УДК 519.7

# ТЕОРИЯ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ. III[1]

*БОНДАРЕНКО М.Ф., ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО С.Ю.*

Рассматривается теория цветового зрения человека. Изучается линейная предикатная модель цветового зрения для случаев открытого и произвольного выпуклых множеств, всего пространства; интегральное представление модели.

### 3.1. Координатная формулировка для случая открытого выпуклого множества

**Теорема 3.1.** Для того чтобы предикат $\Phi$, определенный на квадрате открытого выпуклого множества $V \subset L^2[0,1]$, был $n$-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

4) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то $\Phi\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right) = 1$;

5) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$, что для каждого $x \in V$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ и единственное подмножество $I(x) \in \{i = 1, 2, ..., n\}$ такие, что

$$\Phi(\alpha_0 x + \sum_{i\in I} \alpha_i e_i, \sum_{i\notin I} \alpha_i e_i) = 1; \qquad (3.1)$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i > 0; i \in I, \alpha_0 + \sum_{i\in I} \alpha_i = 1; \sum_{i\notin I} \alpha_i = 1; \qquad (3.2)$$

6) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны.

**Доказательство**. Проверим вначале достаточность. Зафиксируем произвольные положительные числа $\{\alpha_i^0\}_{i=1}^{n+1}$, сумма которых равна 1, и положим

$$a = \alpha_1^0 e_1 + ... + \alpha_{n+1}^0 e_{n+1}. \qquad (3.3)$$

Тогда $a$ принадлежит $V$. Из рефлексивности предиката $\Phi$ и условия 5 следует, что $\alpha_i(x) = \alpha_i^0$ $(i = 1, 2, ..., n+1)$, $\alpha_0(x) = 1$, $I(a) = \varnothing$. Тогда существует такая окрестность $u \subset V$ точки $a$, что

$$\alpha_i(x) > 0, \quad I(x) = \varnothing \quad (i = 1, 2, ..., n+1; x \in u). \qquad (3.4)$$

Неравенства для $\alpha_i$ вытекают из непрерывности этих функций. Предположим, что вопреки доказательству существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к точке $a$, для которой $I(x_n) \neq \varnothing$. Поскольку функция $x \to I(x)$ принимает лишь конечное число значений, из этой последовательности можно отобрать такую подпоследовательность, для которой $I(x_n) = I$, где $I$ – какое-нибудь непустое подмножество множества $\{1, 2, ..., n+1\}$. На этой последовательности по условию 5 будет

$$\alpha_0(x_n) + \sum_{i\in I} \alpha_i(x_n) = 1.$$

В пределе по подпоследовательности, используя условие 6 и равенство $\alpha_0(a) = 1$, получаем

$$1 + \sum_{i\in I} \alpha_i^0 = 1, \quad I \neq \varnothing.$$

Но это противоречит положительности чисел $\alpha_i^0, ..., \alpha_{n+1}^0$. Заметим теперь, что для всех $x, y \in V$ из равенства $\Phi(x, y) = 1$ вытекают равенства

$$\alpha_i(x) = \alpha_i(y), \ i = 0, 1, 2, ..., n+1; \ I(x) = I(y). \qquad (3.5)$$

Действительно, из равенств $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(e_i, e_i) = 1$ на основании условия 4 получаем

$$\Phi(\alpha_0(x)x + \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x)e_i, \alpha_0(x)y + \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x)e_i) = 1.$$

Сравнивая это равенство с (3.1), находим

$$\Phi(\alpha_0(x)y + \sum_{i\in I(x)} \alpha_i(x)e_i, \sum_{i\notin I(x)} \alpha_i(x)e_i) = 1.$$

В силу единственности чисел $\alpha_i(y)$ и множества $I(y)$ отсюда вытекает (3.5).

Покажем теперь, что выполняется условие 5 теоремы 2.1 [2]. В качестве $U$ возьмем любое открытое множество, для которого справедливо (3.4). Пусть последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ сходятся к точкам $x, y \in U$ соответственно и $\Phi(x_n, y_n) = 1$. В силу равенства (3.5) тогда $\alpha_i(x_n) = \alpha_i(y_n), i = 0, 1, ..., n+1$. По непрерывности отсюда заключаем, что $\alpha_i(x) = \alpha_i(y), i = 0, 1, ..., n+1$. Кроме того, в силу (3.4) $I(x) = I(y) = \varnothing$. Таким образом,

$$\Phi(x, \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i e_i) = 1, \ \Phi(y, \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i e_i) = 1 \ (\beta_i = \alpha_i(x) = \alpha_i(y)).$$

Тогда по условиям 2, 3 [1] и $\Phi(x, y) = 1$.

В силу теоремы 2.1 имеет место равенство (3.3) с некоторым ортопроектором *P*. Тогда

$$Px = \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) P e_i, \ \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(x) = 1 \ (x \in V), \qquad (3.6)$$

где $\beta_i(x) = -\alpha_i(x)/\alpha_0(x)$ при $i \in I(x)$ и $\beta_i(x) = -\alpha_i(x)/\alpha_0(x)$ при $i \notin I(x)$. Первое равенство (3.6) вытекает из (3.1), второе – из (3.2). Поскольку $V$ – телесное множество, из (3.6) следует, что $\mathrm{Im}P$ совпадает с аффинной оболочкой множества точек $Pe_1, ..., Pe_{n+1}$. Проверим, что $\mathrm{rg}P = n$. Для этого достаточно убедиться в аффинной независимости системы точек

[1] Ч. I см. в журнале «Радиоэлектроника и информатика»,1998. №1. С. 106-117.

Ч. II см. в настоящем выпуске.

$Pe_1,..., Pe_{n+1}$ [1]. Предположим, что эта система аффинно зависима, т.е. существуют такие числа $\gamma_i$, что

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i Pe_i = 0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i = 0,\ (\gamma_1,...,\gamma_{n+1}) \neq (0,...,0). \quad (3.7)$$

Пусть $a$ – точка, определенная равенством (3.3). Подберем число $\lambda \neq 0$ так, чтобы $\alpha_i^0 + \lambda\gamma_i > 0$ $(i = 1, 2,..., n+1)$. Используя (1.3), имеем

$$Pa = P\left(\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^0 + \lambda\gamma_i)e_i\right), \Phi\left(a\sum_{i=1}^{n+1}(\alpha_i^0 + \lambda\gamma_i)e_i\right) = 1.$$

Значит, $\alpha_i(a) = \alpha_i^0 + \lambda\gamma_i$ $(i = 1, 2,..., n+1)$, что противоречит установленным ранее равенствам $\alpha_i(a) = \alpha_i^0$. Достаточность доказана.

Необходимость вытекает из леммы 2.1 [2].

Теорема 3.1 доказана.

### 3.2. Координатная формулировка для случая произвольного выпуклого множества

Нам не известно, остается ли верной теорема 3.1 в случае, когда множество $V$ не является открытым, но $\mathrm{aff}V = L^2[0,1]$. Верен, однако, вариант этого результата, отличающийся усилением условия 4 и одним дополнительным условием.

