УДК 381.324:621.394.74

ПРИНЯТИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ С УЧЕТОМ СОВОКУПНОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА

Часть 1. Методология многокритериальной оптимизации систем

В.М. Безрук,
А.Н. Буханько
Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Розглядаються особливості застосування методів багатокритеріальної оптимізації для рішення задач оптимального вибору проектних рішень у телекомунікаційних мережах. Наводяться основні етапи багатокритеріальної оптимізації за Парето.

- -

Features of multicriteria optimization methods application for the solving of problems of a design decisions optimum choice in telecommunication networks are considered. The basic stages of multicriteria Pareto optimization are resulted.

- -

Рассматриваются особенности применения методов многокритериальной оптимизации для решения задач оптимального выбора проектных решений в телекоммуникационных сетях. Приводятся основные этапы многокритериальной оптимизации по Парето.

Введение

Современные телекоммуникационные сети становятся все более сложными, к ним предъявляются противоречивые технико-экономические требования, которые характеризуются совокупностью показателей качества. Как правило, показатели качества зависимы между собой и являются антагонистическими. Телекоммуникационную сеть, как один из видов сложной информационной системы, можно представить упорядоченным набором элементов, свойств и их соотношений. Их конкретное задание определяет структуру, параметры и эффективность сети. При этом возникает необходимость решения разных сетевых задач: нахождение минимального остовного дерева, нахождение кратчайшего пути, определение максимального потока, минимизация стоимости потока при ограниченной пропускной способностью каналов, нахождение критического пути, выбор оптимальных пропускных способностей каналов [1–5].

Актуальным является выбор оптимальных решений при долгосрочном планировании и проектировании сетей, а также при краткосрочном планировании и ситуативном управлении с учетом совокупности показателей качества [6–12]. Здесь имеет место задача принятия оптимальных решений, для которой характерны следующие основные компоненты: как сформировать множество альтернативных решений, каким ограничениям должны удовлетворять решения, по какому критерию и какими методами должны выбираться наилучшие (оптимальные) решения. С учетом специфики телекоммуникационных сетей возникает необходимость применения методов многокритериальной оптимизации для принятия оптимальных решений.

В первой части статьи на основе анализа известных работ рассматриваются особенности методологии многокритериальной оптимизации систем, используемой для принятия оптимальных решений с учетом совокупности показателей качества [13–19]. При изложении этой методологии рассмотрены ординалистический и кардиналистический подходы к определению понятия оптимальности (заданию критерия оптимальности) системы; морфологический подход к формированию исходного множества вариантов; разные методы выбора подмножества Парето-оптимальных вариантов системы, в частности, весовой метод, метод рабочих характеристик, метод главного критерия, метод последовательных уступок, а также разные подходы к сужению подмножества Парето до единственного проектного решения, основанные на теории полезности, теории нечетких множеств, лексографическом сравнении, методе анализа иерархий.

Во второй части статьи будут приведены практические особенности применения данной методологии при оптимальном решении некоторых задач долгосрочного и краткосрочного сетевого планирования, проектирования телекоммуникационных сетей и управления в них, в частности, нахождения оптимальных вариантов работы сети, планирования сотовых сетей связи, оптимальной маршрутизации, выбора оптимальных кодеков, оптимального управления сетевыми ресурсами с учетом совокупности показателей качества.

I. Формулирование задач принятия оптимальных решений с учетом совокупности показателей качества

Постановка задач принятия оптимальных решений. Задача принятия оптимальных решений состоит в выборе из множества возможных решений таких решений, которые являлись бы в определенном смысле лучшими, или, как говорят, оптимальными.

Удобно считать, что выбор решений производит некоторое лицо, принимающее решение (ЛПР), которое преследует вполне определенные цели [16, 17]. В зависимости от конкретной ситуации в роли ЛПР может выступать как отдельный человек (инженер, научный сотрудник, заказчик), так и целый коллектив (группа специалистов, занятая решением одной задачи). Каждое возможное решение характеризуется определенной степенью достижения цели. В соответствии с этим у ЛПР имеется свое представление о достоинствах и недостатках решений, на основании которого одно решение предпочитается другому.

Оптимальное решение – это решение, которое с точки зрения ЛПР предпочтительнее других альтернативных решений. Это предпочтение на практике может выражаться в различной форме, и его математическая формализация может составить непростую задачу. Сложность заключается в том, что на начальных этапах ЛПР, как правило, не может сформулировать свои предпочтения (оптимальность решений) ясно и четко с точки зрения математической формализации.

Выбор критерия оптимальности для нахождения лучшего решения на множестве допустимых решений связан с формализацией представления ЛПР об оптимальности решения. При этом существуют два подхода к определению понятия оптимальности решений: ординалистический и кардиналистический [12–14].

Ординалистический подход к определению понятия оптимальности решений апеллирует к порядку (лучше-хуже) и основан на введении понятия бинарных отношений, что позволяет формализовать операции попарного сравнения альтернатив и выбора оптимальных решений.

