

вовала такая базисная система функций $\{\alpha_i | i \in J\}$, $\alpha \in L^2[1, 0]$, что для всех $x, y \in V$ равенства (2) и (3) являются эквивалентными. При этом, если $\text{aff } V = L^2[1, 0]$, то предикат Φ n -мерный линейный тогда и только тогда, когда множество J состоит из n элементов.

Доказательство. Необходимость очевидна – в качестве системы $\{\alpha_i | i \in J\}$ можно взять ортонормированную систему, фигурирующую в определении.

Проверим достаточность. Пусть система $\{\alpha_i | i \in J\}$ удовлетворяет условиям теоремы, $\{\beta_i | i \in J\}$ – двойственная система. Определим оператор B равенством

$$Bx = \sum_{i \in J} \alpha_i(x) \beta_i. \tag{6}$$

Поскольку $\{\alpha_i | i \in J\}$ – базисная система, $\text{Im } B$ является замкнутым множеством. Очевидно, $Bx = By$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i \in J$. Поэтому эквивалентность равенств (2) и (3) означает справедливость формулы (4) [1]. Тогда предикат Φ является линейным в силу леммы 1 [1]. Если множество J состоит из n элементов, предикат Φ является n -мерным в силу леммы 8 [1].

Основной в настоящей статье является теорема 2.

Теорема 2. Пусть предикат Φ определен на квадрате выпуклого множества V с замкнутой аффинной оболочкой. Для того чтобы существовала базисная система функций $\{\alpha_k | k \in J\}$, $\alpha_k \in L^2[1, 0]$ такая, что для всех $x, y \in V$ равенство $\Phi(x, y) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда

$$\int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt = \int_0^1 \alpha_k(t) y(t) dt, \quad k \in J,$$

необходимо и достаточно, чтобы предикат Φ удовлетворял следующим условиям:

г) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1;$$

д) если последовательность $\{x_j\}_{j=1}^\infty$ сходится к $x \in V$, последовательность $\{y_j\}_{j=1}^\infty$ сходится к $y \in V$ и $\Phi(x_j, y_j) = 1$, то $\Phi(x, y) = 1$.

Этот результат является комбинацией теорем 1 и 2.

В случае, когда множество V открыто, условие д) можно ослабить до формы, фигурирующей в теореме 1. Другие варианты условий г) и д) приведены в комментариях к теореме 1.

Будем говорить, что линейно независимая система функций (не обязательно ортогональная) $\{\alpha_k(t) | k \in J\}$ определяет линейный предикат Φ , если равенства (2) и (3) эквивалентны.

Следствие 1. Для того чтобы две линейно-независимые системы функций $\{\alpha_i(t)\}_{i=1}^n$ и $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ опреде-

ляли один и тот же n -мерный линейный предикат Φ , на квадрате выпуклого множества с замкнутой аффинной оболочкой, необходимо и достаточно, чтобы существовала невырожденная матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

такая, что почти при всех $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} u_1(t) &= a_{11}\alpha_1(t) + a_{12}\alpha_2(t) + \dots + a_{1n}\alpha_n(t), \\ u_2(t) &= a_{21}\alpha_1(t) + a_{22}\alpha_2(t) + \dots + a_{2n}\alpha_n(t), \\ &\dots \\ u_n(t) &= a_{n1}\alpha_1(t) + a_{n2}\alpha_2(t) + \dots + a_{nn}\alpha_n(t). \end{aligned} \tag{8}$$

Это утверждение вытекает из следствия 11 ([1], п. 8).

Предположим теперь, что заданы два линейных предиката Φ_1 и Φ_2 . Будем говорить, что предикат Φ_2 грубее, чем предикат Φ_1 , если для всех $x, y \in V$ из условия

$$\Phi_1(x, y) = 1 \tag{9}$$

вытекает, что

$$\Phi_2(x, y) = 1, \tag{10}$$

и существуют такие $x_0, y_0 \in V$, для которых

$$\Phi_1(x_0, y_0) = 0, \quad \Phi_2(x_0, y_0) = 1. \tag{11}$$

Следствие 2. Пусть V – выпуклое множество, $\text{aff } V = L^2[1, 0]$. Пусть, далее, система $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}$ определяет предикат Φ_1 на $V \times V$, система $\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}$ определяет предикат Φ_2 на $V \times V$. Для того чтобы предикат Φ_2 был грубее предиката Φ_1 , необходимо и достаточно, чтобы было $n_2 < n_1$ и нашлась такая прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n_1} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n_21} & c_{n_22} & \dots & c_{n_2n_1} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

что

$$\begin{aligned} \alpha''_1 &= c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2 + \dots + c_{1n_1}\alpha'_{n_1}, \\ \alpha''_2 &= c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 + \dots + c_{2n_1}\alpha'_{n_1}, \\ &\dots \\ \alpha''_{n_2} &= c_{n_21}\alpha'_1 + c_{n_22}\alpha'_2 + \dots + c_{n_2n_1}\alpha'_{n_1}. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Пусть P_1 – ортопроектор, порождающий предикат Φ_1 ; P_2 – ортопроектор, порождающий предикат Φ_2 . В соответствии с формулой (3) [1] предикат Φ_2 грубее предиката Φ_1 тогда и только тогда, когда для $x, y \in V$ из равенства $P_1(x - y) = 0$ вытекает, что $P_2(x - y) = 0$ и существуют x_0, y_0 такие, что $P_1(x_0 - y_0) \neq 0$, $P_2(x_0 - y_0) = 0$.

