

$$s = \operatorname{med}_t |r_t(\hat{\Theta})| / 0,6745 \quad (19)$$

на каждом шаге итераций.

**Литература:** 1. *Ljung L.* On consistency and identifiability // *Mathematical Programming Study*, 1976. N 5, P. 169-190. 2. *Caines P.E.* Prediction error identification methods for stationary stochastic process // *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1976. Vol. AC-21. P. 500-506. 3. *Holland P.W., Welsh R. E.* Robust regression using interactively reweighted

least squares // *Commun. Statist.*, 1977. Vol. A6. P. 813-828. 4. *Polyak B.T., Tsytkin Ya.Z.* Robust identification // *Automatica*. 1980. Vol 16. P. 53-63.

Поступила в редколлегию 30.11.2000

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Шабанов-Кушнаренко С.Ю.

**Грицюк Вера Ильинична**, канд. техн. наук, докторант ХТУРЭ. Научные интересы: стохастические системы управления. Хобби: музыка, литература. Адрес: Украина, 61166, пр. Ленина, 14, тел. 40-93-06.

УДК 519.21

## СТАБИЛИЗАЦИЯ И ФОКУСИРОВКА СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ НА ГРАФАХ

*РОДЗИНСКИЙ А.А., РОМАНЕНКО В. А., СИДОРОВ М.В., МИРОШНИЧЕНКО А.В.*

Рассматриваются процессы случайных блужданий на графах с изменяющимся числом состояний; графах, имеющих зоны Саргасса; многослойных графах. Проводится анализ сходимости вероятностей состояний и анализ изменения величины  $\sigma$  для различных типов задания схем случайных блужданий на графе.

При рассмотрении многих процессов в науке и технике в настоящее время часто используют подход, основанный на теории марковских процессов. В ряде случаев решение задачи удается получить, рассматривая соответствующим образом выбранные случайные блуждания.

### 1. Случайные блуждания на графах, представляющих собой дерево

Опишем процесс случайных блужданий на графе, представляющем собой дерево. Будем считать, что ребра графа имеют целочисленные длины, вообще говоря, различные. Будем использовать такую нумерацию, при которой координатой состояния является одно число. В этом случае естественно пронумеровать состояния, начиная от вершины дерева, и делать это так, чтобы координаты состояний не убывали по мере их удаления от него. Случайные блуждания происходят по этим точкам и они рассматриваются как состояния определяемого нами процесса. Схему случайного блуждания выберем следующим образом. Пусть каждая из вершин ветви дерева является точкой сброса для любого из состояний этой ветви, а корень дерева — точкой сброса для любого состояния графа. Тогда из любого состояния графа возможен либо переход в следующее состояние, либо с ненулевой вероятностью переход (сброс) в одну из точек сброса, лежащую на пути от корня дерева к этому состоянию. К рассмотрению подобных схем блужданий часто приводят задачи теории надежности, радиобиологии, а также задачи теории нейронных сетей.

### 2. Случайные блуждания на графах с изменяющимся числом состояний

При рассмотрении ряда прикладных задач мы приходим к таким системам, эволюция которых может быть описана с помощью случайного блуж-

дания на графе с изменяющимся числом состояний. В [1, 2] рассмотрены дискретные и непрерывные марковские процессы с изменяющимся числом состояний.

При изучении процессов с изменяющимся числом состояний прежде всего возникает задача об их согласовании. Она состоит в следующем. Пусть на временных промежутках  $[s_0, s_1 - \delta]$ ,  $[s_1 + \delta, s_2]$ ,  $\delta > 0$  заданы инфинитезимальные матрицы  $\Lambda_1(t)$ ,  $\Lambda_2(t)$ , определяющие процессы  $\Pi_1(t)$ ,  $\Pi_2(t)$  с числом состояний  $n_1$  и  $n_2$ . Пусть, для определенности,  $n_2 - n_1 = 1$ . Тогда следует определить инфинитезимальную матрицу  $\Lambda_{12}(t)$  (матрицу согласования), непрерывную на  $[s_1 - \delta, s_1 + \delta]$  и удовлетворяющую условиям

$$\Lambda_{12}(s_1 - \delta) = \Lambda_1(s_1 - \delta), \Lambda_{12}(s_1 + \delta) = \Lambda_2(s_1 + \delta), \quad (1)$$