Бинарным отношением называют множество упорядоченных пар альтернатив, которые находятся в некотором отношении R, что записывается в виде $(x',x'')\in R$ или $x'Rx''$. Понятие бинарного отношения позволяет формализовать операции попарного сравнения альтернатив и выбора лучших решений на множестве допустимых X. Элемент $x'\in X$ называется лучшим в модели выбора (X,R), если он не менее предпочтителен, чем любой другой элемент x'', т.е. если бинарное отношение $x'Rx''$ справедливо для любого $x''\in X$.

Существуют разные классы бинарных отношений: порядка, квазипорядка, эквивалентности, неразличимости. Рассмотрим более подробно отношение строгого предпочтения, которое часто используется на практике при выборе оптимального решения. Если из двух решений x' и x'' множества X ЛПР выбирает решение x', то говорят, что решение x' более предпочтительно, чем решение x''. Такие пары (x',x'') образуют множество, которое называется отношением строгого предпочтения, что обозначается как $x'\succ x''$.

При сравнении решений возможен и такой случай, когда не будет отдано предпочтение ни одному из решений. В этом случае вводится отношение неразличимости (отношение безразличия), которое обозначается символом ~. Оно означает, что не выполняется ни отношение $x'\succ x''$, ни отношение $x''\succ x'$. Другими словами, решения x' и x'' неразличимы, если они несравнимы по заданному бинарному отношению $\succ$. Это отношение может иметь место и тогда, когда для ЛПР в смысле предпочтения нет разницы между решениями x' и x''. Кроме того, отношение неразличимости может иметь место и в случае, когда эти решения ЛПР вообще никак не может сравнить друг с другом.

Итак, для произвольно выбранной пары решений $x', x''\in X$ может выполняться одно из заданных бинарных отношений: $x'\succ x''$, $x''\succ x'$, $x'\sim x''$. Нередко удобно рассматривать еще одно отношение «не менее предпочтительно, чем», являющееся объединением отношений $\succ$ и ~. Это бинарное отношение называется отношением нестрогого предпочтения.

Рассмотрим особенности выбора множества оптимальных решений для случая, когда при выборе «лучших» (оптимальных решений) из множества X ЛПР руководствуется отношением строгого предпочтения $\succ$. При этом с использованием отношения $\succ$ выделяются оптимальные (предпочтительные) решения. Худшие решения, для которых имеются более предпочтительные альтернативы, удаляются из множества X, поскольку их заведомо нельзя считать оптимальными. В результате исключения во множестве X худших решений по бинарному отношению $\succ$ останутся только оптимальные решения, для которых выполняется отношение неразличимости.

Таким образом, *множество оптимальных решений* по отношению строгого предпочтения $\succ$ включает такие решения $x^{(o)} \in X$, для которых не существует других решений $x \in X$, и было бы справедливо отношение $x \succ x^{(o)}$. Это множество оптимальных решений обозначается через $opt_{\succ} X$. В зависимости от структуры множества X и свойств отношения $\succ$ множество оптимальных решений $opt_{\succ} X$ может содержать единственный элемент, конечное или бесконечное множество элементов. Если множество X не пусто и содержит конечное число элементов, а бинарное отношение $\succ$ асимметрично и транзитивно, то это множество непустое $opt_{\succ} X \neq \varnothing$.

Кардиналистический подход к определению понятия оптимальности решений основан на введении некоторой целевой функции $U(\bullet)$, значение которой интерпретируется как полезность (ценность) решения x и определяет предпочтение ЛПР. Выбранная целевая функция задает соответствующее отношение порядка R на множестве X. Значение целевой функции $U(\bullet)$ является индикатором предпочтения R. В частности, при задании скалярной целевой функции считается, что решение x' предпочтительнее альтернативного решения x'' тогда и только тогда, когда выполняется условие $U(x') \geq U(x'')$. При таком подходе может быть задана формализованная процедура выбора оптимальных решений (критерий оптимальности) из условия экстремума (минимума или максимума) целевой функции на множестве допустимых решений

$$X^{(o)} = \mathop{\mathbf{arg}}_{x \in X} extrem[U(x)]\,. \tag{1}$$

В этом случае для выбора оптимальных решений используются методы скалярной оптимизации, которые, как правило, приводят к выбору единственного решения. Однако из-за недостаточной определенности представления ЛПР об оптимальности с учетом совокупности противоречивых требований к решениям часто не удается в формализованном виде задать скалярную целевую функцию и соответствующий скалярный критерий оптимальности. Поэтому на начальных этапах решения характеризуют векторной целевой функцией, включающей совокупность частных целевых функций

$$\vec{f}(x) = \left(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)\right), \tag{2}$$

которые определяют полезность (ценность) решения x с точки зрения разных требований. При этом возникают более сложные задачи оптимизации решений по совокупности показателей качества, которые также называются задачами многокритериальной либо векторной оптимизации [14]

$$X^{(o)} = \mathop{\mathbf{arg}\,extrem}_{x \in X} [\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))]. \tag{3}$$

В многокритериальной оптимизационной задаче (3) возможны следующие варианты: частные целевые функции независимы между собой; функции связаны между собой и являются согласованными; функции связаны между собой и являются противоречивыми. В первых двух случаях оптимизационная задача (3) сводится к совокупности независимых оптимизационных задач для частных целевых функций. В последнем случае, который встречается часто в практических приложениях, оптимизационная задача (3) сводится к нахождению согласованного экстремума частных целевых функций. Этот экстремум означает, что дальнейшее улучшения значения каждой целевой функции может быть достигнуто лишь за счет ухудшения значений других целевых функций. В результате этого находится подмножество решений, оптимальных по совокупности показателей качества.

