передача слабого сигнала $x(\lambda, \tau)$ может обеспечить низкими напряжениями $\beta_i(\tau)$, передаваемыми по каналам, т.е., если $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, то для функций β_i^k $(i = 1, 2, 3)$, согласованных с x_k условиями (6.33), тоже должно быть

$$\lim_{k\to\infty} \beta_i^{(k)} = 0, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Поскольку эффективные яркости непрерывно зависят от яркостей, то и $\lim_{k\to\infty} f_{u_i}^{(t)}(\beta_i^{(k)}) = 0$.

Тогда, как это видно из (6.35), последовательность u_k тоже сходится к нулю. Таким образом, выполнимость на практике условия 6 не вызывает сомнения.

6.2. Двухпараметрические семейства (параметр – точка плоскости)

Условимся обозначать через $L^2(R^2)$ пространство измеримых на вещественной плоскости R^2 функций, удовлетворяющих условию

$$\iint e^{-(u^2+v^2)} x^2(u, v)\, du dv < \infty.; \qquad (6.36)$$

$K(R^2)$ – положительный конус в этом пространстве.

Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_z(x, y)$ ($z \in R^2$ – параметр), каждый из которых определен на $K(R^2) \times K(R^2)$ и удовлетворяет условиям 1-3. В настоящем разделе устанавливаются условия, необходимые и достаточные для того, чтобы имело место равенство

$$\Phi_z(x, y) = D\Big(\iint Q(u-\xi, v-\eta) x(u, v)\, du dv, \iint Q(u-\xi, v-\eta) y(u, v)\, du dv\Big), \qquad (6.37)$$

где D – предикат равенства; $z = (\xi, \eta) \in R^2$, $Q(u, v)$ – некоторая почти всюду неотрицательная функция.

Положим для любой функции $x \in K$ и любого $\zeta = (\xi, \eta) \in R^2$

$$\tilde{x}_\zeta(u, v) = x(u-\xi, v-\eta). \qquad (6.38)$$

Функция $\tilde{x}_\zeta$ является сдвигом функции по оси абсцисс на величину ξ и оси ординат на величину η.

Теорема 6.2. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_z(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная функция Q, удовлетворяющая при любых $\xi, \eta \in R^1$ условиям*

$$\iint e^{(u-\xi)^2+(v-\eta^2)} Q^2(u, v)\, du dv < \infty,$$
$$\iint Q(u, v)\, du dv = 1.$$

и такая, что имеет место равенство (6.38), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

4) *для любых $z \in R^2$ и $x, x', y, y' \in K(R^2)$ из равенств $\Phi_z(x, x') = 1$ и $\Phi_z(y, y') = 1$ следует, что*

$$\Phi_z(x+y, x'+y') = 1.;$$

5) *для любого* $z \in R^2$ *и любого* $x \in K(R^2)$ *существует единственное неотрицательное число* $[fx](z)$ *такое, что*

$$\Phi_z(x,[fx(t)) = 1.; \tag{6.39}$$

6) *величина* $[fx](t)$ *как функция от* x *при любом* $z \in R^2$ *непрерывна в метрике* $L^2(R^2)$;

7) *для любого* $z \in R^2$, *любых* $x, y \in K(R^2)$ *и любого* $\xi \in R^2$ *из равенства* $\Phi_z(x, y) = 1$ *вытекает равенство* $\Phi_{z+\zeta}(\widetilde{x}_\zeta, \widetilde{y}_\zeta) = 1$.

Доказательство этого утверждения может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 5.1 и поэтому мы его опустим.

Обсудим теперь возможные психофизические приложения этой теоремы. Речь будет идти об иррадиации зрения. Явление иррадиации состоит в том, что реакция зрительной системы на изображение при фиксации зрения на определенной точке пространства зависит не только от яркости зрительной картины в данной точке, но и от яркости в других точках пространства. В результате воздействие в данной точке является интегральным в физическом смысле этого слова. Наша цель заключается в том, чтобы показать, что математическое описание преобразования зрительной информации, учитывающее это явление, является также интегральным, но уже в математическом смысле этого слова.