так, чтобы возникающий при этом на  $[s_0, s_2]$  процесс  $\Pi(t)$  являлся естественным продолжением процесса  $\Pi_1(t)$ ,  $t \in [s_0, s_1 - \delta]$ , на отрезок  $[s_1 + \delta, s_2]$ , на котором  $\Pi(t) \equiv \Pi_2(t)$ . На  $[s_1 - \delta, s_1 + \delta]$  процесс  $\Pi(t)$  определяется матрицей  $\Lambda_{12}(t)$ . В [1] рассмотрено несколько случаев построения матрицы согласования.

При рассмотрении экономических процессов эту матрицу можно искать, исходя из ограничений, позволяющих минимизировать некоторые суммарные затраты, максимизировать прибыль или обеспечить преимущественное развитие выделенных групп предприятий и пр.

При рассмотрении физических задач эволюция матрицы  $\Lambda_{12}(t)$  обычно определяется процессом поглощения (или выделения) энергии. Мерой таких энергозатрат является некоторый функционал, зависящий от  $\Lambda_{12}$ . Если, например, этот функционал имеет вид  $(\Lambda_{12}f, f)$ , то отыскание  $\Lambda_{12}$  сводится к решению следующей вариационной задачи. Требуется найти инфинитезимальную матрицу  $\Lambda_{12}$  порядка  $(n_1 + 1) \times (n_1 + 1)$ , удовлетворяющую условиям (1) и условию

$$\int_{s_1 - \delta}^{s_1 + \delta} (\Lambda_{12}(s) \vec{p}_0(s_0, s), \vec{p}(s_0, s)) ds = \min$$

Рассмотрим задачу о фокусировке процессов с изменяющимся числом состояний. Пусть  $\Pi(t)$ ,  $t \geq 0$  — процесс с изменяющимся числом состояний, такой, что на каждом из непересекающихся отрезков

$$[s_k, t_k), k = 0, 1, \dots, s_0 = 0, t_k \uparrow t^* (k \rightarrow \infty). \quad (2)$$

число состояний процесса постоянно. Считаем, что процесс  $\Pi_k$ , совпадающий с  $\Pi(t)$  на  $[s_k, t_k)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ), является частью процесса, фокусирующего на распределение  $\{\pi_j^{(k)}\}$ . Пусть  $\Lambda_{k, k+1}(t)$  — матрица согласования процессов  $\Pi_k, \Pi_{k+1}$ . Тогда [3] матрицы  $\Lambda_{k, k+1}(t)$  можно выбрать так, чтобы при изменении  $t$  на  $[t_k, s_{k+1})$  каждая из них фокусировала процесс  $\Pi(t)$  на распределение  $\{\pi_j^{(k+1)}\}$ . Такой процесс  $\Pi(t)$  обладает следующим свойством: каким бы ни было начальное распределение вероятностей  $\{p_j(s_0)\}$ , распределение вероятностей  $\{p_j(s_0, t)\}$  процесса  $\Pi(t)$  на промежутках  $[s_{k+1}, t_{k+1})$  фокусирует (или  $\sigma$ -фокусирует) в точках  $s_k$  на распределения  $\{\pi_j^{(k+1)}\}$ . Если дополнительно предположить, что  $\{\pi_j^{(k+1)}\} \rightarrow \{\pi_j^*\} (k \rightarrow \infty)$ , то  $t^*$  является точкой фокусировки ( $\sigma$ -фокусировки) процесса  $\Pi(t)$  на распределение  $\{\pi_j^*\}$ .