При введении векторной целевой функции, наряду с множеством допустимых альтернативных решений X, можно рассматривать множество соответствующих им значений этой функции

$$Y = \vec{f}(X) = \{\vec{y} \in Y \mid \vec{y} = \vec{f}(x),\, x \in X\},\ Y \subset R^m, \tag{4}$$

которое называют *множеством векторных оценок* или *критериальным пространством.*

Каждому решению $x \in X$ соответствует одна оценка $\vec{y} = \vec{f}(x) \in Y$. С другой стороны, каждой оценке отвечают альтернативные решения $x \in X$ (их может быть и более одного), для которых $\vec{f}(x) = \vec{y}$. Таким образом, между множествами X и Y имеется тесная связь, и поэтому выбор решения из множества X в указанном смысле равносилен выбору соответствующей оценки в критериальном пространстве Y.

Для векторных оценок $\vec{y}'$ и $\vec{y}''$ пространства Y можно рассматривать разные типы бинарных отношений между оценками, в частности, широко используется [12, 14]:

- отношение нестрогого предпочтения (называемое также отношением Парето)

$$\vec{y}'\,\Phi_1\,\vec{y}'' \quad \leftrightarrow \quad \vec{f}(x') \geq \vec{f}(x''), \qquad f_i(x') \geq f_i(x''), \qquad i = \overline{1,m}, \qquad f_i(x') \neq f_i(x'');$$

- отношение строгого предпочтения (называемое также отношением Слейтера)

$$\vec{y}'\,\Phi_1\,\vec{y}'' \leftrightarrow \vec{f}(x') > \vec{f}(x''), \qquad f_i(x') \geq f_i(x''), \quad i = \overline{1,m}.$$

Также существуют и другие типы бинарных отношений: $\overset{=}{>}$, $\underset{=}{>}$. Для указанных отношений выполняются включения $> \subset \geq \subset \underset{=}{>} \subset \overset{=}{>}$. Следует заметить, что $\underset{=}{>}$ это объединение $\geq$ и =, а отношение $\overset{=}{>}$ верно тогда и только тогда, когда отношение $\geq$ неверно.

Согласованность отношений предпочтения на множестве решений и на множестве векторных оценок. Пусть определена векторная целевая функция $\vec{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$ на множестве допустимых решений X. При отображении с помощью векторной целевой функции $\vec{f}(x),\, x \in X$, ему соответствует множество оценок Y (4). Будем полагать, что на множествах X и Y заданы отношения строгого предпочтения $\underset{X}{\succ}$ и $\underset{Y}{\succ}$ соответственно. Каждому решению $x \in X$ соответствует определенная векторная оценка $\vec{y} = \vec{f}(x) \in Y$ и, наоборот, каждой оценке $\vec{y}$ соответствуют такие решения x, для которых $\vec{f}(x) = \vec{y}$. Поэтому указанные бинарные отношения согласованы друг с другом: $\vec{y}' \underset{Y}{\succ} \vec{y}''$ имеет место тогда и только тогда, когда $x' \underset{X}{\succ} x''$, где $\vec{y}' = \vec{f}(x')$ и $\vec{y}'' = \vec{f}(x'')$ [14]. Следовательно, результаты, сформулированные в терминах оценок $\vec{y}$, могут быть переформулированы применительно к решениям x, и наоборот.

Для определенности ограничимся рассмотрением задач максимизации (полученные результаты и выводы легко переформулируются применительно к задачам минимизации). В частности, многокритериальная задача максимизации характеризуется тем, что оценка $\vec{y}'$ всегда предпочтительнее оценки $\vec{y}''$, если выполняется неравенство $\vec{y}' \geq \vec{y}''$. Во многокритериальной задаче максимизации считают выполненной аксиому Парето.

Аксиома Парето (в терминах оценок) [14]. *Для любых двух* оценок $\vec{y}'$, $\vec{y}'' \in Y$, удовлетворяющих векторному неравенству $\vec{y}' \geq \vec{y}''$, всегда выполняется бинарное отношение $\vec{y}' \underset{Y}{\succ} \vec{y}''$.

Аксиома Парето (в терминах решений). Для любых двух решений $x', x'' \in X$, для которых верно $\vec{f}(x') \geq \vec{f}(x'')$, всегда имеет место бинарное отношение $x' \underset{X}{\succ} x''$.