**Теорема 3.2.** Для того чтобы предикат $\Phi$, определенный на квадрате выпуклого множества $V$ с $\mathrm{aff}V = L^2[0,1]$, был $n$-мерным линейным, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворял следующим условиям:

4) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, $\gamma \in (0,1)$, то $\Phi((1-\gamma)x + \gamma x', (1-\gamma)y + \gamma y') = 1$;

5) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$, что для каждого $x \in V$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=0}^{n+1}$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{1, 2,..., n+1\}$ такие, что

$$\Phi(\alpha_0 x + \sum_{i\in I}\alpha_i e_i, \sum_{i\notin I}\alpha_i e_i) = 1; \quad (3.8)$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i > 0; i \in I;\ \alpha_0 + \sum_{i\in I}\alpha_i = 1, \sum_{i\notin I}\alpha_i = 1; \quad (3.9)$$

6) если $x, y \in V$, $\gamma \in (0,1)$ и при некотором $i$ $\Phi(\gamma x + (1-\gamma)e_i, \gamma y + (1-\gamma)e_i) = 1$, то $\Phi(x, y) = 1$;

7) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны.

**Лемма 3.1.** Пусть $V$ – выпуклое множество, аффинная оболочка которого совпадает со всем пространством; функция $f$, определенная на $V$, удовлетворяет условию

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)),\ x, y \in V \quad (3.10)$$

и функция $|f(x)|$ непрерывна в какой-либо точке $x_0 \in V$. Тогда существует единственный функционал $F$ на $L^2[0,1]$ и единственное число $C$ такие, что

$$f(x) = F(x) + C,\ x \in V. \quad (3.11)$$

**Доказательство.** Из равенства (3.54) вытекает, что при любом двоично-рациональном числе $\gamma \in [0,1]$ имеет место равенство

$$f((1-\gamma)x + \gamma y) = (1-\gamma)f(x) + \gamma f(x)\ \ x, y \in V. \quad (3.12)$$

Поскольку $\mathrm{aff}V = L^2[0,1]$, то, как это следует из формулы (2.22), каждая точка $\xi \in L^2[0,1]$ может быть представлена в виде

$$\xi = \beta(x - y);\ \beta > 0;\ x, y \in V. \quad (3.13)$$

Более того, число $\beta$ можно считать двоично-рациональным. Действительно, исходя из (3.13), возьмем любое рациональное число $\beta > \beta$ ’. Точка $y' = (1 - \frac{\beta}{\beta'})x + \frac{\beta}{\beta'}y \in V$ и имеет место равенство $\xi = \beta'(x - y')$.

Положим для $\xi$, представленного в виде (3.13),

$$F(\xi) = \beta(f(x) - f(y)). \quad (3.14)$$

Проверим корректность этого определения. Пусть одновременно с (3.14) имеет место равенство $\xi = \beta_1(x_1 - y_1)$, $\beta_1 > 0$ – двоично-рациональное, $x_1, y_1 \in V$. Тогда $\beta_1(x_1 - y_1) = \beta(x - y)$ и, следовательно,

$$\frac{\beta}{\beta+\beta_1}x + \frac{\beta_1}{\beta+\beta_1}y_1 = \frac{\beta}{\beta+\beta_1}y + \frac{\beta}{\beta+\beta_1}x.$$

Точки, фигурирующие в каждой части этого равенства, являются выпуклыми комбинациями точек из $V$ и поэтому сами принадлежат $V$. Применяя к обеим частям равенства функцию $f$, получаем с учетом (3.12)

$$\frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(x) + \frac{\beta_1}{\beta+\beta_1}f(y_1) = \frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(y) + \frac{\beta}{\beta+\beta_1}f(x).$$

Отсюда $\beta_1(f(x_1) - f(y_1)) = \beta(f(x) - f(y))$. Таким образом, определение (3.14) корректно.

Функция $F$ является аддитивной. Действительно, пусть $\xi_1, \xi_2$ – произвольные точки пространства $L^2[0,1]$. Представим их в виде (3.13):

$$\xi_1 = \beta_1(x_1 - y_1); \xi_2 = \beta_2(x_2 - y_2).$$

Тогда

$$\xi_1 + \xi_2 = (\beta_1 + \beta_2)((\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_1 + \frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_2) - $$
$$- (\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}y_1 + \frac{\beta_2}{\beta_2+\beta_2}y_2))$$

и (3.14) и (3.12) дают

$$F(\xi_1+\xi_2)=(\beta_1+\beta_2)(f(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_1+\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}x_2)-$$

$$-f(\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}y_1+\frac{\beta_2}{\beta_2+\beta_2}y_2))=$$

$$=\beta_1 f(x_1)+\beta_2 f(x_2)-\beta_1 f(y_1)-\beta_2 f(y_2)=$$
$$=\beta_1(f(x_1)-f(y_1))-\beta_2(f(x_2)-f(y_2)).$$

Таким образом, $F(\xi_1+\xi_2)=F(\xi_1)+F(\xi_2)$.

Покажем, что функция $F$ непрерывна в нуле. Пусть последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Воспользуемся леммой 2.5 [2]:

$$\begin{gathered}\xi_k=\beta_k(u_k-v_k);u_k,v_k\in V;\beta_k>0;\\ \|u_k-x_0\|\le 1;\|v_k-x_0\|\le 1;\beta_k\le C\|\xi_k\|.\end{gathered}\tag{3.15}$$

Рассуждая так же, как и в начале доказательства этой леммы, покажем, что в представлении (3.15) в качестве $\beta_k$ можно брать числа, являющиеся квадратами двоично-рациональных чисел. Итак, считаем $\sqrt{\beta_k}$ двоично-рациональными числами. Положим

$$x_k=x_0+\sqrt{\beta_k}(u_k-x_0),\quad y_k=x_0+\sqrt{\beta_k}(v_k-x_0).$$

Из последнего неравенства (3.59) следует, что при достаточно больших $k$ будет $\sqrt{\beta_k}\le 1$. Поэтому $x_k,y_k\in V$. Имеем из (3.15)

$$\begin{gathered}\xi_k=\sqrt{\beta_k}(x_k-y_k),\ \|x_k-x_0\|\le\sqrt{C\|\xi_k\|},\\ \|y_k-x_0\|\le\sqrt{C\|\xi_k\|}.\end{gathered}\tag{3.16}$$

Тогда

$$\begin{gathered}F(\xi_k)=\sqrt{\beta_k}(f(x_k)-f(y_k))\ \text{и}\\ |F(\xi_k)|\le\sqrt{\beta_k}(|f(x_k)|-|f(y_k)|).\end{gathered}\tag{3.17}$$

Из неравенств (3.16) следует, что последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к точке $x_0$. Тогда по условию леммы последовательности $\{|f(x_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{|f(y_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся к точке $|f(x_0)|$ и, следовательно, ограничены. Поэтому из неравенства (3.17) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}|F(\xi_k)|=0.$$

Поскольку $F$ – аддитивный функционал, то отсюда вытекает, что $F(0)=0$ и, следовательно, функционал непрерывен в нуле. В таком случае $F$ – линейный функционал.