Эти равенства и неравенство являются другой формой записи соотношений (9) – (11). Поскольку $\text{aff } V = L^2[1, 0]$, любой элемент $z \in L^2[1, 0]$ может быть записан в виде $z = \beta(x - y)$, $x, y \in V$. Поэтому тот факт, что Φ_2 грубее, чем Φ_1 , означает, что для любого $z \in L^2[1, 0]$ равенство $P_1 z = 0$ влечет равенство $P_2 z = 0$ и существует $z_0 \in L^2[1, 0]$ такой, что $P_1 z_0 \neq 0$, $P_2 z_0 = 0$. Другими словами, это значит, что $\text{Ker } P_1 \subset \text{Ker } P_2$ и это включение является строгим. Пользуясь разложением (9) [1], это утверждение можно переписать в виде $\text{Im } P_1 \supset \text{Im } P_2$, причем включение является строгим. Вместе с (5) из [1] это дает

$$\begin{aligned} L(\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}) &\supset L(\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}), \\ L(\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}) &\neq L(\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}). \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку каждая из систем $\{\alpha'_k\}_{k=1}^{n_1}$ и $\{\alpha''_k\}_{k=1}^{n_2}$ – линейно независимая, соотношения (14) означают, что $n_2 < n_1$ и существует такая матрица (12), что справедливо (13).

Следствие 2 доказано.

Обсудим вопрос о процедуре практической проверки линейной независимости функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. Такая система линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима система функций $\{\alpha_k(t)\}_{k=1}^n$, $0 \leq t \leq 1$, связанная с ней формулой Рисса. На практике система функций $\{\alpha_k(t)\}_{k=1}^n$ не может быть известна в точности. Обычно известными являются некоторые конечные приближения $\tilde{\alpha}_k = \{\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \dots, \alpha_{kp}\}$ функций $\alpha_k(t)$. Разумеется, чтобы точность аппроксимации была приемлемой, необходимо, чтобы $p \geq n$. Таким образом, на практике вопрос о линейной независимости системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ заменяется вопросом о линейной независимости системы $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^n$. Оценим погрешность аппроксимации. Положим для $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$

$$Ds = \sum_{k=1}^n s_k \alpha_k, \quad \tilde{D}s = \sum_{k=1}^n s_k \tilde{\alpha}_k.$$

Мерой линейной независимости систем $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{\tilde{\alpha}_k\}_{k=1}^n$ могут служить величины

$$\mu = \min_{s \neq 0} \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} \quad \text{и} \quad \tilde{\mu} = \min_{s \neq 0} \frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2},$$

являющиеся наименьшими собственными значениями матриц Грама $\Gamma(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\Gamma(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_n)$ соответственно. Имеем

$$\left| \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} - \frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2} \right| = \frac{\sum_{k,j=1}^n s_k s_j ((\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j))}{\sum_{i=1}^n s_i^2}. \quad (15)$$

Для любой симметричной матрицы $(b_{ij})_{i,j=1}^n$ имеет место неравенство

$$\max_{k,j=1}^n \frac{b_{kj} s_k s_j}{\sum_{i=1}^n s_i^2} \leq n \cdot \max_{k,j} |b_{kj}|.$$

Поэтому из (15) можно заключить, что

$$\left| \frac{\|Ds\|^2}{\|s\|^2} - \frac{\|\tilde{D}s\|^2}{\|s\|^2} \right| = m \max_{k,j} |(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)|.$$

Но тогда и

$$|\mu - \tilde{\mu}| \leq n \cdot \max_{k,j} |(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)|. \quad (16)$$

Пусть известна верхняя оценка для точности конечномерной аппроксимации:

$$\|(\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)\| \leq \varepsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} |(\alpha_k, \alpha_j) - (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j)| &= |(\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j) + \\ &+ (\tilde{\alpha}_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j) + (\tilde{\alpha}_k - \alpha_k, \tilde{\alpha}_j - \alpha_j)| \leq 2c\varepsilon + \varepsilon^2, \end{aligned}$$

где

$$c = \max_{1 \leq k \leq n} |\tilde{\alpha}_k|.$$

Тогда из (16) следует, что

$$|\mu - \tilde{\mu}| \leq n / 2(\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Итак, если после вычисления величины μ (эта величина может быть найдена любым методом отыскания наименьшего собственного значения симметрической неотрицательно определенной матрицы) окажется, что $\tilde{\mu} > n / 2(\varepsilon + \varepsilon^2)$, то можно гарантировать линейную независимость системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$. В противном случае есть основания подозревать линейную зависимость этой системы. Во втором случае для дальнейшего уточнения можно попытаться экспериментально найти лучшую конечномерную аппроксимацию и исследовать вопрос для нее. Если окажется, что при уточненном исследовании $\tilde{\mu} \leq n / 2(\varepsilon + \varepsilon^2)$, а величина ε достаточно мала, это означает, что если система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и не является вырожденной, то она настолько близка к вырожденной, что с практической точки зрения ее можно считать таковой.

Для более детального изучения n -мерных линейных предикатов рассмотрим отдельно основные интересующие нас случаи множества V .