Предположим, что наблюдателю предъявляется зрительная картина, не меняющаяся во времени. В настоящем разделе мы используем разницу в спектральном составе излучений в различных точках этой картины. Пусть $x(u,v)$ – яркость излучения в точке картины с координатами (u,v). Зафиксируем какую-либо точку z зрительной картины с координатами (ξ, η). Предположим, что для любой зрительной картины $x(u,v)$ существует такая не меняющаяся от точки к точке зрительная картина, т.е. картина с постоянной яркостью $[fx](z)$, что обе картины уравниваются наблюдателем, сравнивающим их воздействия в фиксированной точке z. Это, разумеется, не значит, что зрительная система не различает эффектов от воздействия этих картин в других, отличных от z, точках. Величину $[fx](z)$ по аналогии с соответствующей величиной, возникающей при изучении инерции зрения, естественно называть эффективной яркостью зрительной картины в точке z.

Вообще эффект уравнивания зрительной системой двух зрительных картин $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в точке z будем обозначать равенством

$$\Phi_z(x, y) = 1, \tag{6.40}$$

В этих обозначениях условие 5 теоремы 6.2 является записью предположения о существовании эффективной яркости.

Рассмотрим условие 7. Для любой зрительной картины $x(u,v)$ зрительная картина $\widetilde{x}_\zeta(u,v)$, определенная равенством (6.38), является сдвигом на вектор ζ. С другой стороны, предикат $\Phi_{z+\zeta}(x, y)$ отличается от предиката $\Phi_z(x, y)$ тем, что описывает сравнение наблюдателем зрительных изображений не в точке z, а в точке, сдвинутой на тот же вектор ζ. Понятно, что зрительное уравнение картины $x(u,v)$ и $y(u,v)$ в точке z означает зрительное уравнивание картин $\widetilde{x}_\zeta(u,v)$ и $\widetilde{y}_\zeta(u,v)$ в точке $z+\zeta$. Другими словами, условие 7 означает независимость от выбора нулевой точки системы координат.

Наиболее существенным с прикладной точки зрения является условие аддитивности 4. Существуют экспериментальные данные, дающие основание для предположения о его выполнимости. В первую очередь это относится к экспериментам со зрительными картинами, состоящими из последовательности конгруэнтных полос, на каждой из которых уровень яркости принимает поочередно одно из двух фиксированных значений. Если ширина этих полос достаточно мала, то зрительная система воспринимает такую картину, как картину с постоянной яркостью. Согласно пространственному закону Талбота уровень яркости этой постоянной картины равен среднему значению яркости исходной. Проверим, что отсюда вытекает условие аддитивности для зрительных картин такого класса. Пусть $x(u,v)$, $x'(u,v)$, $y(u,v)$, $y'(u,v)$ – четыре зрительные картины из сливающихся чередующихся полос, причем картины $x \subset x'$ и $y \subset y'$ воспринимаются одинаково зрительной системой в точке $z = (\xi, \eta)$, т.е.

$$\Phi_z(x, x') = 1, \;\; \Phi_z(y, y') = 1. \tag{6.41}$$

Пусть $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}'$ – средние значения яркостей зрительных картин x, x', y, y' соответственно. Тогда согласно закону Талбота

$$\begin{gathered} \Phi_z(x, \bar{x}) = 1, \quad \Phi_z(x', \bar{x}') = 1, \\ \Phi_z(y, \bar{y}) = 1, \quad \Phi_z(y', \bar{y}') = 1. \end{gathered} \tag{6.42}$$

Средняя яркость картины $x+y$ равна $\bar{x}+\bar{y}$. Поэтому по закону Талбота

$$\Phi_z(x+y, \bar{x}+\bar{y}) = 1. \tag{6.43}$$

Аналогично

$$\Phi_z(x'+y', \bar{x}'+\bar{y}') = 1. \tag{6.44}$$

Но из (6.41) и (6.42) в силу условий 2 и 5 следует, что

$$\Phi_z(x, x') = 1, \quad \Phi_z(y, y') = 1.$$

Поскольку зрительные картины $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}'$ постоянны, то два последних равенства могут выполняться лишь если

$$\bar{x} = \bar{x}', \quad \bar{y} = \bar{y}'.$$

Но тогда

$$\bar{x} + \bar{y} = \bar{x}' + \bar{y}'. \tag{6.45}$$

Из (6.43), (6.44) и (6.45) вытекает, что

$$\Phi_z(x + y, x' + y')., $$

что и требовалось.