Для любой точки $x\in V$ в силу (3.14) будет $F(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$. Функционал $F$ линеен, так что $F(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$. Поэтому при $C=f(x_0)-F(x_0)$ имеем

$$f(x)=F(x-x_0)+f(x_0)=F(x)+(f(x_0)-F(x_0))=F(x)+C.$$

Равенство (3.11) доказано.

Проверим единственность функционала $F$ и числа $C$. Пусть

$$f(x)=F_1(x)+C_1,\ x\in V,\tag{3.18}$$

где $F_1$ – линейный функционал; $C_1$ – число. Поскольку $F_1$ – линейный функционал, для числа $\xi$, представленного в виде (3.13), будет $F_1(\xi)=\beta(F_1(x)-F_1(y))$. Тогда (3.18) дает

$$F_1(\xi)=\beta(f(x)-f(y)).$$

Сравнивая это равенство с (3.14), получаем $F_1=F$. Тогда из (3.11) и (3.18) следует, что $C_1=C$.

Лемма 3.1 доказана.

**Замечание.** Утверждение о продолжаемости функции $f$ остается в силе, если взамен равенства $\mathrm{aff}V=L^2[0,1]$ потребовать лишь замкнутость множества $\mathrm{aff}V$. Утверждение о единственности продолжения при этом перестает быть верным.

**Доказательство** теоремы 3.2. Проверим достаточность. Покажем, что точки $e_1,e_2,...,e_{n+1}$ аффинно-независимы. Пусть

$$\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i=0,\ \sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=0.\tag{3.19}$$

Положим

$$\beta_1=\gamma_1+1;\ \beta_i=\gamma_i;\ i=2,3,...,n+1.\tag{3.20}$$

Тогда

$$e_1=\sum_{i=1}^{n+1}\beta_i e_i,\ \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i=1,\tag{3.21}$$

Т.е. точка $e_1$ представима в виде (2.24). Перейдем от этого представления к представлению (2.27) по формуле (2.26):

$$\alpha_0 e_1+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i=\sum_{i\notin I}\alpha_i e_i.\tag{3.22}$$

Тогда

$$\Phi\left(\alpha_0 e_1+\sum_{i\in I}\alpha_i e_i,\sum_{i\notin I}\alpha_i e_i\right)=1.$$

Кроме того, согласно условию 1 [1], $\Phi(e_1,e_1)=1$. Поэтому из условия 5 следует, что $I=\varnothing$, $\alpha_0=1,\alpha_1=1,\alpha_i=0$ при $i=2,3,...,n+1$. Переходя от (3.22) назад к (3.21) по формулам (2.14), получаем $\beta_1=1,\beta_i=0$ при $i=2,3,...,n+1$. Тогда из (3.20) видно, что $\gamma_1=\gamma_2=...=\gamma_{n+1}=0$. Аффинная независимость точек $e_1,e_2,...,e_{n+1}$ доказана.

Заметим теперь, что условие 6 обобщается в следующей форме, именуемой в дальнейшем условием 6′: если

$$x,y\in V,\ \Phi\left(\gamma_0 x+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i,\gamma_0 y_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i e_i\right)=1,$$

$$\gamma_0>0,\ \gamma_i\ge 0,\gamma_0+\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i=1,\tag{3.23}$$

то $\Phi(x, y)=1$. Действительно, заменим в (3.23) $n$ на $k$ и проверим по индукции справедливость утверждения при $k=0, 1, \ldots, n+1$. Если $k=0$, утверждение вытекает из 6. Пусть утверждение выполняется при некотором $k$. Перейдем к $k+1$. Положим

$$x' = (1-\gamma_{k+2})^{-1}\left(\gamma_0 x + \sum_{i=1}^{k+1}\gamma_i e_i\right),$$

$$y' = (1-\gamma_{k+1})^{-1}\left(\gamma_0 y + \sum_{i=1}^{k+2}\gamma_i e_i\right).$$

Посылка утверждения имеет вид

$$\Phi((1-\gamma_{k+2})x' + \gamma_{k+2}e_{k+2}, (1-\gamma_{k+2})y' + \gamma_{k+2}e_{k+2}) = 1.$$

Тогда из 6 следует, что $\Phi(x', y')=1$, т.е.

$$\Phi\left(\gamma'_0 x + \sum_{i=1}^{k+1}\gamma'_i e_i, \gamma'_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n+1}\gamma'_i e_i\right) = 1,\ \gamma'_0 + \sum_{i=1}^{n+1}\gamma'_i = 1,$$

где $\gamma'_i = (1-\gamma_{k+2})^{-1}\gamma_i$. Предположение индукции позволяет заключить, что $\Phi(x, y)=1$. Выполнимость условия 6′ доказана.

Поставим в соответствие каждому $x\in V$ точки $x_1, x_2$ и $Ax$, определенные равенствами

$$x_1 = \sum_{i\in I(x)}\alpha_k(x)e_i,$$
$$x_2 = \sum_{i\notin I(x)}\alpha_k(x)e_i, \alpha_0(x)Ax + x_1 = x_2. \quad (3.24)$$

Пусть числа $\beta_i(x)$ связаны с числами $\alpha_i(x)$ равенствами (2.24). Тогда

$$Ax = \sum_{i=1}^{n+1}\beta_i(x)e_i. \quad (3.25)$$

Покажем, что

$$\Phi(x, y) = D(Ax, Ay). \quad (3.26)$$

Действительно, пусть $\Phi(x, y)=1$. Тогда из условия 4 следует, что

$$\Phi(\alpha_0(x)x + x_1, \alpha_0(x)y + x_1) = 1. \quad (3.27)$$

Но (3.8) означает, что

$$\Phi(\alpha_0(x)x + x_1, x_2) = 1. \quad (3.28)$$

Сравнивая (3.27) с (3.28) и используя условия 1 и 2 [1], получаем

$$\Phi(\alpha_0(x)y + x_1, x_2) = 1. \quad (3.29)$$

Согласно условию 5, последнее равенство может выполняться лишь при $\alpha_0(x)=\alpha_0(y), x_1=y_1, x_2=y_2$. Значит, и $Ax=Ay$. Пусть, обратно, $Ax=Ay$. Поскольку система точек $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ аффинно-независима, представление (2.20) для любой точки из aff $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ является единственным. Поэтому из третьего равенства (3.24) следует, что $\alpha_0(x)=\alpha_0(y), x_1=y_1, x_2=y_2$. Значит, из равенства $\Phi(\alpha_0(y)y+y_1, y_2)=1$ вытекает (3.29). Вместе с (3.28) это дает (3.27). Применив к (3.27) условие 6′, получаем $\Phi(x, y)=1$. Равенство (3.26) доказано.