2. Предикаты на всем пространстве

Теорема 3. Пусть предикат Φ определен на декартовом квадрате пространства $L^2[1, 0]$ и удовлетворяет условиям:

а) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi(x + x', y + y') = 1;$$

б) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$, что для каждого $x \in L^2[1, 0]$ есть единственный набор чисел $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$, удовлетворяющих условию

$$\begin{aligned}
 g_1 &= d_{11}e_1 + d_{12}e_2 + \dots + d_{1n}e_n, \\
 g_2 &= d_{21}e_1 + d_{22}e_2 + \dots + d_{2n}e_n, \\
 &\dots\dots\dots \\
 g_n &= d_{n1}e_1 + d_{n2}e_2 + \dots + d_{nn}e_n,
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

аналогичной (27), с той же матрицей (28) – обратной сопряженной матрице (7). Действительно, пусть $\{g_k\}_{k=1}^n$ – система, определяемая равенствами (30). Положим

$$\xi_j = g_j - v_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Тогда из (27), (30) и (22)

$$\xi_j = \sum_{k=1}^n d_{jk}(e_k - \beta_k) = \sum_{k=1}^n d_{jk}\gamma_k.$$

Поэтому из (23) получаем

$$(\xi_j, \alpha_i) = \sum_{k=1}^n d_{jk}(\gamma_k, \alpha_i) = 0.$$

Вместе с (8) это дает

$$(\xi_j, u_s) = (\xi_j, \sum_{i=1}^n a_{si}\alpha_i) = \sum_{i=1}^n a_{si}(\xi_j, \alpha_i) = 0.$$

Таким образом, система $\{u_k\}_{k=1}^n$ определяет предикат Φ ; $\{v_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система $g_k = v_k + \xi_k$ ($k=1, 2, \dots, n$) $(\xi_k, u_j) = 0$ ($i, j=1, 2, \dots, n$). Тогда, согласно следствию 4, пара систем $\{u_k\}_{k=1}^n$, $\{g_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ , что и требовалось доказать.

3. Предикаты на конусе

Теорема 4. Пусть предикат Φ определен в декартовом квадрате воспроизводящего конуса K пространства $L^2[0, 1]$ и удовлетворяет условиям:

а) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi(x + y', y + x') = 1;$$

б) существует такой набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, что для каждого $x \in K$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^n \subset K$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{1, 2, \dots, n\}$ такие, что

$$\Phi(x + \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{i \in I} \alpha_i e_i) = 1, \quad \alpha_i > 0 \text{ при } i \in I; \tag{31}$$

в) если $x, y \in K$, $\gamma > 0$ и при некотором i

$$\Phi(x + \gamma e_i, y + \gamma e_i) = 1, \quad \Phi(x, y) = 1;$$

г) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны на K .

Тогда существуют такие векторы $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n \subset L^2[0, 1]$, что

$$\alpha_k(x) = \int_0^1 \alpha_k(t) X(t) dt, \quad x \in K, \tag{32}$$

системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{e_k\}_{k=1}^n$ являются линейно независимыми и пара систем $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату (понятие присоединенности было введено в п. 5 из [1]).

Это утверждение вытекает из теоремы 1 и леммы 10 из [1]. Обратное утверждение также верно. Если $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – пара систем, присоединенная к предикату Φ , то для предиката Φ выполняются условия г – ж. Этот факт также вытекает из комбинации теоремы 1 и леммы 10 из [1].

Следствие 5. Для того чтобы пара $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$, $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ была присоединена к n -мерному предикату Φ , определенному на квадрате воспроизводящего конуса K , необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам

$$\int_0^1 \alpha_k(t)x(t)dt = \int_0^1 \alpha_k(t)e_k(t)dt, \quad k=1, 2, \dots, n, \tag{33}$$

(то есть система $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ определяет предикат Φ) и чтобы выполнялось равенство

$$\int_0^1 \alpha_i(t)e_i(t)dt = \delta_{ij}, \quad i, j=1, 2, \dots, n. \tag{34}$$

Это утверждение вытекает из следствия 13 из [1] и теоремы Рисса.

В предыдущем параграфе при изучении предикатов, определенных на квадрате всего пространства, мы видели, что для любой системы линейно независимых функционалов $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, определяющих предикат Φ , существует система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n$ такая, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ . В рассматриваемом сейчас случае это уже не так. Это видно из простого примера. Пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in L^2[0, 1]$, $(\alpha_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$ ($i, j=1, 2$), $s_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $s_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2$, $K = \{x | (s_1, x) \geq 0, (s_2, x) \geq 0\}$, предикат Φ определен условием $\Phi(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$, $i=1, 2$. Тогда не существует векторов $e_1, e_2 \in K$, удовлетворяющих условию $(\alpha_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($i, j=1, 2$).