Рассмотрим обобщение пространственного закона Талбота, состоящее в следующем. Пусть $\{x_n\}_1^\infty$ – произвольная последовательность излучений, сходящихся к некоторому (не обязательно постоянному по u, v) излучению x в том смысле, что

$$\lim_{n\to\infty} \iint_\Omega x_n(u,v)dudv = \iint_\Omega x(u,v)dudv,$$

где Ω – любое измеримое ограниченное множество. Тогда при достаточно больших n излучения x_n и x визуально не различимы. Рассуждая так же, как и выше, можно показать, что из этого вытекает аддитивность для достаточно широкого класса зрительных картин.

Выясним теперь вопрос о том, при каких дополнительных условиях на предикат $\Phi_z(x, y)$ можно уточнить теорему 6.2, конкретизируя вид ядра $Q(u,v)$ в виде функции, зависящей только от расстояния точки (u,v) от нуля. В этом случае формула (6.36) приняла бы вид

$$\begin{aligned}\Phi_z(x, y) = D(&\iint T((u-\xi)^2 + (v-\eta)^2)x(u,v)dudv,\\ &\iint T((u-\xi)^2 + (v-\eta)^2)y(u,v)dudv),\end{aligned} \tag{6.46}$$

где D – предикат равенства; $z = (\xi, \eta) \in R^2$; T – почти всюду неотрицательная функция.

Пусть $x(u,v)$ – произвольная функция, θ – произвольное число из полуинтервала $[0, 2\pi)$. Положим

$$\bar{x}_\theta(u,v) = x(u\cdot\cos\theta + v\cdot\sin\theta, -u\cdot\sin\theta + v\cdot\cos\theta), \tag{6.47}$$

т.е. функция $\bar{x}_\theta$ получается из функции x в результате поворота вокруг нуля на угол θ.

Теорема 6.3. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_z(x, y)$ нашлась почти всюду неотрицательная на полуоси $[0, \infty)$ функция T, удовлетворяющая при любых ξ, η условиям*

$$\iint e^{(u-\xi)^2+(v-\eta)^2} T^2(u^2+v^2)dudv < \infty,$$
$$\int_0^\infty T(r)dr = \frac{1}{\pi} \tag{6.48}$$

и такая, что имеет место равенство (6.46), *необходимо и достаточно, чтобы семейство удовлетворяло условиям* 4-7 *теоремы* 6.2 *и условию*:

8) *для любых* $x, y \in K(R^2)$ *и любого* $Q \in [0, 2\pi)$ *из равенства*

$$\Phi_0(x, y) = 1 \tag{6.49}$$

вытекает равенство

$$\Phi_0(\bar{x}_\theta, \bar{y}_\theta) = 1\,. \tag{6.50}$$

Достаточность. Поскольку выполняются условия 4-7, то в силу теоремы 6.2 имеет место равенство (6.37). Пусть x – произвольный неотрицательный элемент из $K(R^2)$. Из условия 5 имеем

$$\Phi_0(x, [fx](0)) = 1.$$

Тогда из условия 8 получаем

$$\Phi_0(\bar{x}, ([\bar{fx}](0))_\theta) = 1. \tag{6.51}$$

Но согласно условию 5 единственной константой C, удовлетворяющей условию $\Phi_0(\bar{x}_\theta, C) = 1$, является $C = [f\,\bar{x}_\theta](0)$. Поэтому из (6.51) имеем

$$([\bar{fx}](0))_\theta = [f\,\bar{x}](0). \tag{6.52}$$

Но постоянная функция $[fx](0)$ не меняется при преобразовании координат (6.47), так что

$$([\bar{fx}](0)_\theta = [fx](0).$$

Сравнивая это равенство с (6.51), получаем

$$[f\,\bar{x}_\theta](0) = [fx](0).$$

Подставляя сюда выражения для $[f\,\bar{x}_\theta](0)$ и $[fx](0)$. в виде (6.37), находим

$$\iint Q(-u,-v)x(u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta + v\cos\theta)dudv =$$
$$= \iint Q(-u,-v)x(u,v)dudv.$$