Рассмотрим случайное блуждание на графе с изменяющимся числом состояний. Пусть случайное блуждание частицы на графе, представляющем дерево, описывается неоднородным процессом Маркова. Будем считать, что корень дерева есть точка сброса. Пусть в некоторые, не обязательно определенные заранее, моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$  число состояний процесса изменяется, принимая значения  $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$  (т.е. изменяется число вершин и ребер графа, на котором происходит процесс блужданий). Способ передвижения частицы такой же, как в п.1. В начальный момент времени  $\tau_0$  задается первоначальный вид графа, начальное распределение вероятностей, интенсивности переходов.

На рис. 1 рассмотрен пример трехэтапной эволюции системы. Жирным выделены вершины исходного графа (на момент времени  $\tau_0$ ). Около остальных ребер указаны моменты времени  $\tau_k$  их возникновения.

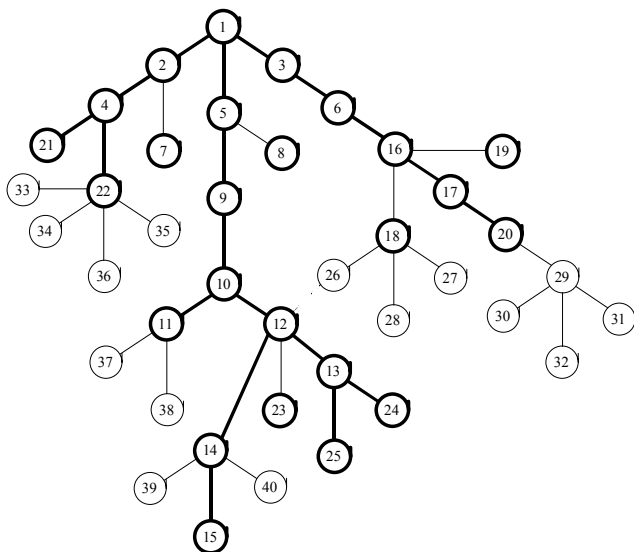


Рис. 1. Граф с изменяющимся числом состояний

На рис. 2 приведены графики сходимости вероятностей состояний 1, 14.

Вычислительный эксперимент показал, что подбирая соответствующим образом возмущения случайного блуждания с изменяющимся числом состояний, мы можем улучшить сходимость вероятностей состояний, т.е. добиться стабилизации процесса, причем за сколь угодно малый промежуток времени.

Отметим, что максимальную скорость сходимости дает схема, когда на вход “разросшемуся” графу  $\Gamma_{k+1}$  поступает дополненное нулями распределение, являющееся некоторым приближением к предельному для графа  $\Gamma_k$  распределению.

Было также замечено, что наименьшую скорость сходимости давали, как правило, вероятности вновь возникших состояний.

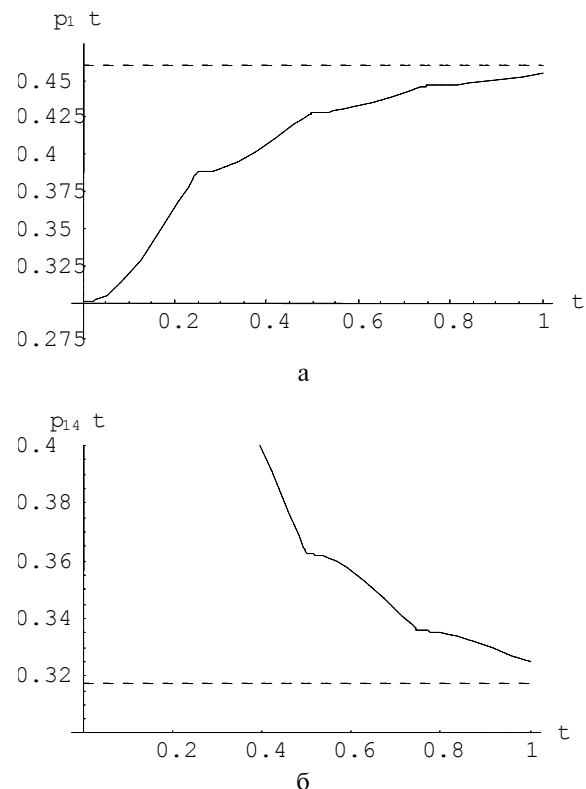


Рис. 2. Графики сходимости вероятностей состояний 1 (а) и 14 (б)