Следствие 6. Пусть Φ – n -мерный линейный предикат на воспроизводящем конусе K ; $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ – какая-либо линейно независимая система функционалов, определяющая предикат Φ , $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ – двойственная система. Для того чтобы существовала система векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset K$ такая, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ , необходимо и достаточно, чтобы существовали такие векторы γ_k ($k=1, 2, \dots, n$), что

$$\beta_k + \gamma_k \in K, \quad k=1, 2, \dots, n \tag{35}$$

и

$$\int_0^1 \gamma_i(t)\alpha_j(t)dt = 0, \quad i, j=1, 2, \dots, n. \tag{36}$$

Доказательство. Пусть система $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ с указанными свойствами существует. Положим $\beta_k - \gamma_k \in K$, $k=1, 2, \dots, n$. Поскольку система $\{\beta_k\}_{k=1}^n$ биортогональна к системе $\{\alpha_k\}$, из (6) вытекает (34). Тогда из следствия 5 вытекает, что пара $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, $\{e_k\}_{k=1}^n$ присоединена к предикату Φ . Положим $\gamma_k = e_k - \beta_k \in K$, $k=1, 2, \dots, n$. Условие

предиката на квадрате всего пространства. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n, \{e_k\}_{k=1}^n$ — одна, а $\{u_k\}_{k=1}^n, \{g_k\}_{k=1}^n$ — другая пара систем, присоединенных к предикату Φ , определенному на $K \times K$. Если системы $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ и $\{g_k\}_{k=1}^n$ известны, то система $\{u_k\}_{k=1}^n$ может быть найдена по формулам (8) с матрицей (7), обратной матрице (25). То есть, в этом случае ситуация такая же, как и в п. 2. Это, однако, не так по отношению к следующему вопросу. Пусть $\{\alpha_k\}_{k=1}^n, \{e_k\}_{k=1}^n$ — пара, присоединенная к предикату Φ ; $\{u_k\}_{k=1}^n$ — какая-либо система функционалов, определяющая этот предикат, система $\{g_k\}_{k=1}^n$ вычислена по формуле (30) с матрицей (28) — обратной к сопряженной матрице (7). В случае конуса пара $\{u_k\}_{k=1}^n, \{g_k\}_{k=1}^n$ уже не обязательно присоединена к Φ , поскольку может не выполняться условие $\{g_k\}_{k=1}^n \subset K$.

4. Предикаты на выпуклом множестве

Теорема 5. Пусть предикат Φ определен на декартовом квадрате открытого выпуклого множества V и удовлетворяет следующим условиям:

г) если $\Phi(x, y) = 1$ и $\Phi(x', y') = 1$, то

$$\Phi\left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right) = 1;$$

д) существуют такие точки $\{e_i\}_{i=1}^{n+1} \subset V$, что для каждого $x \in V$ есть единственный набор неотрицательных чисел $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ и единственное подмножество $I(x) \subset \{i = 1, 2, \dots, n+1\}$ такие, что

$$\Phi\left(\alpha_0 x + \sum_{i \in I} \alpha_i e_i, \sum_{i \in I} \alpha_i e_i\right) = 1; \quad (42)$$

$$\alpha_0 > 0; \alpha_i > 0; i \in I, \alpha_0 + \sum_{i \in I} \alpha_i = 1; \sum_{i \notin I} \alpha_i = 0; \quad (43)$$

е) функции $\alpha_i(x)$ непрерывны.

Тогда существуют такие векторы $\{\beta_k\}_{k=1}^n \subset L^2[0, 1]$ и такие числа $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$, что

$$I(x) = \left\{ \frac{i}{\beta_i(x)} < 0 \right\}, \quad \alpha_0(x) = \left(\sum_{i \in I} \beta_i(x) \right)^{-1},$$

$$\alpha_i(x) = \alpha_0(x) |\beta_i(x)|, \quad (44)$$

где

$$\beta_i(x) = \int_0^1 b_i(t)x(t)dt + c_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (45)$$

система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ — аффинно независимая,

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1, \quad (46)$$

пара систем точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ и однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{n+1}, I(x)$ присоединены к предикату Φ .

Действительно, при выполнении условий г — е, согласно теореме 5 (см. п. 5 из [2]), предикат Φ является n -мерным линейным. Тогда из леммы 11 (см. п. 8 из [1]) следует, что $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ — однородные координаты, система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ — аффинно-независи-

мая и пара $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ . Из (62), (59) (см. [2]) и теоремы Рисса вытекают равенства (44), (45). Условие

$$\sum_{i=1}^{n+1} \beta_i = 1, \quad x \in V \quad (47)$$

в совокупности с условием разрешимости системы (61) из [2] при любых правых частях, для которых $s_1 + \dots + s_{n+1} = 1$, эквивалентно условию аффинной независимости точек $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ в совокупности с равенствами (46).

Верно и обратное утверждение. Если $\{e_k\}_{k=1}^{n+1} \in V$ и $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ — аффинно-независимые системы: $\{c_k\}_{k=1}^{n+1}$ — числа, выполняются равенства (46), отображения $I(x)$ и $\alpha_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots, n+1$) вычислены по формулам (44), (45) и пара $\{c_k\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ , то предикат Φ удовлетворяет условиям г — е. Этот факт также следует из комбинации теоремы 5 и леммы 11 из (см. п. 8 из [1]).

Если множество V не является открытым, но $\text{aff}V = L^2[0, 1]$, теорема 2 будет справедлива при замене условий г — е на условия г — ж теоремы 4.