Аксиома Парето накладывает определенные требования на характер отношения предпочтения во многокритериальной задаче максимизации. А именно: для лица, принимающего решение, желательно по каждому из частных целевых функций $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ получить по возможности большее значение, т.е. максимизировать каждую из функций. Точка максимума на множестве X одновременно для всех целевых функций заведомо является оптимальным решением многокритериальной задачи максимизации. Однако на практике этот случай имеет место крайне редко, так как такой точки максимума, как правило, не существует. Поэтому при отсутствии дополнительной информации о предпочтениях $\underset{X}{\succ}$ и $\underset{Y}{\succ}$ во многокритериальной задаче удается найти лишь согласованный экстремум частных целевых функций, которому соответствует некоторое множество оптимальных решений. Согласованный экстремум совокупности целевых функций означает, что дальнейшее улучшение значений каждой из них может быть достигнуто лишь за счет ухудшения других целевых функций.

Парето-оптимальность. Согласно аксиоме Парето во многокритериальных задачах оптимизации бинарное отношение $\geq$ играет важную роль. Поэтому множество оптимальных оценок по отношению $\geq$ на множестве Y имеет специальное название: *множество Парето-оптимальных (оптимальных по Парето)* или *эффективных оценок*. Это множество обозначают через $P(Y) = opt_{\geq} Y$. Включение $\vec{y}^{(o)} \in P(Y)$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует другой оценки $\vec{y} \in Y$, для которой было бы выполнено векторное неравенство $\vec{y} \geq \vec{y}^{(o)}$.

Соответствующее решение $x^{(o)} \in X$, для которого справедливо включение $\vec{y}^{(o)} = \vec{f}(x^{(o)}) \in P(Y)$, называют *Парето-оптимальным (оптимальным по Парето)* или *эффективным решением* относительно векторной функции $\vec{f}(\bullet)$ на множестве X [12, 13]. Множество всех таких решений обозначают через $P_f(X)$. Таким образом, включение $x^{(o)} \in P_f(X)$ имеет место тогда и только тогда, когда не существует других $x \in X$ таких, что выполняется неравенство $\vec{f}(x) \geq \vec{f}(x^{(o)})$.

При $m=1$ бинарное отношение $\geq$ превращается в отношение $>$ для чисел, и Парето-оптимальная оценка совпадает с максимальным элементом числового множества. При этом сформулированное определение Парето-оптимального решения превращается в определение точки максимума скалярной функции $f^{(o)}$. Таким образом, понятие Парето-оптимальной точки можно рассматривать как обобщение понятия точки максимума функции на случай нескольких функций.

Аналогично предыдущим определениям, оценки, максимальные по отношению >, называются слабоэффективными (слабо оптимальными по Парето) или оптимальными по Слейтеру. Множество таких оценок из Y обозначается через $S(Y)$ и называется слабоэффективным [14]. Для указанных множеств выполняется включение $P(Y) \subseteq S(Y)$.

Применительно к случаю выбора оптимальных вариантов систем полагается, что принимаемое решение x - это вариант системы $\phi = (s, \vec{\beta})$, который определяется своей структурой s (совокупностью элементов и связей) и вектором параметров $\vec{\beta}$. Эффективность системы оценивается совокупностью показателей качества и соответствующей векторной целевой функцией

$$\vec{k}(\phi) = (k_1(\phi),...,k_i(\phi),\ldots,k_m(\phi)). \qquad (5)$$

Показатели качества системы, как правило, связаны между собой и являются антагонистическими. Это означает, что улучшение одних показателей качества при изменении структуры и параметров системы достигается за счет ухудшения других показателей качества.

Существующие ограничения на условия работы, структуру $s \in S_\partial$ и параметры $\beta \in \mathrm{B}_\partial$ системы, а также на значения ее показателей качества, определяют подмножество допустимых проектных решений $\Phi_\partial = S_\partial \times \mathrm{B}_\partial$. Здесь существуют противоречивые требования. С одной стороны, желательно с максимальной полнотой представить все возможные варианты системы, чтобы не пропустить потенциально лучших вариантов решений. С другой стороны, существуют ограничения, определяемые допустимыми затратами (времени и средств) на процесс проектирования системы.

Для строгой формализации постановки задачи проектирования оптимальной системы должно быть составлено математическое описание условий работы, структуры, показателей качества и критерия оптимальности системы. Формализованная постановка задачи дает возможность при выборе оптимальных проектных решений использовать строгие методы многокритериальной оптимизации. Рассмотрим более подробно некоторые особенности формирования множества допустимых вариантов систем и выбора оптимальных вариантов систем с учетом совокупности показателей качества.