Покажем теперь, что отображение $A$ является аффинным. Пусть $x, x'$ – произвольные точки множества $V$, $\lambda, \lambda'$ – положительные числа, $\lambda+\lambda'=1$. Нужно проверить, что

$$A(\lambda x + \lambda' x') = \lambda Ax + \lambda' Ax'. \quad (3.30)$$

Согласно условию 5 имеют место равенства

$$\Phi(\alpha_0 x + x_1, x_2) = 1, \Phi(\alpha'_0 x' + x'_1, x'_2) = 1,$$
$$\alpha = \alpha_0(x), \alpha' = \alpha_0(x'). \quad (3.31)$$

Положим

$$\gamma = \frac{\lambda\alpha'_0}{\lambda\alpha'_0 + \lambda'\alpha_0},\ \gamma' = \frac{\lambda'\alpha_0}{\lambda\alpha'_0 + \lambda'\alpha_0}.$$

Числа $\gamma$ и $\gamma'$ положительны, $\gamma+\gamma'=1$. Как видно из (3.24) и (3.9), при некоторых неотрицательных числах $\delta_i, \delta'_i$ $(i=1,\ldots,n+1)$ будет

$$\gamma x_1 + \gamma' x'_1 = \sum_{i=1}^{n+1}\delta_i e_i,\quad \gamma x_2 + \gamma' x'_2 = \sum_{i=1}^{n+1}\delta'_i e_i,$$
$$\alpha_0\gamma + \alpha'_0\gamma' + \sum_{i=1}^{n+1}\delta_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{n+1}\delta'_i = 1. \quad (3.32)$$

Положим

$$N = \{i \mid \delta_i > \delta'_i\}, \nu = \sum_{i\in N}(\delta_i - \delta'_i), \mu = \sum_{i\notin N}(\delta'_i - \delta_i).$$

Из (3.32) вытекает равенство

$$\alpha_0\gamma + \alpha'_0\gamma' + \nu = \mu.$$

Пусть

$$u = \sum_{i\in N}(\delta_i - \delta'_i)e_i, v = \sum_{i\notin N}(\delta'_i - \delta_i)e_i, z = \sum_{i\in N}\delta'_i e_i + \sum_{i\notin N}\delta_i e_i.$$

Тогда

$$\gamma_1 x_1 + \gamma'_1 x'_1 = u + z, \gamma_2 x_2 + \gamma'_2 x'_2 = v + z,$$
$$v - u = \gamma_1(x_2 - x_1) + \gamma'_1(x'_2 - x'_1). \quad (3.33)$$

(3.33) и третье равенство (3.22) дают

$$v - u = \gamma\alpha_0 Ax + \gamma'\alpha'_0 Ax'. \quad (3.34)$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\lambda = \frac{\gamma\alpha_0}{\gamma\alpha_0 + \gamma'\alpha'_0} = \frac{\gamma\alpha_0}{\mu - \nu},\ \lambda' = \frac{\gamma'\alpha'_0}{\gamma\alpha_0 + \gamma'\alpha'_0} = \frac{\gamma'\alpha'_0}{\mu - \nu}.$$

Поэтому из (3.34) следует, что

$$\frac{v-u}{\mu - \nu} = \lambda Ax + \lambda' Ax',$$
$$\frac{\alpha_0\gamma x + \alpha'_0\gamma' x'}{\mu - \nu} = \lambda x + \lambda' x'. \quad (3.35)$$

В силу условия 4 из (3.31) вытекает равенство

$$\Phi(\alpha_0\gamma x + \alpha'_0\gamma' x' + \gamma x_1 + \gamma' x'_1, \gamma x_2 + \gamma' x'_2) = 1.$$

Комбинируя его с (3.33) и (3.35), получаем

$$\Phi(\mu\frac{(\mu-\nu)(\lambda x + \lambda' x') + u}{\mu} + z, \mu\frac{v}{\mu} + z) = 1. \quad (3.36)$$

Положим $\gamma_0 = \mu$; $\gamma_i = \min\{\delta_i, \delta'_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Тогда

$$z = \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i e_e, \ \gamma_0 + \sum_{i=1}^{n+1} \gamma_i = 1.$$

Кроме того, $\mu^{-1}((\mu - v)(\lambda x + \lambda' x') + u) \in V$. Действительно, если $v = 0$, то $u = 0$ и утверждение очевидно. Если же $v > 0$, то и этот факт вытекает из представления в виде выпуклой комбинации

$$\mu^{-1}((\mu - \nu)(\lambda x + \lambda' x') + u) = \frac{\mu - v}{\mu}(\lambda x + \lambda' x') + \frac{v}{\mu} \cdot \frac{u}{v}.$$

Наконец, $\mu^{-1} u \in V$. Таким образом, для равенства (3.36) выполняется посылка условия 6. Его заключение дает

$$\Phi\left(\frac{\mu - v}{\mu}(\lambda x + \lambda' x') + \frac{u}{\mu}, \ \frac{v}{\mu}\right) = 1.$$

Но последнее равенство является соотношением (3.28) для точки $\lambda x \neq \lambda' x'$. Поэтому

$$A(\lambda x + \lambda' x') = \left(\frac{\mu - v}{\mu}\right)^{-1} \left(\frac{v}{\mu} - \frac{u}{\mu}\right) = \frac{v - u}{\mu - v}.$$

Вместе с первым равенством (3.35) это дает требуемую формулу (3.30).

Поскольку точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$ аффинно-независимы, из равенств (3.25) и (3.30) вытекает, что $\beta_i$ – аффинные функционалы на $V$. Из (2.29) и условия 7 следует, что функции $\beta_i|(x)|$ непрерывны. Тогда по лемме 3.1 функционалы допускают однозначное продолжение до аффинных функционалов на всем пространстве. Проверим теперь, что уравнения (2.25) разрешимы при условии $s_1 + \ldots + s_{n+1} = 1$. Пусть $s_1, \ldots, s_{n+1}$ удовлетворяют этому условию. Покажем, что точка

$$x = \sum_{i=1}^{n+1} s_i e_i$$

является решением (2.25). Из равенств $\Phi(e_i, e_i) = 1$ и условия 5 следует, что $I(e_i) = \varnothing$, $\alpha_0(e_i) = 1$, $\alpha_j(e_i) = \delta_{ij}$. Поэтому из (2.58) вытекает, что $\beta_j(e_i) = 1$. Так как $\beta_j$ – аффинные функционалы и $s_1 + \ldots + s_{n+1} = 1$, то $\beta_j(x) = s_i$.

Таким образом, выполняется первое условие леммы 2.4. Выполнимость второго вытекает из условий 4 и 6′. Утверждение теоремы в сторону достаточности вытекает из леммы 2.4.

Проверим необходимость. Пусть $\Phi$ – $n$-мерный линейный предикат. Тогда выполнимость условий 4 и 6 очевидна. Выполнимость условий 5 и 7 вытекает из леммы 2.4.

Теорема 3.2 доказана.