Следствие 7. Для того чтобы пара однородных координат $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и аффинно-независимых точек $\{e_k\}_{k=1}^{n+1} \in V$ была присоединена к n -мерному линейному предикату Φ , определенному на квадрате выпуклого множества V с $\text{aff}V = L^2[0, 1]$, необходимо и достаточно, чтобы равенство $\Phi(x, y) = 1$ было эквивалентно равенствам

$$\int_0^1 b_k(t)x(t)dt = \int_0^1 b_k(t)(t)dt,$$

$$k = 1, 2, \dots, n+1, x, y \in V \quad (48)$$

и чтобы выполнялись равенства

$$\int_0^1 b_i(t)e_j(t)dt = -c_i + \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n+1. \quad (49)$$

Этот результат вытекает из следствия 14 (см. п. 8 из [1]).

Так же, как и в случае конуса, в рассматриваемой ситуации, вообще говоря, нельзя утверждать, что для любой системы $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$, определяющей предикат Φ , существует система $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ такая, что пара $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ присоединена к предикату Φ . Положительный ответ на этот вопрос означает, что каждая из систем равенств — включений ($i, j = 1, 2, \dots, n+1$) $x \in V$

$$\int_0^1 b_1(t)x(t)dt = -c_1$$

.....

$$\int_0^1 b_{j-1}(t)x(t)dt = -c_{j-1}$$

.....

$$\int_0^1 b_j(t)x(t)dt = -c_j + 1 \quad (50)$$

$$e_i = x_0 + \sum_{i \neq j} (c_i + (b_i, x_0))g_j.$$

Рассмотрим теперь частный случай, когда множество является пересечением положительного конуса и шара $\|x - x^0\| \leq R$. В этом случае (50) можно переписать в виде

$$x \geq 0, \|x - x^0\| \leq R, (b_i, x) = -c_i, i \neq j.$$

Поставим в соответствие этой задаче вспомогательную задачу:

$$\frac{1}{2} \|x - x^0\|^2 \rightarrow \min, x \geq 0, (b_i, x) = -c_i, i \neq j. \quad (55)$$

Пусть μ – минимальное значение целевой функции в этой задаче. Тогда, как и в рассматриваемой ранее ситуации, если $\mu > \frac{1}{2}R^2$, то система (50) не имеет решения, если $\mu \leq \frac{1}{2}R^2$, то решение задачи (55) является решением системы (50). Конечномерная аппроксимация задачи (55) соответствующая одномерной сетке, описанной в предыдущем параграфе, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p (x_s - x_s^0)^2 \rightarrow \min, \\ b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{ip}x_p + c_i = 0, i \neq j, \quad (56) \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_p \geq 0, \end{aligned}$$

где (x_1, \dots, x_p) , (x_1^0, \dots, x_p^0) , (b_{i1}, \dots, b_{ip}) – конечномерные приближения векторов x, x^0 и b соответственно. Задача (56) является задачей квадратичного программирования. Для ее решения существуют конечные методы.

Обсудим теперь вопрос о замене координат. Пусть $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ и $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$ – одна, а $\{u_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $J(x)$ и $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ – другая система однородных координат и точек, присоединенные к предикату Φ . Предположим, что системы $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$, $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ известны. Требуется найти систему $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $J(x)$. Оказывается, что эта задача имеет однозначное решение даже при отсутствии информации о системе $\{e_k\}_{k=1}^{n+1}$.

Положим, как и ранее,

$$\beta_i(x) = \begin{cases} -\alpha_i(x)/\alpha_0(x), i \in I(x), \\ \alpha_i(x)/\alpha_0(x), i \notin I(x). \end{cases} \quad (57)$$

Аналогичным образом определим

$$\lambda_i = \begin{cases} -u_i(x)/u_0(x), i \in J(x), \\ u_i(x)/u_0(x), i \notin J(x). \end{cases} \quad (58)$$

Знание системы $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$, $I(x)$ равносильно знанию системы $\{\beta_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$. Вычисления в одну сторону проводятся по формулам (57), в другую – по формулам (44). Аналогичным образом обстоит дело с системой $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$. Имеем

$$\beta_i(x) = (b_i, x) + c_i, \lambda_i(x) = (l_i, x) + s_i,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} b_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1} l_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 0, \sum_{i=1}^{n+1} s_i = 1. \quad (59)$$

Поскольку каждая из однородных координат определяет один и тот же предикат Φ , то при всех $x, y \in V$ равенства $\beta_i(x) = \beta_i(y)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, выполняются тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\lambda_j(x) = \lambda_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, n+1$. В терминах векторов $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ и $\{l_k\}_{k=1}^{n+1}$ этот факт означает, что при всех $x, y \in V$ равенства $(b_i, x - y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, выполняются тогда и только тогда, когда $(l_i, x - y) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n+1$. Поскольку $\text{aff } V = L^2[0, 1]$, отсюда вытекает, что

$$L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{l_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (60)$$