### 3. Случайные блуждания на графах с саргассовой зоной

Рассмотрим процесс случайных блужданий на графах с саргассовой зоной, под которой будем понимать подмножество  $S$  вершин графа, в определенном смысле изолированных от остальных вершин графа. Это означает, что вероятность перехода в эту группу состояний сравнительно мала и вероятность выхода из нее такая же либо на несколько порядков меньше.

Для блужданий на графах с зоной Саргасса инфинитезимальную матрицу  $\Lambda$  можно представить в виде  $\Lambda = C + \varepsilon D$ .

Пусть граф имеет  $r - 1$  саргассовую зону и “основную” часть. Если перенумеровать состояния процесса таким образом, чтобы сначала шли состояния

из основной части, а затем последовательно из каждой саргассовой зоны  $S_1, S_2, \dots, S_{r-1}$ , то матрица  $C$  имеет блочно-диагональную структуру вида [4]:

$$C = \text{diag}(\Lambda_{ii}) = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Lambda_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Lambda_{rr} \end{pmatrix},$$

$D$  — квадратная матрица размерности  $(n \times n)$ ;  $\varepsilon$  — малый вещественный параметр. В случае, когда  $D = 0$ , процесс  $\xi(t)$  распадается на  $r$  не связанных компонент, каждая из которых есть марковский процесс с числом состояний меньших, чем  $n$ . Если же матрица  $D$  отлична от нулевой, то она характеризует связи между саргассовыми зонами графа и основной его частью. Параметр  $\varepsilon$  подчеркивает, что эти связи малы.

Для вычислительного эксперимента был рассмотрен граф, изображенный на рис. 3; саргассова зона здесь обведена пунктирной линией. Она состоит из 5 вершин графа:  $S = \{26, 27, 28, 29, 30\}$ .

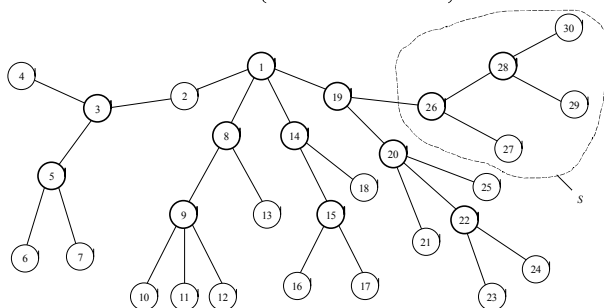


Рис. 3. Граф с саргассовой зоной  $S$

Графики компонент 1, 29 вектора распределения приведены на рис. 4 (состояние 1 — корень дерева, а 29 — состояние саргассовой зоны).