### 3.3 Интегральное представление линейных предикатов

В соответствии с теоремой Рисса для любого линейного функционала $\alpha(x)$ в $L^2[1,0]$ существует единственный вектор $\alpha \in L^2[1,0]$ такой, что $\alpha(x) = (\alpha, x)$. Это равенство устанавливает канонический изоморфизм между функционалами и векторами (и тем самым оправдывает обозначение их одним и тем же символом). В интегральной форме равенство Рисса имеет вид

$$\alpha(x) = \int_0^1 \alpha(t) x(t) dt.$$

Оно позволяет сформулировать результаты двух предыдущих частей в некотором окончательном с прикладной точки зрения виде.

### 3.4. Общий случай

Предикат $\Phi$, определенный на квадрате выпуклого множества $V$ и удовлетворяющий условиям 1-3 [1] (рефлексивность, симметричность, транзитивность), назовем линейным, если существует конечная или счетная система функций $\{\alpha_i | i \in J\}$, $\alpha_i \in L^2[1, 0]$, удовлетворяющая условиям

$$\int_0^1 \alpha_i(t) \alpha_j(t) dt = \delta_{ij}, \quad i, j \in J, \tag{3.37}$$

и такая, что для любых $x, y \in V$ равенства

$$\Phi(x, y) = 1 \tag{3.38}$$

и

$$\int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt = \int_0^1 \alpha_k(t) y(t) dt, \quad k \in J, \tag{3.39}$$

эквивалентны.

Проверим, что это определение эквивалентно исходному определению, данному в [2]. Пусть для предиката $\Phi$ выполняется равенство (1.10) (см. [1]). Выберем в пространстве $\mathrm{Im}P$ какой-либо ортонормированный базис $\{\alpha_k | k \in J\}$. Тогда

$$Px = \sum_{k \in J} (x, \alpha_k) \alpha_k. \tag{3.40}$$

Легко видеть, что $Px = Py$ тогда и только тогда, когда $\alpha_k(x) = \alpha_k(y)$, $k \in J$. Используя формулу Рисса, последние равенства можно переписать в форме (3.39). Пусть, обратно, для предиката $\Phi$ существуют функции $\{\alpha_i | i \in J\}$, удовлетворяющие (3.37), и такие, что соотношения (3.38) и (3.39) эквивалентны. Определим ортопроектор $P$ равенством (3.40). Легко видеть, что $Px = Py$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (3.39). Таким образом, рассматриваемые определения действительно эквивалентны. Как видно из (4.4),

$$\mathrm{Im}P = L(\{\alpha_i | i \in J\}). \tag{3.41}$$

Если $\mathrm{aff}V = L^2[1,0]$, то линейному предикату отвечает лишь один ортопроектор. Таким образом, в этом случае предикат $\Phi$ является $n$-мерным линейным тогда и только тогда, когда множество $J$ состоит из $n$ элементов.

Требование ортонормированности системы функций не всегда является удобным в приложениях. Заменим его менее ограничительным требованием. Будем для краткости называть конечную или счетную систему $\{\alpha_i | i\in J\}$ базисной, если она является базисом своей линейной оболочки. Если система конечна, она является базисной тогда и только тогда, когда она линейно-независима. Если система $\{\alpha_i | i\in J\}$ счетная, то линейной независимости, вообще говоря, недостаточно для базисности. Приведем одно достаточное условие. Пусть существуют такие положительные константы $m$ и $M$, что для любого собственного значения каждой из матриц Грама ($n$ =1, 2, 3,...)

$$\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1)(\alpha_1, \alpha_2)...(\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1)(\alpha_2, \alpha_2)...(\alpha_2, \alpha_n) \\ ........................................ \\ (\alpha_n, \alpha_1)(\alpha_n, \alpha_2)...(\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}$$

справедливо неравенство $m \le \lambda \le M$. Тогда система $\{\alpha_i | i\in J\}$ является базисной и существует базисная система $\{\beta_i | i\in J\}$, двойственная к системе $\{\alpha_i | i\in J\}$.

**Теорема 3.3.** Для того, чтобы предикат $\Phi$, определенный на квадрате выпуклого множества $V$, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая базисная система функций $\{\alpha_i | i\in J\}$, $\alpha \in L^2[1, 0]$, что для всех $x, y\in V$ равенства (3.38) и (3.39) являются эквивалентными. При этом, если $\mathrm{aff} V = L^2[1, 0]$, то предикат $\Phi$ $n$-мерный линейный тогда и только тогда, когда множество $J$ состоит из $n$ элементов.

**Доказательство.** Необходимость очевидна – в качестве системы $\{\alpha_i | i\in J\}$ можно взять ортонормированную систему, фигурирующую в определении. Проверим достаточность. Пусть система $\{\alpha_i | i\in J\}$ удовлетворяет условиям теоремы, $\{\beta_i | i\in J\}$ – двойственная система. Определим оператор $B$ равенством

$$Bx = \sum_{i\in J} \alpha_i(x)\beta_i. \qquad (3.42)$$

Поскольку $\{\alpha_i | i\in J\}$ – базисная система, $\mathrm{Im}B$ является замкнутым множеством. Очевидно, $Bx = By$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i\in J$. Поэтому эквивалентность равенств (3.38) и (3.39) означает справедливость формулы (1.11) [1]. Тогда предикат $\Phi$ является линейным в силу леммы 1.1 [1]. Если множество $J$ состоит из $n$ элементов, предикат $\Phi$ является $n$-мерным в силу леммы 2.1 [2].

Основной в настоящем разделе является

**Теорема 3.4.** Пусть предикат $\Phi$ определен на квадрате выпуклого множества $V$ с замкнутой аффинной оболочкой. Для того чтобы существовала базисная система функций $\{\alpha_k | k\in J\}$, $\alpha_k \in L^2[1, 0]$ такая, что для всех $x, y\in V$ равенство $\Phi(x, y) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)y(t)dt, \quad k\in J,$$

необходимо и достаточно, чтобы предикат $\Phi$ удовлетворял следующим условиям:

4) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то $\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1$;

5) если последовательность $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к $x\in V$, последовательность $\{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ сходится к $y\in V$ и $\Phi(x_j, y_j) = 1$, то $\Phi(x, y) = 1$. Этот результат является комбинацией теорем 2.1 и 2.2 [2].

В случае, когда множество $V$ открыто, условие 5 можно ослабить до формы, фигурирующей в теореме 2.1. Другие варианты условий 4 и 5 приведены в комментариях к теореме 2.1.

Будем говорить, что линейно-независимая система функций (не обязательно ортогональная) $\{\alpha_k(t) | k\in J\}$ определяет линейный предикат $\Phi$, если равенства (3.38) и (3.39) эквивалентны.

**Следствие 3.1.** Для того чтобы две линейно-независимые системы функций $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^{n}$ и $\{u_i(t)\}_{i=1}^{n}$ определяли один и тот же $n$-мерный линейный предикат $\Phi$, на квадрате выпуклого множества с замкнутой аффинной оболочкой, необходимо и достаточно, чтобы существовала невырожденная матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & ... & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & ... & \alpha_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & ... & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.43)$$

такая, что почти при всех $t\in[0, 1]$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{11}\alpha_1(t) + a_{12}\alpha_2(t) + ... + a_{1n}\alpha_n(t), \\ u_2(t) &= a_{21}\alpha_1(t) + a_{22}\alpha_2(t) + ... + a_{2n}\alpha_n(t), \\ &........................................................ \\ u_n(t) &= a_{n1}\alpha_1(t) + a_{n2}\alpha_2(t) + ... + a_{nn}\alpha_n(t). \end{aligned} \qquad (3.44)$$

Это утверждение вытекает из следствия 2.1 [2].