Проверим, что

$$\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (61)$$

Включение $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) \subset L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$ очевидно. Проверим обратное включение. Пусть $x \in L(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Тогда существуют такие числа $\{\gamma_k\}_{k=1}^{n+1}$, что

$$x = \gamma_1 b_1 + \dots + \gamma_{n+1} b_{n+1}. \quad (62)$$

Из третьего равенства (59) при любом γ следует, что

$$0 = \gamma b_1 + \dots + \gamma b_{n+1}.$$

Вместе с (62) это дает

$$x = t_1 b_1 + \dots + t_{n+1} b_{n+1}, t_i = \gamma_i + \gamma. \quad (63)$$

Положим

$$\gamma = \frac{1}{n+1} (1 - \gamma_1 - \gamma_2 - \dots - \gamma_{n+1}).$$

Тогда $t_1 + t_2 + \dots + t_{n+1} = 1$ и из (63) следует, что $x \in \text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Равенство (61) доказано. Аналогичное равенство справедливо для системы $\{l_k\}_{k=1}^{n+1}$. Поэтому из (61) следует, что $\text{aff}(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = \text{aff}(\{l_k\}_{k=1}^{n+1})$. Но тогда и

$$T(\{b_k\}_{k=1}^{n+1}) = T(\{l_k\}_{k=1}^{n+1}). \quad (64)$$

Поскольку система точек $\{b_k\}_{k=1}^{n+1}$ аффинно-независима, то система векторов $\{b_k - b_{n+1}\}_{k=1}^n$ является базисом в $T(\{b_k\}_{k=1}^{n+1})$. Аналогичным образом обстоит дело с системой $\{l_k - l_{n+1}\}_{k=1}^n$. Поэтому из (64) следует, что системы $\{b_k - b_{n+1}\}_{k=1}^n$ и $\{l_k - l_{n+1}\}_{k=1}^n$ являются базисами одного и того же подпространства. Значит, существует невырожденная матрица

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \quad (65)$$

такая, что

$$l_i - l_{n+1} = \sum_{j=1}^n g_{ij} (b_j - b_{n+1}). \quad (66)$$

Для любого вектора x , очевидно, выполняются равенства $(l_i, x) - (l_{n+1}, x) = \lambda_i(x) - \lambda_{n+1}(x)$ и

$(b_j, x) - (b_{n+1}, x) = \beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)$. Поэтому из (66) следует, что при всех x будет

$$\lambda_i(x) - \lambda_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^n g_{ij} (\beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)). \quad (67)$$

Найдем матрицу (65). При $x = g_k, k = 1, 2, \dots, n$ из (67) следует, что

$$\lambda_i(g_k) - \lambda_{n+1}(g_k) = \sum_{j=1}^n g_{ij} (\beta_j(g_k) - \beta_{n+1}(g_k)). \quad (68)$$

Но согласно следствию 7 $\lambda_i(g_k) = \delta_{ik}$. Поэтому выражение (68) может быть следующим образом переписано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \beta_1(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) & \dots & \beta_n(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) \\ \beta_1(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) & \dots & \beta_n(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) & \dots & \beta_n(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что матрица (65) является обратной к матрице

$$\begin{pmatrix} \beta_1(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) & \beta_2(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) & \dots & \beta_n(g_1) - \beta_{n+1}(g_1) \\ \beta_1(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) & \beta_2(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) & \dots & \beta_n(g_2) - \beta_{n+1}(g_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) & \beta_2(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) & \dots & \beta_n(g_n) - \beta_{n+1}(g_n) \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Из равенства (67) и равенства $\lambda_1(x) + \dots + \lambda_{n+1}(x) = 1$ следует, что

$$\lambda_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} \left[1 - \sum_{i,j=1}^n q_{ij} (\beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)) \right], \quad (70)$$

$$\lambda_i(x) = \lambda_{n+1}(x) + \sum_{j=1}^n q_{ij} (\beta_j(x) - \beta_{n+1}(x)), \quad i = \overline{1, n}. \quad (71)$$

Итак, для нахождения системы $\{u_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, J(x)$ известным системам $\{\alpha_k(x)\}_{k=0}^{n+1}, I(x)$ и $\{g_k\}_{k=1}^{n+1}$ следует:

1. Найти систему $\{\beta_j(x)\}_{j=1}^{n+1}$ по формулам (57);
2. Вычислить элементы матрицы (69);
3. Найти матрицу (65) обращением матрицы (69);
4. Вычислить функцию $\lambda_{n+1}(x)$ по формуле (70);
5. Вычислить функции $\lambda_i(x), i = 1, 2, \dots, n$ по формуле (71);
6. Положить $J(x) = \{i/\lambda_i < 0\}$,

$$u_0(x) = \left(\sum_{i \in J} \lambda_i(x) \right)^{-1}, \quad u_i(x) = u_0(x) |\lambda_i(x)|.$$

5. Эксперименты по нахождению линейного предиката

Предыдущие результаты указывают способ экспериментальной проверки того, что предикат является линейным и, тем самым, определяется каким-то набором (конечным или счетным) интегралов вида (3). Предположим, что нам известны функции $\alpha_k(t), 0 \leq t \leq 1$, являющиеся весовыми для этих интегралов. Зная эту систему, можно найти двойственную к ней систему функций $\beta_k(t)$ (в конечном случае для этого существует эффективная процедура), определить ортопроектор P равенством

$$P(x) = \sum_{k \in J} \left(\int_0^1 \alpha_k(t) x(t) dt \right) \beta_k$$

и задать предикат Φ формулой $\Phi(x, y) = D(Px, Py)$, где D – тождественный предикат.

Таким образом, вопрос сводится к нахождению функций $\alpha_k \in L^2[0, 1]$, фигурирующих в интегралах. При этом единственно доступная из эксперимента информация заключается в значениях $\alpha_k(x)$ интеграла при тех или иных значениях $x \in L^2[0, 1]$. Всюду выше, пользуясь взаимно однозначным каноническим соответствием между линейными функционалами и элементами L^2 , мы обозначали одним и тем же символом α_k линейный функционал и его весовую функцию в интегральном представлении. Начиная с настоящего места это становится неудобным, и поэтому мы обозначим интеграл (3) другим символом. Кроме того, для простоты обозначений, опустим индекс K . Итак, пусть

$$\alpha(x) = \int_0^1 \alpha(x) x(t) dt, \quad x \in L^2[0, 1]. \quad (72)$$

Требуется по информации о величине $\alpha(x)$ найти функцию $\alpha(t) \in L^2[0, 1]$.