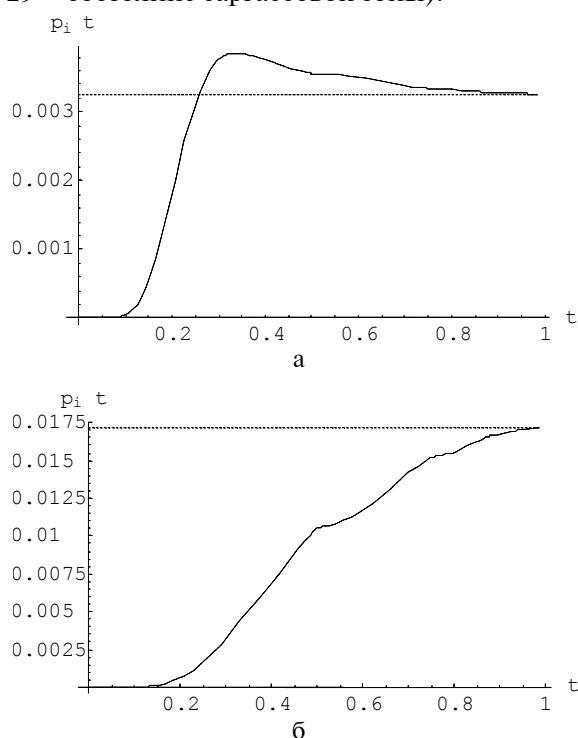


Рис. 4. Графики сходимости вероятностей состояний 1 (а), 29 (б)

Была исследована зависимость сходимости вероятностей состояний от степени изоляции саргассовой зоны (рассмотрены случаи, когда  $\varepsilon_1 = 0,01$ ,  $\varepsilon_2 = 0,001$ ,  $\varepsilon_3 = 0,0001$ ): фиксировались величины  $\sigma$ , а также моменты времени, в которые произошла  $\delta$ -стабилизация, т.е. такие моменты времени  $t'$ , что при любых  $t > t'$  и всех  $j$

$$|p_j(t) - \pi_j| < \delta,$$

где  $\pi_j$  —  $j$ -я предельная компонента левого собственного вектора матрицы  $\Lambda$  при  $t \uparrow t_0$ . В

расчетах полагалось  $\delta = 10^{-3}$ . Величина  $\sigma$  оценивалась с помощью алгоритма, предложенного в [5].

Было получено, что наименьшую скорость сходимости имеют состояния саргассовой зоны и с ростом степени изоляции (с уменьшением  $\varepsilon$ ) происходит размывание  $\sigma$ -окрестности. Также замечено, что процесс сходимости протекает намного быстрее, если в начальный момент времени система находится в одном из состояний саргассовой зоны, а не в корне дерева.

Был изучен процесс взаимодействия двух саргассовых зон. Для этого рассмотрен граф, изображенный на рис.3, имеющий две саргассовы зоны  $S_1$  и  $S_2$ :

$$S_1 = \{20, 21, 22, 23, 24, 25\}; \quad S_2 = \{26, 27, 28, 29, 30\}.$$

Исследован также процесс, когда саргассовы зоны взаимодействуют (односторонняя и двусторонняя связи). Установлено, что возникновение двусторонней связи при одинаковых интенсивностях переходов из  $S_1$  в  $S_2$  и из  $S_2$  в  $S_1$  практически не изменяет характер и скорость сходимости. Наличие же односторонней связи (например, возможен лишь переход из  $S_1$  в  $S_2$ ) вызывает перераспределение вероятностей: повышаются вероятности состояний зоны  $S_2$  и, соответственно, понижаются вероятности состояний, не принадлежащих зоне  $S_2$ , причем вероятности состояний саргассовой зоны  $S_1$  уменьшаются на несколько порядков. Как и в случае одной саргассовой зоны, наименьшую скорость сходимости имели состояния саргассовых зон.

#### 4. Случайные блуждания на многослойных графах

Исследование производственных процессов на предприятиях, изготавливающих изделия, которые содержат большое количество разнородных элементов, показало, что различные его цеха и звенья обладают с точки зрения технологических циклов определенной автономией. Вместе с тем эти подразделения предприятия связаны друг с другом воедино общим для них производством выпускаемой продукции. Эти связи в определенные промежутки времени могут проявляться достаточно жёстко. Работу отдельного цеха (совокупность всех его производственных связей) удобно представлять в виде гра-

фа. Часть этих связей описывает внутрицеховые производственные связи и циклы. Часть же из них описывает связи между отдельными цехами. Объединение этих графов по всем цехам с учетом связей между цехами образует достаточно сложный граф, который мы будем называть многослойным — каждый отдельный слой отвечает определенному цеху. В этом подразделе изучаются вопросы о стабилизации производственных процессов многослойных графов.