II. Формирование множества допустимых вариантов системы на основе морфологического подхода

Для определения множества допустимых вариантов системы широкое распространение получил морфологический подход, для которого характерны такие факторы [15]:

- выявление перечня основных функций системы и ее декомпозиция на подсистемы по функциональным признакам $\{\phi_l, l=\overline{1,L}\}$;

- определение разных альтернативных способов реализации каждой подсистемы и задание допустимых вариантов их построения $\Phi_l = \{\phi_{l1}, \phi_{l2}, \ldots, \phi_{lK_l}\}$;

- формирование различных вариантов построения системы в целом на основе морфологических классов – множества вариантов построения каждой подсистемы, для которых выполняются условия $\sigma(l) = \Phi_l$, $l=\overline{1,L}$, $\sigma(l) \cap \sigma(j) = 0$.

Формируется морфологическая таблица (табл. 1). Каждый вариант построения системы определяется разными возможными вариантами подсистем. При формировании допустимого множества вариантов системы должны учитываться ограничение на структуру, параметры и техническую реализацию отдельных подсистем и системы в целом, а также допустимые комбинации объединения отдельных вариантов подсистем между собой. Количество возможных вариантов системы определяется так: $Q = \prod_{l=1}^{L} K_l$.

Таблица 1. Морфологическая таблица формирования множества исходных вариантов системы

Морфологические классы	Возможные способы реализации подсистемы	Количество способов реализации системы
$\sigma(1)$	$\phi_{11}\,\phi_{12}\,\phi_{13}\quad\phi_{1K_1}$	K_1
$\sigma(2)$	$\phi_{21}\,\phi_{22}\,\phi_{23}\quad\phi_{2K_1}$	K_2
...	...	...
$\sigma(l)$	$\phi_{l1}\,\phi_{l2}\,\phi_{l3}\quad\phi_{lK_1}$	K_l
...	...	...
$\sigma(L)$	$\phi_{L1}\,\phi_{L2}\,\phi_{L3}\quad\phi_{LK_L}$	K_L

Следует заметить, что, с одной стороны, желательно представлять все возможные варианты подсистем. С другой стороны, могут существовать определенные ограничения на объем исходного множества, которые задаются временем или стоимостью проектирования системы.

III. Методы нахождения Парето-оптимальных вариантов системы

Парето-оптимальные проектные решения могут быть найдены как непосредственно на множестве Φ_∂ с применением введенных бинарных отношений предпочтения, так и в пространстве введенных показателей качества – критериальном пространстве оценок. При этом каждый вариант системы ϕ отображается из множества допустимых вариантов Φ_∂ в критериальное пространство $Y \subset R^m$

$$Y = \vec{K}(\Phi_\partial) = \left\{ \vec{y} \in Y \middle| \vec{y} = (\vec{k}(\phi), \quad \phi \in \Phi_\partial \right\}. \tag{6}$$

Отношению предпочтения $\succ$ на множестве Φ_∂ соответствует отношение $\geq$ в критериальном пространстве оценок Y. Для любых двух проектных решений $\phi', \phi'' \in \Phi_\partial$, для которых верно векторное неравенство $\vec{k}(\phi') \geq \vec{k}(\phi'')$, всегда имеет место отношение $\phi' \succ \phi''$ [14].

Здесь следует отметить, что показатели качества (целевые функции) системы (2) могут быть трех типов: нейтральные, согласованные между собой и конкурирующие между собой. В первых двух случаях оптимизация системы может осуществляться в отдельности по каждому из показателей качества. В третьем случае достигнуть потенциального значения каждого из показателей в отдельности не представляется возможным. При этом может быть достигнут лишь согласованный оптимум введенных целевых функций – оптимум по критерию Парето. Это означает, что дальнейшее улучшение каждого из показателей может быть достигнуто лишь за счет ухудшения остальных показателей качества системы.

Оптимуму по критерию Парето в критериальном пространстве соответствует подмножество Парето-оптимальных оценок, которые соответствуют недоминируемым вариантам системы [12, 13]

$$P(Y) = opt_{\geq} Y = \left\{ \vec{k}(\phi^o) \in Y : \exists \vec{k}(\phi) \in Y : \vec{k}(\phi) \geq \vec{k}(\phi^o) \right\}. \tag{7}$$

При нахождении подмножества Парето-оптимальных оценок, согласно (7), исключаются безусловно худшие оценки, а следовательно, и соответствующие им безусловно худшие варианты системы.

Нахождение Парето-оптимальных оценок и соответствующих им решений может производиться согласно (7) *методом дискретного выбора* при конечной мощности множества допустимых вариантов системы Φ_∂.

Кроме этого, для нахождения Парето-оптимальных решений могут быть использованы специальные методы, например, весовой метод, метод рабочих характеристик, метод последовательных уступок и другие.

В частности, в случае применения *весового метода* Парето-оптимальные проектные решения находятся путем оптимизации взвешенной суммы частных целевых функций [10]

$$P_{\vec{k}}(\Phi_\partial) = \left\{ \phi^{(o)} \in \Phi_\partial : \mathbf{arg} \underset{\phi \in \Phi_\partial}{extr} \left[k_p(\phi) = \lambda_1 k_1(\phi) + \lambda_2 k_2(\phi) + \ldots + \lambda_m k_m(\phi) \right] \right\}, \tag{8}$$

в которой весовые коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ выбираются из условия $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Множество Парето-оптимальных решений содержит те варианты системы, которые удовлетворяют условию (8) при разных допустимых комбинациях весовых коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$.