Предположим теперь, что заданы два линейных предиката $\Phi_1$ и $\Phi_2$. Будем говорить, что предикат $\Phi_2$ грубее, чем предикат $\Phi_1$, если для всех из условия

$$ \qquad (3.45) $$

вытекает, что

$$\Phi_2(x, y)=1, \qquad (3.46)$$

и существуют такие $x_0, y_0 \in V$, для которых

$$\Phi_1(x_0, y_0)=0, \ \Phi_2(x_0, y_0)=1. \qquad (3.47)$$

**Следствие 3.2.** Пусть $V$ – выпуклое множество, $\mathrm{aff}V=L^2[1,0]$. Пусть, далее, система $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}$ определяет предикат $\Phi_1$ на $V\times V$, система $\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}$ определяет предикат $\Phi_2$ на $V\times V$. Для того чтобы предикат $\Phi_2$ был грубее предиката $\Phi_1$, необходимо и достаточно, чтобы было $n_2<n_1$ и нашлась такая прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n_1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_2 1} & c_{n_2 2} & \dots & c_{n_2 n_1} \end{pmatrix}, \qquad (3.48)$$

что

$$\begin{aligned} \alpha''_1 &= c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2 + \dots + c_{1n_1}\alpha'_{n_1}, \\ \alpha''_2 &= c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 + \dots + c_{2n_1}\alpha'_{n_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha''_{n_2} &= c_{n_2 1}\alpha'_1 + c_{n_2 2}\alpha'_2 + \dots + c_{n_2 n_1}\alpha'_{n_1}. \end{aligned} \qquad (3.49)$$

**Доказательство.** Пусть $P_1$ – ортопроектор, порождающий предикат $\Phi_1$, $P_2$ – ортопроектор, порождающий предикат $\Phi_2$. В соответствии с формулой (1.10) предикат $\Phi_2$ грубее предиката $\Phi_1$ тогда и только тогда, когда для $x, y\in V$ из равенства $P_1(x-y)=0$ вытекает, что $P_2(x-y)=0$ и существуют $x_0,y_0$ такие, что $P_1(x_0-y_0)\neq 0$, $P_2(x_0-y_0)=0$. Эти равенства и неравенство являются другой формой записи соотношений (3.45)÷(3.47). Поскольку $\mathrm{aff}V=L^2[1,0]$, любой элемент $z\in L^2[1,0]$ может быть записан в виде $z=\beta(x-y)$, $x, y\in V$. Поэтому тот факт, что $\Phi_2$ грубее, чем $\Phi_2$, означает, что для любого $z\in L^2[1,0]$ равенство $P_1 z=0$ влечет равенство $P_2 z=0$ и существует $z_0\in L^2[1,0]$ такой, что $P_1 z_0\neq 0$, $P_2 z_0=0$. Другими словами, это значит, что $\mathrm{Ker}P_1\subset \mathrm{Ker}P_2$ и это включение является строгим. Пользуясь разложением (1.9), это утверждение можно переписать в виде $\mathrm{Im}P_1\supset \mathrm{Im}P_2$, причем включение является строгим. Вместе с (3.41) это дает

$$\begin{aligned} &L(\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1})\supset L(\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}), \\ &L(\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1})\neq L(\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}). \end{aligned} \qquad (3.50)$$

Поскольку каждая из систем $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}$ и $\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}$ линейно-независима, соотношения (3.50) означают, что $n_2<n_1$ и существует такая матрица (3.48), что справедливо (3.49).

Следствие 3.2 доказано.

Обсудим вопрос о процедуре практической проверки линейной независимости функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$. Такая система линейно-независима тогда и только тогда, когда линейно-независима система функций $\{\alpha_k(t)\}_{k=1}^{n}$, $0\le t\le 1$, связанная с ней формулой Рисса. На практике система функций $\{\alpha_k(t)\}_{k=1}^{n}$ не может быть известна в точности. Обычно известными являются некоторые конечные приближения $\tilde\alpha_k=\{\alpha_{k1},\alpha_{k2},\dots,\alpha_{kp}\}$ функций $\alpha_k(t)$. Разумеется, чтобы точность аппроксимации была приемлемой, необходимо, чтобы было $p\ge n$. Таким образом, на практике вопрос о линейной независимости системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ заменяется вопросом о линейной независимости системы $\{\tilde\alpha_k\}_{k=1}^{n}$. Оценим погрешность аппроксимации. Положим для $s=(s_1, s_2,\dots, s_n)$

$$Ds=\sum_{k=1}^{n} s_k\alpha_k, \quad \tilde{D}s=\sum_{k=1}^{n} s_k\tilde\alpha_k.$$

Мерой линейной независимости систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ и $\{\tilde\alpha_k\}_{k=1}^{n}$ могут служить величины

$$\mu=\min_{s\neq 0}\frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} \quad \text{и} \quad \tilde\mu=\min_{s\neq 0}\frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2},$$

являющиеся наименьшими собственными значениями матриц Грама $\Gamma(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$ и $\Gamma(\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2,\dots,\tilde\alpha_n)$ соответственно. Имеем

$$\left|\frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2}-\frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2}\right|=\frac{\sum\limits_{k,j=1}^{n} s_k s_j((\alpha_k,\alpha_j)-(\tilde\alpha_k,\tilde\alpha_j))}{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2}. \qquad (3.51)$$

Для любой симметричной матрицы $(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ имеет место неравенство

$$\max\frac{\sum\limits_{k,j=1}^{n} b_{kj}s_k s_j}{\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2}\le n\cdot\max_{k,j}|b_{kj}|.$$

Поэтому из (3.51) можно заключить, что

$$\left|\frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2}-\frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2}\right|=m\max_{k,j}|(\alpha_k,\alpha_j)-(\tilde\alpha_k,\tilde\alpha_j)|.$$

Но тогда и

$$|\mu-\tilde\mu|\le n\cdot\max_{k,j}|(\alpha_k,\alpha_j)-(\tilde\alpha_k,\tilde\alpha_j)|. \qquad (3.52)$$

Пусть известна верхняя оценка для точности конечномерной аппроксимации:

$$\|(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)\| \le \varepsilon\ ,\ k = 1,\ 2, ..., n.$$

Тогда

$$|(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)| = |(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_k - \alpha_k) +$$
$$+ (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j) + (\tilde{\alpha}_k - \alpha_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j)| \le 2c\varepsilon + \varepsilon^2,$$

где

$$c = \max_{1 \le k \le n} |\tilde{\alpha}_k|\ .$$

Тогда из (3.52) следует, что

$$|\mu - \tilde{\mu}| \le n/2(\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Итак, если после вычисления величины $\mu$ (эта величина может быть найдена любым методом отыскания наименьшего собственного значения симметрической неотрицательно определенной матрицы) окажется, что $\tilde{\mu} > n/2(\varepsilon + \varepsilon^2)$, то можно гарантировать линейную независимость системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. В противном случае есть основания подозревать линейную зависимость этой системы. Во втором случае для дальнейшего уточнения можно попытаться экспериментально найти лучшую конечномерную аппроксимацию и исследовать вопрос для неё. Если окажется, что при уточненном исследовании будет $\tilde{\mu} \le n/2(\varepsilon + \varepsilon^2)$, а величина $\varepsilon$ достаточно мала, это означает, что если система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и не является вырожденной, то она настолько близка к вырожденной, что с практической точки зрения её можно считать таковой.