Опишем схему случайных блужданий для многослойных графов. Пусть имеется некоторый граф, состоящий из двух подграфов:  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$ , причем  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  представляют собой деревья с  $n_1$  и  $n_2$  вершинами соответственно. Обозначим множество состояний каждого из подграфов  $\Gamma_i$  через  $N_i$ . Пусть  $N = N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$ . Будем считать, что множество  $N$  содержит все точки сброса, а также, возможно, и некоторые другие вершины. Таким образом, точки сброса для обоих подграфов  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  должны быть “общими”. Как и прежде, будем считать, что из любой вершины графа частица может перейти в любое из соседних состояний, остаться на месте либо с ненулевой вероятностью “сброситься” в корень дерева. Процесс случайных блужданий на каждом из подграфов  $\Gamma_i$  будем описывать инфинитезимальной матрицей  $\Lambda_i(t)$ . Будем считать, что в начальный момент времени процесс на обоих графах с вероятностью 1 находится в корне дерева.

Опишем способ достижения фокусировки на многослойном графе  $\Gamma$ . Пусть в начальный момент времени параметры процесса случайного блуждания частицы на данном графе установлены таким образом, что производится фокусировка на подграфе  $\Gamma_1$ , а процесс на подграфе  $\Gamma_2$  пущен на “самотек”. Это достигается сообщением элементам инфинитезимальной матрицы  $\Lambda_1(t)$  (всем или некоторому столбцу) неинтегрируемых или почти неинтегрируемых разрывов. Пусть  $\tau_k$  — момент наступления  $\sigma$ -фокусировки на подграфе  $\Gamma_1$ . Тогда с момента  $\tau_k$  начинается стабилизация процесса на подграфе  $\Gamma_2$ , т.е. сообщаются элементам инфинитезимальной матрицы  $\Lambda_2(t)$  (всем или некоторому столбцу) неинтегрируемых или почти неинтегрируемых возмущений. В это же время процесс блужданий на графе  $\Gamma_1$  пущен на самотек. Если за время стабилизации подграфа  $\Gamma_2$  процесс на подграфе  $\Gamma_1$  расстабилизировался, то процесс на  $\Gamma_2$  передается под управление нулевой матрицы, пока не будет восстановлена  $\sigma$ -фокусировка на  $\Gamma_1$ .

Как только будет выполнено условие  $\sigma$ -фокусировка для  $\Gamma_1$ , процесс стабилизации на  $\Gamma_2$  продолжится. В качестве момента времени, которому отвечает окончание проведения процесса блужданий, примем момент  $\tau_0$ , в который будет наблюдаться  $\sigma$ -фокусировка на всем многослойном графе  $\Gamma$ , т.е. для каждого из подграфов должно выполняться следующее условие:

$$\pi_j - \sigma \leq p_j^{[k]}(\tau_0) \leq \pi_j + \sigma, k = 1, 2.$$

Для вычислительного эксперимента был выбран граф, изображенный на рис. 5. Жирным шрифтом выделены точки сброса; со штрихом обозначены те состояния, которые являются общими для  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ .

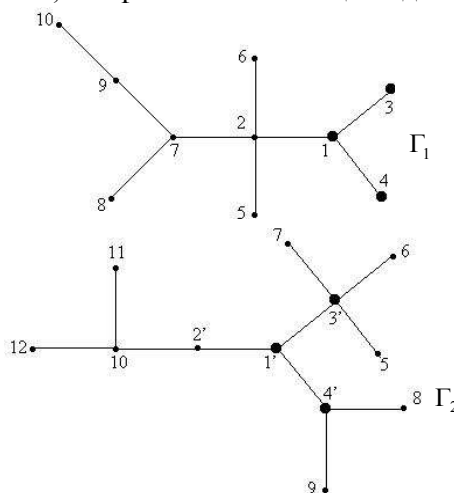


Рис. 5. Двухслойный граф  $\Gamma = \{\Gamma_1, \Gamma_2\}$

На рис. 6,7 представлены основные тенденции процесса сходимости.