Метод рабочих характеристик состоит в том, что все целевые функции, кроме одной, например, первой, переводятся в разряд ограничений типа равенства, и ищется её экстремум на множестве допустимых альтернатив [10]

$$P_{\bar{k}}(\Phi_\partial) = \left\{ \phi^{(o)} \in \Phi_\partial : \arg\underset{\phi \in \Phi_\partial}{extrextr}[k_1(\phi)], \quad k_2(\phi) = K_{2\phi};\ k_3(\phi) = K_{3\phi}, ..., k_m(\phi) = K_{m\phi} \right\}. \quad (9)$$

Здесь $K_{2\phi}, K_{3\phi}, ..., K_{m\phi}$ – некоторые произвольные, но фиксированные значения показателей качества.

Оптимизационная задача (9) решается последовательно для всех допустимых комбинаций значений $K_{2\phi}, K_{3\phi}, ..., K_{m\phi}$. При этом определяется некоторое подмножество Парето-оптимальных вариантов системы и соответствующая им многомерная рабочая поверхность в критериальном пространстве, которая при определенных условиях совпадает с Парето-оптимальной поверхностью. Следует отметить, что каждая точка Парето-оптимальной поверхности обладает свойством m-кратного согласованного по Парето оптимуму. Каждой точке этой поверхности соответствует потенциально достижимое значение одного из показателей k_{opt} при фиксированных (соответствующих этой точке) значениях остальных $(m-1)$ показателей качества. Парето-оптимальная поверхность может быть описана любым из следующих соотношений

$$k_{1opt} = f^1_{no}(k_2, k_3, ..., k_m), ..., k_{mopt} = f^m_{no}(k_1, k_2, ..., k_{m-1}), \quad (10)$$

которые представляют собой многомерные диаграммы обмена между показателями качества, показывающими, как потенциально достижимое значение соответствующего показателя зависит от потенциально достижимых значений других показателей качества.

Близким к методу рабочих характеристик при нахождении Парето-оптимальных вариантов систем является *метод главного критерия* [13, 16]. В этом методе исходная многокритериальная задача оптимизации сводится к задаче оптимизации одного из показателей (целевой функции), который объявляется главным. Остальные показатели качества (частные целевые функции) вводятся в раздел ограничений типа неравенства (их значения не должны превышать некоторых «пороговых значений»). Формализованная процедура поиска Парето-оптимальных вариантов систем аналогична (9) с той разницей, что ограничения на значения частных целевых функций имеют характер неравенств.

Аналогичный подход к нахождению Парето-оптимальных вариантов систем используется в известном *методе последовательных уступок*, в котором также выбирается один из показателей качества (целевая функция), а на значения остальных частных целевых функций вместо ограничений задаются некоторые фиксированные уступки. Таким образом, в указанных специальных методах нахождения Парето-оптимальных вариантов систем исходная многокритериальная задача оптимизации сводится к решению некоторого множества однокритериальных (скалярных) задач оптимизации при разных типах ограничений. Полученное при этом множество оптимальных решений используется при формировании подмножества Парето-оптимальных вариантов систем, оптимальных по совокупности показателей качества.

В практических задачах многокритериальной оптимизации формирование набора (совокупности) показателей качества систем и выбор главного показателя являются сложной проблемой. Поэтому вначале составляется по возможности полный перечень показателей качества, и лишь потом (в процессе оптимизации и анализа) исключаются из рассмотрения лишние (несущественные) показатели качества.

При оптимизации по сокращенной совокупности показателей качества необходимо учитывать, что полученные решения являются слабооптимальными по Парето и они же являются слабооптимальными по Парето при учете полной совокупности показателей качества [14].

Итак, понятие Парето-оптимальности является фундаментальным для теории и практики многокритериальной оптимизации систем. Полученная с использованием одного из методов Парето-оптимальная поверхность связывает потенциально достижимые значения показателей и представляет собой согласованный оптимум по Парето значений в общем случае зависимых и конкурирующих между собой показателей качества систем. Поэтому, определяя Парето-оптимальную поверхность в критериальном пространстве, тем самым находят многомерные потенциальные характеристики (МПХ) системы и связанные с ними многомерные диаграммы обмена (МДО).

По сравнению с широко используемыми одномерными потенциальными характеристиками системы МПХ предоставляют качественно новую информацию для анализа проектных решений, поскольку дают представление о потенциально возможных значениях совокупности показателей и потенциальных возможностях системы. Анализируя МДО можно выяснить, как необходимо изменить значения одних показателей качества системы ради улучшения других показателей, а также - как при этом следует изменить структуру и параметры соответствующих систем.