Для более детального изучения $n$-мерных линейных предикатов рассмотрим раздельно основные интересующие нас случаи множества $V$.

### 3.5. Предикаты, определенные на квадрате всего пространства

**Теорема 3.5.** Пусть предикат $\Phi$ определен на декартовом квадрате пространства $L^2[1,0]$ и удовлетворяет условиям:

4) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то $\Phi(x + x', y + y') = 1$ ;

5) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$, что для каждого $x \in L^2[1,0]$ есть единственный набор чисел $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию

$$\Phi\left(x, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) = 1; \qquad (3.53)$$

6) функции $\alpha_k(x)$ непрерывны.

Тогда существуют такие векторы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset L^2[1,0]$, что

$$\alpha_k(x) = \int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt\ , \qquad (3.54)$$

системы $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ являются линейно-независимыми и пара систем $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату $\Phi$ (понятие пары, присоединенной к $n$-мерному линейному предикату, было введено в части 2.1 [2]).

Это утверждение вытекает из теоремы 2.3 [2]. Верным является и обратное утверждение, а именно: если $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$ – пара систем, присоединенных к предикату $\Phi$, то для этого предиката выполняются условия 4-6. Это утверждение очевидно.

**Следствие 3.3.** Для того чтобы пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к $n$-мерному линейному предикату $\Phi$, определенному на квадрате пространства $L^2[1,0]$, необходимо $n$ и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам (т.е., чтобы система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ определяла предикат $\Phi$)

$$\int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt = \int_0^1 \alpha_k(t) y(t) dt, \quad k = 1,2,...,n \qquad (3.55)$$

и чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \alpha_j(t) e_j(t) dt = \delta_{ij}\ ,\ i, j = 1, 2, ..., n. \qquad (3.56)$$

Это утверждение вытекает из следствия 2.2 [2] и теоремы Рисса.

Если $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – произвольная линейно-независимая система векторов, то условию (3.56) вместе с ней может удовлетворять двойственная ей система $\{\beta_i\}_{i=1}^n$. Эта система может быть построена по формулам

$$\begin{aligned} \beta_1 &= c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + ... + c_{1n}\alpha_n\ , \\ \beta_2 &= c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + ... + c_{2n}\alpha_n\ , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_n &= c_{n1}\alpha_1 + c_{n2}\alpha_2 + ... + c_{nn}\alpha_n\ , \end{aligned} \qquad (3.57)$$

где $(c_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрица, обратная матрице Грама

$$\Gamma(\alpha_1, ..., \alpha_n) = \begin{pmatrix} \int_0^1 \alpha_1(t)\alpha_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_1(t)\alpha_2(t)dt & ... & \int_0^1 \alpha_1(t)\alpha_n(t)dt \\ \int_0^1 \alpha_2(t)\alpha_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_2(t)\alpha_2(t)dt & ... & \int_0^1 \alpha_2(t)\alpha_n(t)dt \\ ... & ... & ... & ... \\ \int_0^1 \alpha_n(t)\alpha_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_n(t)\alpha_2(t)dt & ... & \int_0^1 \alpha_n(t)\alpha_n(t)dt \end{pmatrix}$$

При практических вычислениях более удобной является схема нахождения системы $\{\beta_i\}_{i=1}^n$, использующая следующий конечный итерационный процесс. Полагаем $\beta_{i0} = \alpha_i$, $i = 1,2,...,n$. Предположим, что при некотором $m = 1, 2,..., n$ уже построена система $\{\beta_{im-1}\}_{i=1}^n$. Вычислим функцию $\beta_{mm}$ по формуле

$$\beta_{mm} = \frac{\beta_{m\ m-1}}{\int_0^1 \beta_{m\ m-1}(t)\alpha_m(t)dt},$$

а затем функции $\beta_{im}$ $(i = 1, 2,..., n, i \neq m)$ по формулам

$$\beta_{im} = \beta_{im-1} - \left(\int_0^1 \beta_{im-1}(t)\alpha_m(t)dt\right)\cdot\beta_{mm}.$$

На $n$-м шаге получаем требуемый результат: $\beta_i = \beta_{in}$, $i = 1, 2,..., n$.

В приложениях одни системы векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ могут быть предпочтительнее других (например, потому, что удовлетворяют дополнительному требованию – все функции $e_k(t)$ неотрицательны). Поэтому приведем здесь общую конструкцию, позволяющую найти все такие системы векторов.

**Следствие 3.4.** Пусть $\Phi$ – $n$-мерный линейный предикат, определенный на квадрате пространства $L^2[1,0]$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – линейно-независимая система функционалов, определяющая предикат $\Phi$, $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система. Для того чтобы пара систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к предикату $\Phi$, необходимо и достаточно, чтобы

$$e_k = \beta_k + \gamma_k,\ \ k = 1,2,..,n, \tag{3.58}$$

где $\{\gamma_k\}_{n=1}^\infty$ – любая система, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 \alpha_i(t)\gamma_j(t)dt = 0,\ \ i = 1,2,...,n. \tag{3.59}$$

**Доказательство.** Действительно, если система векторов $\{\gamma_j\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяет условию (3.59), т.е. ортогональна подпространству $L\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, то в силу двойственности систем $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ выполняются равенства (3.56) и пара $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ присоединена к предикату $\Phi$ в силу следствия 3.3. Теперь, пусть пара $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ присоединена к предикату $\Phi$. Тогда имеют место равенства (3.56). Но для двойственной системы $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ также выполняются эти равенства. Тогда $(e_k - \beta_k, \alpha_i) = (e_k, \alpha_i) - (\beta_k, \alpha_i) = \delta_{ki} - \delta_{ki} = 0$.

Следствие 3.4 доказано.

