



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С КОНКУРЕНТНЫМ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

*Альрефаи В.А., Наумейко И.В.*

*Харьковский национальный университет радиоэлектроники*

За последние 30 лет основные результаты в динамике экономических систем получены при рассмотрении их нелинейных моделей. В частности, для кейнсианской экономической модели [1]  $n$  взаимодействующих субъектов, описанной в [2] парами уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{dY_i}{dt} = A_i(I_i - S_i) + Ex_i - Im_i, \\ \frac{dR_i}{dt} = B_i \left( L_i - \frac{M_i}{P_i} \right), \end{cases} \quad i=1 \dots n, \quad (1)$$

где все параметры и переменные  $i$ -й экономики положительны.

В работе рассматривается поведение такой динамической системы при различных взаимодействиях подсистем. Численные эксперименты с исходной и преобразованной системами показывают, что даже малое взаимодействие может приводить к нарушению устойчивости и даже к хаотической динамике системы.

Предполагая существование положительного равновесия  $(Y_0, R_0)$ , систему в локальной области пространства вблизи равновесия и наличие циклов в этой модели, первым рассмотрел Торре[2]. Международную торговлю в некотором смысле можно рассматривать как возмущения изолированных экономик [3]. Этот подход предложен Лоренцем. Расширенная система (1) состоит из  $n$  связанных ограниченных осцилляторов. Как показано Ньюхаусом, Рюэлем и Такенсом, возмущение движения по трехмерным торам может привести к странному аттрактору [3,4]. Таким образом, в международной модели было установлено существование странных аттракторов. Все ранее сказанное относится к нелинейным системам.

В настоящей работе показано, что аналогичные явления происходят и когда система (1) линейна с постоянными коэффициентами и решение для нее ищется в виде  $e^{\lambda t} U_i$ . Если отношение периодов иррационально, то движение – хаотическое, при этом легко видеть, что две точки, в начальный момент времени лежащие рядом, с течением времени могут оказаться сколь угодно далеко [5].

Имеем периодические, либо непериодические движения, которые в ограниченной области, сходятся к аттрактору, не являющемуся точкой или циклом. Лоренц показал [2], что существование хаотических траекторий в



соответствующих моделях можно установить численным моделированием, что и сделано в данной работе средствами пакета Mathematica.

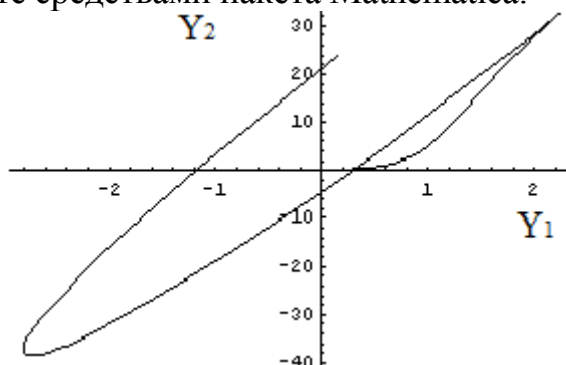


Рис. 1 – Взаимные колебания и рост национальных доходов в связанных торговлей экономиках

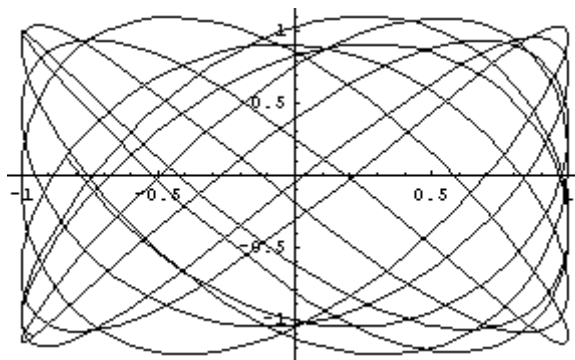


Рис. 2 – Хаотические колебания национальных доходов

Промоделированы основные случаи нарушения устойчивости экономик при введении торговых связей. Полученные результаты проиллюстрированы на проекциях 4-х мерного фазового пространства.

1. Тарасевич Л.С., Гальперин В.М., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика / Общая редакция Л.С. Тарасевича. – СПб.: Издательство СПбГУЭФ, 1999. – 654 с.

2. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и переменны в нелинейной экономической теории. – М.: Мир, 1999. – 335с.

3. Малинецкий Г.Г. Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент. / Введение в нелинейную динамику. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 256с.

4. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1987. – 304с.

5. AlRefai W.A. Mathematical model of chaos, caused by international trade / Технологический аудит и резервы производства, Том 5, № 4(13) 2013. – С. 6-7.