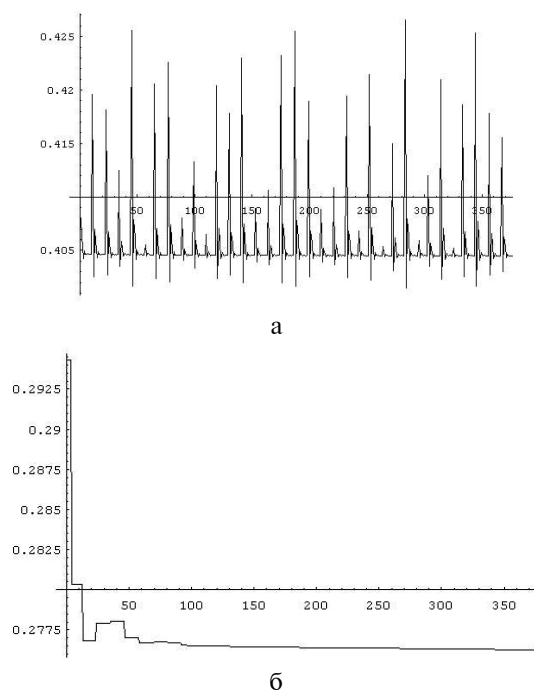


Рис. 6. Анализ компоненты  $p_1^{[1]}$  при  $t \in [0, \tau_0)$  (а) и компоненты  $p_1^{[2]}$  при  $t \in [0, \tau_0)$  (б)

Здесь приведены графики изменения значений некоторых компонент векторов распределений вероятностей в течение всего процесса стабилизации. В качестве исследуемых вершин взяты состояния из множества  $N$ : точка сброса и вершина без особенностей (не точка сброса).

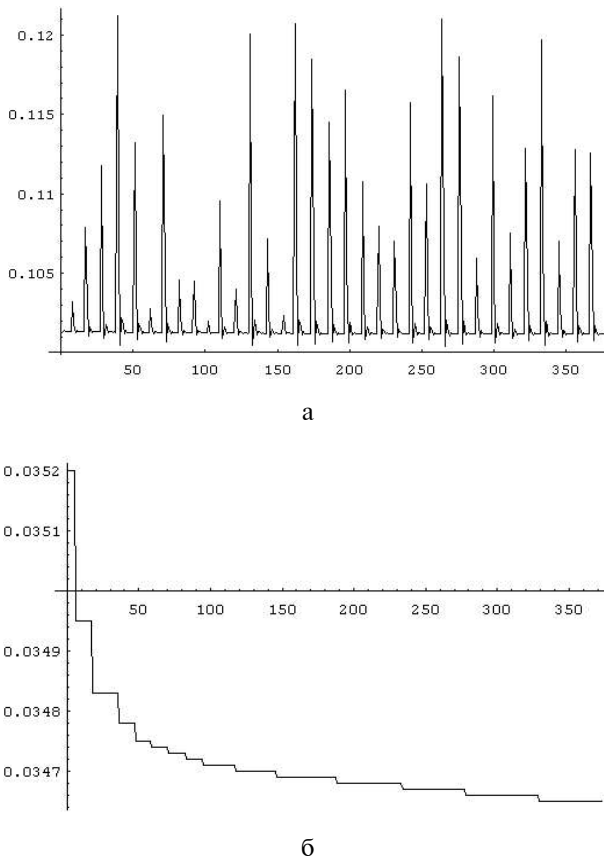


Рис. 7. Анализ компоненты  $p_2^{[1]}$  при  $t \in [0, \tau_0)$  (а) и компоненты  $p_2^{[2]}$  при  $t \in [0, \tau_0)$  (б)

## 5. Условия фокусировки случайных блужданий на графах

Сформулируем условия фокусировки для этого случая. Исследуемый процесс будем описывать его инфинитезимальной матрицей  $\Lambda(t)$ . Рассмотренные варианты случайных блужданий содержат некоторые ограничения (за один шаг процесс переходит из исходного состояния в ближайшее к нему, все вершины ветвей дерева являются точками сброса). При исследовании процессов фокусировки и стабилизации от этих ограничений можно отказаться. Ниже состояния будем нумеровать одним индексом.