Сделав в этом интеграле замену переменных, перепишем это равенство в виде

$$\iint Q(-u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta - v\cos\theta)x(u,v)dudv =$$
$$= \iint Q(-u,-v)x(u,v)dudv.$$

Поскольку x – произвольный элемент из $K(R^2)$, и $K(R^2)$ – воспроизводящий конус, отсюда следует, что

$$\begin{aligned}Q(-u\cos\theta + v\sin\theta, -u\sin\theta - v\cos\theta) =\\ = Q(-u,-v)\end{aligned} \tag{6.53}$$

для всех $(u,v) \in R^2$ и всех θ. Зафиксируем произвольное $R \geq 0$. Пусть (u,v) и (u',v') – две произвольные точки, удовлетворяющие условию

$$u^2+v^2=R^2 \text{ и } (u')^2+(v')^2=R^2.$$

Тогда точка (u',v') может быть получена из точки (u,v) поворотом на некоторый угол θ и, следовательно,

$$u'=u\cos\theta-v\sin\theta,\ v'=u\sin\theta+v\cos\theta.$$

Но тогда из (6.53) следует, что

$$Q(u',v')=Q(u,v). \qquad (6.54)$$

Таким образом, равенство $u'^2+v'^2=u^2+v^2$ влечет за собой равенство (6.54). Это и означает, что

$$Q(u,v)=T(u^2+v^2), \qquad (6.55)$$

где T — некоторая функция на $[0,\infty)$. Подставляя $Q(u,v)$ в виде (6.55) в (6.37), приходим к (6.46). Неотрицательность функции T вытекает из неотрицательности функции Q.

Из условий, которым удовлетворяет функция $Q(u,v)$, вытекает неравенство (6.48) и равенство

$$\iint T(u^2+v^2)dudv=1.$$

Сделаем в последнем интеграле полярную замену переменных. Получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}T(\rho^2)\rho d\rho=1.$$

Еще одна замена координат $\rho^2=r$ приводит к равенству

$$\pi\int\limits_0^{\infty}T(r)dr=1.$$

Таким образом, соотношения (6.48) выполняются.

Необходимость. Пусть имеет место равенство (6.46) с неотрицательной на $[0,\infty)$ функцией T, удовлетворяющей условиям (6.48). Поскольку (6.46) является частным случаем формулы (6.37), то в силу теоремы 6.2 выполняются условия 4-7. Пусть x и y — произвольные элементы из K, для которых справедливо (6.49). В силу формулы (6.46) тогда

$$\begin{aligned}&\iint T((u')^2+(v')^2)x(u',v')du'dv'=\\&=\iint T((u')^2+(v')^2)y(u',v')du'dv'.\end{aligned} \qquad (6.56)$$

Сделав замену переменных при произвольно фиксированном θ

$$u'=u\cos\theta+v\sin\theta,\ \ v'=-u\sin\theta+v\cos\theta,$$

преобразуем (6.56) к виду

$$\iint T(u^2+v^2)x(u\cos+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)dudv=$$
$$=\iint T(u^2+v^2)y(u\cos+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta)dudv.,$$

т.е.

$$\iint T(u^2+v^2)\bar{x}_\theta(u,v)dudv=\iint T(u^2+v^2)\bar{y}_\theta(u,v)dudv.$$

Но тогда в силу (6.48)

$$\Phi_0(x_0,y_0)=1.$$

Теорема 6.3 доказана.