Следует отметить, что в зависимости от постановки задачи проектирования оптимальной системы существуют различные типы многокритериальных оптимизационных задач: дискретный выбор, параметрическая оптимизация, структурно-параметрическая оптимизация. В теории многокритериальной оптимизации хорошо разработаны методы решения первых двух типов задач. Решение третьего типа задач представляет наибольшую сложность. При этом для синтеза Парето-оптимальной структуры и нахождения оптимальных параметров системы следует производить оптимизацию совокупности функционалов $k_1(s,\vec{\beta}), k_2(s,\vec{\beta}), \ldots ,k_m(s,\vec{\beta})$.

Если найденное подмножество Парето-оптимальных вариантов системы оказалось узким, то в качестве оптимального варианта можно использовать любой из них. В таком случае можно считать, что отношение строгого предпочтения в пространстве допустимых вариантов системы $\succ$ совпадает с отношением предпочтения в критериальном пространстве оценок $\geq$ и поэтому $opt_{\succ}Y = P(Y)$ [14]. Однако часто на практике подмножество Парето-оптимальных оценок $P(Y)$ оказывается достаточно широким. Это означает, что отношения предпочтения $\succ$ и $\geq$ хотя и связаны аксиомой Парето, однако не совпадают. При этом справедливы включения $opt_{\succ}Y \subset P(Y)$, а также $opt_{\succ}\Phi \subset P_{\vec{k}}(\Phi_{\partial})$.

В ряде задач проектирования систем возникает необходимость сужения найденного подмножества Парето-оптимальных решений до единственного варианта системы с привлечением дополнительной информации об отношении предпочтения заказчика. Для этого могут быть использованы условные критерии предпочтения, основанные на разных методах сужения подмножества Парето. Однако следует заметить, что окончательный выбор единственного проектного решения должен производиться лишь в пределах найденного подмножества Парето-оптимальных систем, которое получено за счет исключения безусловно худших вариантов системы.

IV. Методы сужения подмножества Парето-оптимальных вариантов системы

Когда для последующих этапов проектирования должен быть выбран единственный вариант системы, возникает необходимость сужения подмножества Парето-оптимальных решений до единственного варианта системы с привлечением дополнительной информации об отношении предпочтения заказчика. Такая информация появляется в результате всестороннего анализа Парето-оптимальных вариантов системы, в частности, их структуры, параметров, многомерных рабочих характеристик, многомерных диаграмм обмена, относительной важности введенных показателей качества системы и пр. Полученная при этом дополнительная информация о предпочтениях используется для построения условного критерия предпочтения, основанного, в частности, на введении некоторой скалярной целевой функции, оптимизация которой приводит к выбору единственного варианта системы.

Для сужения множества Парето-оптимальных решений могут использоваться различные подходы, в частности, основанные на теории полезности, теории нечетких множеств, лексографическом сравнении [14, 16, 19]. Рассмотрим некоторые из распространенных методов сужения подмножества Парето.

При использовании *теории полезности* выбирается скалярная целевая функция в виде аддитивной, мультипликативной, полилинейной функции полезности, которая в частном случае может иметь вид [14]

$$F(k_1, k_2, ..., k_m) = \sum_{j=1}^{m} c_j f_j(k_j), \qquad (11)$$

где c_j – шкалирующие коэффициенты; $f_j(k_j)$ – некоторые одномерные функции полезности, являющиеся оценками полезности варианта системы ϕ по показателю качества системы k_j.

Использование *теории нечетких множеств* основано на том, что из-за априорной неопределенности относительно предпочтения заказчика понятие "наилучший вариант системы" нельзя определить точно. Можно считать, что это понятие представляет собой нечеткое множество. При этом для оценивания эффективности системы могут быть использованы основные положения теории нечетких множеств. В соответствии с ней множество оценок эффективности вариантов системы будет нечетким множеством $K = \{(k_1, k_2, ..., k_m), \xi_{\vec{k}}(k_1, k_2, ..., k_m)\}$, которое является множеством подчиненных оценок, ранжированных по значениям функции принадлежности.

Такая запись вектора показателей качества системы обладает высокой информативностью, т.к. дает представление о физическом смысле показателей качества, их конкретных значениях и "ценности" относительно наилучших (экстремальных) значений $\xi_{\vec{k}}(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Наиболее общая форма функции принадлежности, интерпретированная в терминах теории нечетких множеств, имеет вид [19]

$$\xi_{\vec{k}}(k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{1}{m}\left\{\sum_{j=1}^{m}\left[\xi_{k_j}(k_j)\right]^{\beta}\right\}^{\frac{1}{\beta}}. \tag{12}$$

Достоинством такой формы представления функции принадлежности является то, что в зависимости от значения параметра β реализуется широкий класс функций от линейной аддитивной формы при $\beta = 1$ до сугубо нелинейных зависимостей при $\beta \to \infty$.

Нахождение экстремального значения скалярной целевой функции (11) или (12) позволяет выбрать соответствующий ему единственный вариант системы из подмножества Парето-оптимальных проектных решений.