Покажем, что эта задача может быть решена с помощью функции Хевисайда (функции единичного скачка):

$$x_\tau(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Имеем

$$\int_0^\tau \alpha(t) dt = u(\tau), \quad (73)$$

где $u(\tau) = \alpha(x_\tau)$ – известный отклик на единичный скачок (переходная функция). Функции $\alpha(t)$ по предположению являются суммируемыми с квадратом. Отсюда вытекает, что они суммируемы. Но интеграл от суммируемой функции, как функция верхнего предела, является абсолютно непрерывной функцией. Следовательно, эта функция почти везде имеет конечную производную. Более того, эта производная почти везде равна подынтегральной функции. Таким образом, почти всюду

$$\alpha(t) = u'(t) = \frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau). \tag{74}$$

Заметим, что вопрос о значении функции $\alpha(\tau)$ во всех точках не имеет физического смысла: если две функции $\alpha(t)$ и $\bar{\alpha}(t)$ различаются лишь на множестве меры нуль, то при любых $x(t)$ имеет место равенство

$$\int_0^1 \alpha(t)x(t)dt = \int_0^1 \bar{\alpha}(t)x(t)dt,$$

другими словами, величины $\alpha(x)$ для них совпадают. Поскольку в эксперименте для наблюдения доступны лишь эти величины, отсюда вытекает, что функции $\alpha(t)$ принципиально не могут быть восстановлены в каждой точке. Таким образом, равенство (74) теоретически полностью решает задачу о нахождении весовой функции.

На практике, однако, равенство (74) не может быть применено непосредственно, так как в эксперименте измеряется не значение производной $\frac{\partial}{\partial t} a(x_\tau)$, а значение самой функции $a(x_\tau)$. Поэтому непосредственное применение формулы (74) на практике означает использование приближенной формулы:

$$\alpha(\tau) \approx \frac{a(x_\tau + t) - a(x_\tau)}{t}, \tag{75}$$

где t — достаточно малое число. Но процедура численного дифференцирования является некорректной задачей — сколь угодно малые погрешности в вычислении функции могут вести к сколь угодно большим погрешностям в вычислении производной. Для того чтобы обойти это препятствие, используются различные методы решения некорректно поставленных задач.

Один из них, принадлежащий М.М. Лаврентьеву, в применении к рассматриваемой задаче состоит в замене уравнения (73) уравнением

$$\int_0^\tau \alpha(t)dt + \lambda \cdot \alpha(\tau) = u(\tau), \tag{76}$$

где λ — положительный малый параметр. Это интегральное уравнение Вольтерра второго рода с разностным ядром $k(\tau - t)$, где

$$k(\xi) = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0. \end{cases}$$

Оно является корректным при любом $\lambda \neq 0$. Выпишем его явное решение. Дифференцируя, получаем

$$\lambda \alpha'(t) + \alpha(t) = u'(t), \quad \alpha(0) = \frac{1}{\lambda} u(0).$$

Пользуясь известной формулой для решения линейного дифференциального уравнения первого порядка, находим

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\tau u'(t) e^{-\frac{\tau-t}{\lambda}} dt + \frac{1}{\lambda} u(0) e^{-\frac{\tau}{\lambda}}.$$

Произведя интегрирование по частям в правой части, получаем

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\lambda} u(\tau) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\tau u(t) e^{-\frac{\tau-t}{\lambda}} dt. \tag{77}$$

Эта формула уже может быть использована в практических вычислениях. Для этого следует произвести дискретную аппроксимацию функции $u(t)$ и заменить интеграл в (77) какой-либо формулой приближенного интегрирования (например, Симпсона или трапеций).

Приведенный метод обладает тем недостатком, что не указывает способ подбора параметра λ . Приведем другой метод, находящийся в кругу тех же идей, но снабженный эффективной процедурой нахождения регуляризующего параметра. Речь идет об обобщенном методе невязки. Рассматривается некорректное уравнение:

$$A\alpha = u, \tag{78}$$

где A — линейный инъективный оператор в $L^2[0, 1]$, обратный к которому не является ограниченным. Правая часть уравнения известна приближенно, то есть известна некоторая функция u_ϵ такая, что

$$\|u - u_\epsilon\| \leq \epsilon, \tag{79}$$

где ϵ — известное положительное число. Метод состоит в решении вспомогательной задачи:

$$\|\alpha\| \rightarrow \inf, \quad \|A\alpha - u_\epsilon\| = 2\epsilon. \tag{80}$$

Эта задача имеет единственное решение α_ϵ , причем, если уравнение (48) имеет решение, то α_ϵ стремится к какому-либо решению (78) при $\epsilon \rightarrow 0$ (то есть метод является регуляризующим по А.И. Тихонову). В нашем случае оператор A имеет вид

$$[0, 1](t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau. \tag{81}$$

Найдем сопряженный вектор A^* . Имеем, используя формулу интегрирования по частям,

$$(A\alpha, \beta) = \int_0^1 \left(\int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) \beta(t) dt = \int_0^1 \left(\int_0^1 \beta(t) dt \right) \alpha(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$[A^*\beta](\xi) = \int_\xi^1 \beta(t) dt. \tag{82}$$