6.3. Трехпараметрические семейства (параметр — пространственно-временная координата)

Обозначим при произвольном $t\in(-\infty,\infty)$ через $L_t^2(R^2)$ пространство всех измеримых на $(-\infty,t)\times R^2$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(u^2+v^2)}x^2(\tau,u,v)d\tau dudv<\infty, \qquad (6.57)$$

через $K_t(R^2)$ — положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_{t,z}(x,y)$ $(t\in R^1, z\in R^2$ — параметры), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t(R^2)\times K_t(R^2)$ и удовлетворяет условиям 1-3. Целью настоящего параграфа является нахождение условий, при которых для всех $(t\in R^1, z\in R^2$ и $x,y\in K_t(R^2)$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}&\Phi_{t,z}(x,y)=\\&=D(\int\limits_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-u,\eta-v)x(\tau,u,v)d\tau dudv,\\&\int\limits_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-u,\eta-v)y(\tau,u,v)d\tau dudv),\end{aligned} \qquad (6.58)$$

где D — предикат равенства; $z=(\xi,\eta)\in R^2$, $Q(\tau,u,v)$ — почти всюду неотрицательная функция на $[0,\infty)\times R^2$.

Определим, как и в предыдущих разделах, для любой функции $x\in K_t(R^2)$ и любых $\rho\in R^1$ функцию $\widetilde{x}_{\rho,\zeta}$, являющуюся сдвигом функции x на вектор (ρ,ξ,η):

$$\widetilde{x}_{\rho,\zeta}(\tau,u,v)=x(\tau-\rho,u-\xi,v-\eta). \qquad (6.59)$$

Теорема 6.4. *Для того, чтобы для семейства предикатов $\Phi_{t,z}$ нашлась почти всюду неотрицательная функция, удовлетворяющая при любых $\xi,\eta\in R^1$ условиям*

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{\infty}\iint e^{\tau}e^{(u-\xi)^2+(v-\eta^2)}Q^2(\tau,u,v)d\tau dudv<\infty,\\&\int\limits_0^{\infty}\iint Q(\tau,u,v)d\tau dudv=1\end{aligned} \qquad (6.60)$$

и такая, что имеет место равенство (6.58), *необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям*:

4) *для любых $t\in R^1, z\in R^2$ и $x,x',y,y'\in K_t(R^2)$ из равенств*

$$\Phi_{t,z}(x,x')=1 \text{ и } \Phi_{t,z}(y,y')=1$$

следует, что

$$\Phi_{t,z}(x+y, x'+y')=1;$$

5) *для любых* $t\in R^1, z\in R^2$, $x\in K_t(R^2)$ *существует единственное неотрицательное число* $[fx](t,z)$ *такое, что*

$$\Phi_{t,z}(x,[fx](t,z))=1.;$$

6) *величина* $[fx](t,z)$ *как функция от* x *при любых фиксированных* $t\in R^1, z\in R^2$ *непрерывна в метрике* $L_t^2(R^2)$;

7) *для любых* $t\in R^1, z\in R^2$, $x,y\in K_t(R^2)$, $\rho\in R^1$ $\zeta\in R^2$ *из равенства* $\Phi_{t,z}(x,y)=1$ *вытекает равенство* $\Phi_{t+\rho,z+\zeta}(\bar{x}_\zeta,\bar{y}_\zeta)=1.$

Доказательство этого утверждения можно провести по аналогии с доказательством теоремы 5.1.

Полученный результат может быть применен к описанию инерции и иррадиации зрения в рамках единой математической модели. Пусть наблюдателю предъявляется зрительная картина с различными яркостями в разных точках пространства, причем яркости меняются во времени произвольным образом. Различие в спектральных составах излучения в различных точках и в различные моменты времени здесь игнорируется. Пусть $x(\tau,u,v)$ – яркость излучения в точке зрительной картины с пространственными координатами (u,v) в момент τ. Пусть t – какой-либо фиксированный момент времени – фиксированная точка зрительной картины. Предполагается, что для любой меняющейся во времени зрительной картины $x(\tau,u,v)$, $-\infty<\tau\le t$, $-\infty<u,v<\infty$ существует единственная постоянная во времени и однородная в пространстве картина, уравновешивающаяся наблюдателем с исходной в момент t в точке $z=(\xi,\eta)$. Постоянную яркость этой картины будем обозначать $[fx](t,z)$. Величину $[fx](t,z)$ будем называть *эффективной яркостью*. Очевидно, это понятие обобщает одноименные понятия в случае изменения зрительной картины только во времени или только в пространстве.