Лексографический подход к выбору единственного проектного решения из подмножества Парето может быть использован тогда, когда желательно получить по возможности большее значение одного из показателей качества, например k_1, даже за счет "потерь" по остальным показателям [16]. Это соответствует ситуации, когда весь набор показателей качества $k_1, k_2, ..., k_m$ строго упорядочен по важности и при сравнении проектных решений используется лексико-графическое отношение $\vec{k}' \underset{\succ}{lex} \vec{k}''$ соответствующих оценок показателей качества для вариантов систем ϕ' и ϕ''. При выполнении соотношения $\vec{k}' \underset{\succ}{lex} \vec{k}''$ говорят, что вектор $\vec{k}'$ лексико-графически больше, чем вектор $\vec{k}''$. При $m = 1$ лексико-графическое отношение совпадает с отношением > на подмножестве вещественных чисел.

Если в качестве отношения строгого предпочтения используют лексико-графическое отношение, то это означает, что из пары оценок показателей качества (и соответствующих им проектных решений) предпочтительнее та оценка, у которой первая компонента вектора $\vec{k}'$ (оценка показателя качества k_1) больше, независимо от соотношений межу остальными компонентами вектора оценок $\vec{k}$. Когда первые компоненты двух оценок одинаковы, то предпочтительнее оценка (и соответствующее проектное решение), имеющая большую вторую компоненту; остальные компоненты данной оценки могут при этом "значительно уступать" соответствующим вторым компонентам оценки и т.д. В определении лексико-графического отношения важную роль играет порядок перечисления показателей качества.

Выводы

Рассмотрена методология многокритериальной оптимизации систем как взаимосвязанная совокупность методов формирования структурированного множества допустимых вариантов систем; отображения полученного множества в пространстве векторных оценок, нахождения подмножества оптимальных решений по безусловному критерию предпочтения Парето; выбора единственного варианта системы с использованием условного критерия предпочтения.

Изложены особенности ординалистического и кардиналистического подхода к заданию понятия оптимальности (выбору критерия оптимальности) системы. Рассмотрен морфологический метод формирования исходного множества вариантов системы, которое определяется как совокупность допустимых комбинаций вариантов построения подсистем. Приведены особенности разных методов выбора подмножества Парето-оптимальных вариантов системы, в частности, метод дискретного выбора, весовой метод, метод рабочих характеристик, метод главного критерия, метод последовательных уступок. Рассмотрены разные подходы к сужению подмножества Парето до единственного проектного решения, основанные на теории полезности, теории нечетких множеств, лексографическом сравнении вариантов системы.

Список литературы:

1. *Семенов Ю.В.* Проектирование сетей связи следующего поколения. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 240 с.
2. *Вишневский В.М.* Теоретические основы проектирования компьютерных систем. – М.: Техносфера, 2003. – 512 с.
3. *Дымарский Я.С., Крутякова Н.П., Яновский Г.Г.* Управление сетями связи: принципы, протоколы, прикладные задачи. – М.: Эко-Трендз, 2003. – 384 с.
4. *Назаров А.Н.* Модели и методы расчета структурно-сетевых параметров сетей ATM. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 256 с.
5. *Бондаренко М.Ф., Белоус Н.В., Руткас А.Г.* Дискретная математика. – Харьков: «Компания СМИТ», 2002 – 476 с.
6. *Steuer R.E.* Multiple criteria optimization: theory, computation and application. – New York: Wiley, 1986. – 546 p.
7. *Lee H., Shi Y., Nazem S.M., Kang S.Y., Park T.H., Sohn M.H.* Multicriteria hub decision making for rural area telecommunication networks // European Journal of Operational Research. – 2001. – No. 133. – P. 483-495.
8. *Granat J., Wierzbicki A.P.* Multicriteria analysis in telecommunications // Proceedings of the 37th Hawaii International Conference on System Sciences. – 2004. – P. 1-6.
9. *Grosan C., Abraham A., Hassainen A.* Designing resilient networks using multicriteria metaheuristics // Telecommunation System. – 2009. – №40. – P. 75-88.

10. *Гуткин Л.С.* Оптимизация радиоэлектронных устройств по совокупности показателей качества. – М.: Сов. радио, 1975. – 358 с.
11. *Брахтман Т.Р.* Многокритериальность и выбор альтернатив в технике. – М.: Сов. радио, 1984. – 326 с.
12. *Березовский Б.А., Барышников Ю.М., Борзенко В.И., Кепнер Л.М.* Многокритериальная оптимизация. Математические аспекты. – М.: Наука, 1986. – 128 с.
13. *Подиновский В.В., Ногин Д.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
14. *Ногин Д.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И.* Основы теории оптимизации. – М.: Высшая школа, 1986. – 379 с.
15. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. – М.: Наука, 1986. – 221 с.
16. *Ногин В.Д.* Принятие решений в многокритериальной среде. – СПб.: Физматлит, 2002. – 176 с.
17. *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. – СПб.: БХВ-Петербург, 2002. – 416 с.
18. *Безрук В.М.* Векторна оптимізація та статистичне моделювання в автоматизованому проектуванні систем зв'язку. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 164 с.
19. *Обезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – К.: Наукова думка, 2002. – 165 с.