Пусть существует такая последовательность попарно непересекающихся интервалов

$$\{[s_k, t_k)\}_{k=1}^{\infty}, \quad s_k < t_k < s_{k+1}, \quad s_k \uparrow t_0, \quad t_0 \leq \infty$$

и такая последовательность индексов  $j_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $j_k$  нумерует состояния), для которых

$$\sum_{k=1}^{\infty} \inf_i \left| \int_{s_k}^{t_k} \lambda_{ij_k}(s) ds \right| = \infty, \quad (3)$$

причем на множестве  $[s_0, t_0) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} [s_k, t_k)$  норма матрицы  $\Lambda(s)$  ограничена одной и той же константой.

Пусть, далее,  $\Lambda(t)$  непрерывна на  $[s_k, t_k)$  и существует предел

$$\lim_{t \uparrow t_0} \vec{p}(\tau_k) = \vec{p}, \quad (4)$$

где  $\tau_k \in [s_k, t_k)$ ,  $\vec{p}(\tau_k)$  — нулевой собственный вектор матрицы  $\Lambda^*(\tau_k)$ . Тогда для любого  $j$  и любого начального распределения вероятностей, заданного в точке  $s \in [s_0, t_0)$ ,  $\lim_{t \uparrow t_0} p_j(s_0, t_0) = p_j$ .

Здесь  $p_j$  —  $j$ -я компонента вектора  $\vec{p}$  из (4).

Если ряд (3) сходится, но его сумма достаточно велика, то  $t_0$  является точкой  $\sigma$ -фокусировки.

Рассмотренные в статье схемы случайных блужданий могут быть использованы при изучении процессов экономики, экологии, фармакокинетики, а также при моделировании нейронных сетей.

**Литература:** 1. Родзинский А. А. Марковские процессы с изменяющимся числом состояний // Радиотехника и информатика, 1998. №1. С. 73-75. 2. Родзинский А. А. Стабилизация распределений процессов, возникающих при случайных блужданиях // Радиотехника и информатика, 1999. №1. С. 43-45. 3. Дикарев В. А. Фокусировка распределений марковских процессов // Доп. НАН України. 1999. № 11. С. 100-103. 4. Герасин С. Н. Проблемы стабилизации распределений неоднородных марковских систем. Харьков: ХТУРЭ, 1999. 212с. 5. Залеская Е. В., Кириченко Л. О., Сидоров М. В. Оценка величины  $\sigma$ -фокусировки неоднородного марковского процесса с помощью алгоритма  $\varepsilon$ -сети // Вестник ХПУ. Сер. НРСТ. 2000. Вып. 80. С. 33-35.

Поступила в редколлегию 07.09.2000

**Рецензент:** д-р физ.-мат. наук, проф. Руткас А. Г.

**Родзинский Анатолий Анатольевич**, аспирант кафедры Прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: иностранные языки, компьютеры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.

**Романенко Вадим Анатольевич**, студент группы ПМ 97-1 факультета ПММ ХТУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей и ее приложения. Увлечения и хобби: программирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.

**Сидоров Максим Викторович**, студент группы ПМ 95-1 факультета ПММ ХТУРЭ. Научные интересы: динамический хаос, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.

**Мирошниченко Анна Викторовна**, аспирант кафедры прикладной математики ХТУРЭ. Научные интересы: стабилизация марковских процессов и их приложения. Увлечения и хобби: иностранные языки и культурология. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.