Предикат $\Phi_{t,z}(x,y)$ является формальной записью уравнивания зрительных картин $\Phi_{t,z}(x,y)=1$ тогда и только тогда, когда картины $x(\tau,u,v)$ и $н(\tau,u,v)$ вызывают одинаковые реакции зрительной системы в момент времени t в точке z.

Условия 4-7 интерпретируются в общем случае так же, как и в частных случаях, изучавшихся в предыдущих разделах.

Основным с точки зрения экспериментатора, как и ранее, является условие 4 аддитивности. Об экспериментах, подтверждающих выполнимость этого условия в частных случаях, см. два предыдущих раздела. Что касается экспериментальной проверки этого условия в общем случае, то, по-видимому, здесь не существует каких-либо экспериментальных данных.

Установим теперь, при каких условиях на семейство предикатов $\Phi_{t,z}(x,y)$ формула (6.58) может быть переписана в виде

$$\Phi_{t,z}(x,y)=$$

$$=D(\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T(t-\tau,(\xi-u)^2+(\eta-v)^2)x(\tau,u,v)d\tau dudv,$$

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T(t-\tau,(\xi-u)^2+(\eta-v)^2)y(\tau,u,v)d\tau dudv, \qquad (6.61)$$

где D – предикат равенства; $t\in R^1, z=(\xi,\eta)\in R^2$; $T(\tau,R)$ – почти всюду неотрицательная функция.

Положим для произвольной функции $x(\tau,u,v)$ и произвольного $\theta\in[0,2\pi)$

$$\bar{x}(\tau,u,v)=x(\tau,u\cos\theta+v\sin\theta,-u\sin\theta+v\cos\theta).$$

Теорема 6.5. *Для того чтобы для семейства предикатов* $\Phi_{t,z}(x,y)$ *нашлась функция* T, *удовлетворяющая при всех* $\xi,\eta\in R^1$ *условиям*

$$\int_0^{\infty}\iint e^{\tau}e^{(u-\xi)^2+(v-\eta^2)}T^2(\tau,u^2+v^2)d\tau dudv<\infty,$$

$$\int_0^{\infty}\iint T(\tau,r)d\tau dr=\frac{1}{\pi}$$

и такая, что имеет место равенство (6.61), *необходимо и достаточно, чтобы семейство предикатов удовлетворяло условиям* 4-7 *теоремы* 6.4 *и условию*:

8) *для любых* $x,y\in K_0$ *и любого* $\theta\in[0,2\pi)$ *из равенства* $\Phi_{0,0}(x,y)=1$ *вытекает равенство* $\Phi_{0,0}(\bar{x}_\theta,\bar{y}_\theta)=1.$

Теорема 6.5 может быть выведена из теоремы 6.4 аналогично тому, как теорема 6.3 была выведена из теоремы 6.2. Мы опустим этот вывод.

Физический смысл условия 8 состоит в следующем. Если наблюдатель уравнивает две зрительные картины в один и тот же момент времени в той же точке, то факт равенства сохраняется при предъявлении наблюдателю тех же картин, но повернутых на один и тот же угол.

Литература. 1. *Походенко В.А., Тарасова Т.Г., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* Теория цветового зрения. I. Радиоэлектроника и информатика. 1998. №1. С. 106-117.

Поступила в редколлегию 12.05.99

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Левыкин В.М.

Бондаренко Михаил Федорович, д-р техн. наук, профессор, академик АН ВШ, ректор ХТУРЭ. Научные интересы: информатика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 43-30-53.

Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация механизмов интеллекта человека. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 40-94-46.