Мы видели, что $n$-мерный линейный предикат $\Phi$ не определяет однозначно связанную с ним систему $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$. Однако если задать систему векторов $\{e_i\}_{i=1}^n$, то существует лишь одна система функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ такая, что пара и $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату $\Phi$. Действительно, пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ – две такие системы. Тогда они связаны равенством (3.44). Имеем

$$(u_i, e_k) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha_j, e_k). \tag{3.60}$$

Но согласно следствию 2.1 $(u_i, e_k) = \delta_{ik}$, $(\alpha_i, e_k) = \delta_{jk}$. Поэтому из (3.60) следует, что $\alpha_i = \delta_{jk}$. Тогда из (3.44) вытекает, что $u_i = \alpha_i$, $i = 1, 2,..., n$.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – одна, а $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ – другая пара систем, присоединенная к одному и тому же предикату $\Phi$. Предположим, что системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ известны. Вопрос заключается в том, чтобы по этим данным найти систему $\{u_k\}_{k=1}^n$. Оказывается, что это может быть сделано даже без знания системы $\{e_k\}_{k=1}^n$. А именно, система $\{u_i\}_{i=1}^n$ может быть найдена по формулам (3.44), где (3.43) – матрица, обратная матрице

$$\begin{pmatrix} \int_0^1 \alpha_1(t)g_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_1(t)g_2(t)dt & \dots & \int_0^1 \alpha_1(t)g_n(t)dt \\ \int_0^1 \alpha_2(t)g_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_2(t)g_2(t)dt & \dots & \int_0^1 \alpha_2(t)g_n(t)dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^1 \alpha_n(t)g_1(t)dt & \int_0^1 \alpha_n(t)g_2(t)dt & \dots & \int_0^1 \alpha_n(t)g_n(t)dt \end{pmatrix} \tag{3.61}$$

Действительно, если пары $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ присоединены к предикату $\Phi$, то каждая из систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ определяет этот предикат. Тогда согласно следствию 3.1 имеют место равенства (3.44), где (3.43) – некоторая невырожденная матрица. Умножая скалярно каждое из этих равенств на $g_k$ $(k = 1,2,...,n)$, получаем

$$(u_i, g_k) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(\alpha_i, g_k),\ \ i,k = 1,2,..,n. \tag{3.62}$$

Но в силу следствия 3.3 справедливо равенство $(u_i, g_k) = \delta_{ik}$. Поэтому (2.10) [2] может быть переписано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{21} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1 g_1) & (\alpha_1 g_2) & \dots & (\alpha_1 g_n) \\ (\alpha_2 g_1) & (\alpha_2 g_2) & \dots & (\alpha_2 g_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\alpha_n g_1) & (\alpha_n g_2) & \dots & (\alpha_n g_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица (3.43) действительно обратна (3.61).

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ – какие-либо системы функционалов, определяющие предикат $\Phi$, $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ и $\{v_k\}_{k=1}^n$ – двойственные к ним системы. Если известна матрица (3.43), связывающая системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{u_k\}_{k=1}^n$ равенством (3.44), и система $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, то для нахождения $\{v_k\}_{k=1}^n$ нет необходимости в задании $\{u_k\}_{k=1}^n$. Она может быть найдена по формулам

$$\begin{aligned} v_1 &= d_{11}\beta_1 + d_{12}\beta_2 + \ldots + d_{1n}\beta_n, \\ v_2 &= d_{21}\beta_1 + d_{22}\beta_2 + \ldots + d_{2n}\beta_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= d_{n1}\beta_1 + d_{n2}\beta_2 + \ldots + d_{nn}\beta_n, \end{aligned} \qquad (3.63)$$

где

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix} \qquad (3.64)$$

матрица, обратная сопряженной к матрице (3.43). Действительно, согласно следствию 3.1, системы $\{v_i\}_{i=1}^n$ и $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ связаны равенством (3.63), где $\{d_{ij}\}_{i,j=1}^n$ – некоторая невырожденная матрица. Тогда

$$\delta_{ki} = (u_k, v_i) = (u_k \sum_{j=1}^n d_{ij}\beta_j) = \sum_{j=1}^n d_{ij}(u_k, \beta_j). \qquad (3.65)$$

Но из (3.44) следует, что

$$(u_k, \beta_j) = (\sum_{s=1}^n a_{ks}\alpha_s \beta_j) = \sum_{s=1}^n a_{ks}(\alpha_s, \beta_j) = \sum_{s=1}^n a_{ks}\delta_{sj} = a_{kj}.$$

Вместе с (3.65) это дает

$$\sum_{j=1}^n d_{ij}a_{kj} = \delta_{ik},$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица (3.64) действительно обратна сопряженной матрице (3.43).

Сделаем последнее замечание, относящееся к замене координат в интегральном представлении $n$-мерного линейного предиката. Пусть, как и ранее, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо пара функционалов и векторов, присоединенная к предикату $\Phi$, $\{u_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо система функционалов, определяющая этот предикат. Требуется найти какую-либо систему векторов $\{g_k\}_{k=1}^n$, которая вместе с $\{u_k\}_{k=1}^n$ присоединена к $\Phi$. Эта задача может быть решена без знания $\{u_k\}_{k=1}^n$, если известна система $\{e_k\}_{k=1}^n$ и матрица (4.7). Искомая система может быть найдена по формуле

$$\begin{aligned} g_1 &= d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + \ldots + d_{1n}e_n, \\ g_2 &= d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + \ldots + d_{2n}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_n &= d_{n1}e_1 + d_{n2}e_2 + \ldots + d_{nn}e_n, \end{aligned} \qquad (3.66)$$

аналогичной (3.63), с той же матрицей (3.64) – обратной сопряженной матрице (3.43). Действительно, пусть $\{g_k\}_{k=1}^n$ – система, определяемая равенствами (3.66). Положим

$$\xi_j = g_j - v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда из (3.63), (3.66) и (3.58)

$$\xi_j = \sum_{k=1}^n d_{jk}(e_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^n d_{jk}\gamma_k.$$

Поэтому из (3.59) получаем

$$(\xi_j, \alpha_i) = \sum_{k=1}^n d_{jk}(\gamma_k, \alpha_i) = 0.$$

Вместе с (3.44) это дает

$$(\xi_j, u_s) = (\xi_j, \sum_{i=1}^n a_{si}\alpha_i) = \sum_{i=1}^n a_{si}(\xi_j, \alpha_i) = 0.$$

Таким образом, система $\{u_k\}_{k=1}^n$ определяет предикат $\Phi$, $\{v_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система $g_k = v_k + \xi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ $(\xi_k, u_j) = 0$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда, согласно следствию 3.4, пара систем $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату $\Phi$, что и требовалось.

**Литература:** 1. *Походенко В.А., Тарасова Т.Г., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* Теория цветового зрения. I. Радиоэлектроника и информатика. 1998. №1. С. 106-117. 2. 1. *Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю.* Теория цветового зрения. II. Радиоэлектроника и информатика. См. статью в настоящем выпуске.

Поступила в редколлегию 23.10.98

Рецензент д-р техн. наук, профессор Левыкин В.М.

**Бондаренко Михаил Федорович**, д-р техн. наук, профессор, академик АН ВШ, ректор ХТУРЭ. Научные интересы: информатика. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина 14. Тел.: 43-30-53.

**Шабанов-Кушнаренко Сергей Юрьевич**, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: идентификация механизмов интеллекта человека. Адрес: Украина, 310726, Харьков, пр. Ленина 14. Тел.: 40-94-46.