Правило Лагранжа сводит экстремальную задачу (80) к системе уравнений относительно α и λ (λ — число):

$$\alpha + \lambda A^* (A\alpha - u_\epsilon) = 0. \tag{83}$$

Используя (81) и (82), перепишем первое из этих уравнений в виде

$$\alpha(\xi) + \lambda \int_\xi^1 \int_\xi^1 \alpha(\tau) d\tau = \lambda \int_\xi^1 u_\epsilon(t) dt. \tag{84}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha''(\xi) - \lambda\alpha(\xi) &= -\lambda u_\xi'(\xi), \\ \alpha(1) = 0, \quad \alpha'(0) &= -\lambda u_\xi(0). \end{aligned} \quad (85)$$

Нетрудно проверить, что общее решение дифференциального уравнения (85) имеет вид

$$\alpha(t) = c_1 \operatorname{ch} \sqrt{\lambda} t + c_2 \operatorname{sh} \sqrt{\lambda} t - \lambda \int_0^t u_\xi(\tau) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(t-\tau)) d\tau.$$

Тогда частным решением (85), удовлетворяющим краевым значениям, будет

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \lambda \int_0^1 u_\xi(\tau) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau \frac{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda} t}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda}} - \\ &- \lambda \int_0^t u_\xi(\tau) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (86)$$

Второе уравнение (83) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left[\int_0^1 \int_0^\xi \alpha(t) dt - u_\xi(\xi) \right]^2 d\xi = 4\varepsilon^2.$$

Подставляя сюда (86), получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (\sqrt{\lambda} \int_0^1 u_\xi(\tau) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\lambda} \xi}{\operatorname{ch} \sqrt{\lambda}} - \\ &- \lambda \int_0^\xi dt \int_0^t u_\xi(\tau) \operatorname{ch}(\sqrt{\lambda}(1-\tau)) d\tau - u_\xi(\xi))^2 d\xi = 4\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Обозначим левую часть этого равенства через $f(\lambda)$. По экспериментально найденному приближению $u_\xi(t)$ для функции $u(t)$ можно, пользуясь приближенными формулами интегрирования, вычислить значения $f(\lambda)$ при любом λ . Это позволяет, используя какой-либо метод одномерного поиска, приближенно найти число λ , удовлетворяющее условию $f(\lambda) = 4\varepsilon^2$. Подставляя найденное значение λ в (86), получаем требуемое приближение для функции $\alpha(t)$.

Укажем еще два метода, которые могут быть применены для решения некорректной задачи (74). Один из них предназначен специально для уравнений типа свертки, другим является общий прокс-алгоритм.

Рассмотрим теперь пробные функции вида

$$x_{\tau,h}(t) = \begin{cases} \frac{1}{h}, & t \in [\tau, \tau+h], \\ 0, & t \notin [\tau, \tau+h]. \end{cases} \quad (87)$$

Из (72) имеем

$$\frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} \alpha(t) dt = u(\tau), \quad (88)$$

где $u(\tau) = a(x_{\tau,h})$. В силу теоремы о точках Лебега суммируемых функций для почти всех точек τ справедливо равенство

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_\tau^{\tau+h} \alpha(t) dt = \alpha(\tau). \quad (89)$$

Сравнивая (88) и (89), получаем, что почти для всех точек τ будет

$$\alpha(\tau) = \lim_{h \rightarrow 0} a(x_{\tau,h}). \quad (90)$$

Формула (90) теоретически решает задачу о нахождении целевой функции. Ее использование на практике означает применение при достаточно малых h приближенной формулы

$$\alpha(\tau) \approx a(x_{\tau,h}). \quad (91)$$

Отметим, что с математической точки зрения формулы (75) и (91) совпадают, однако экспериментальные процедуры, предусматривающие их использование, резко различаются. В первом случае используются сигналы с равномерно распределенной плотностью, во втором — с плотностью, сосредоточенной в окрестности фиксированной точки (то есть почти монохроматические). Заметим еще, что конкретный вид функции с плотностью, сосредоточенной в окрестности точки, не является существенным. Взамен функции (87) можно использовать любую неотрицательную функцию $d\tau$, носитель которой находится в малой окрестности точки τ , а площадь соответствующей криволинейной трапеции равна 1. Любая такая функция является приближенной реализацией импульсной функции (δ — функции Дирака), для которой почти всюду

$$\alpha(\tau) = a(\delta_\tau). \quad (92)$$

Последнее равенство вытекает из формулы

$$\int_0^1 \alpha(t) \delta(t-\tau) dt = \alpha(\tau). \quad (93)$$

Формула (92) является обобщением формулы (90). Для любой приближенной реализации d_τ функции Дирака имеет место приближенная формула:

$$\alpha(\tau) = a(d_\tau). \quad (94)$$

Эта формула обобщает (91).

С формулами (90) и (92) дело обстоит так же, как и с формулой (74) — их непосредственное применение ведет к решению некорректно поставленных задач — интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки. В случае формулы (92) ядром уравнения является δ -функция, в случае (90) ядро имеет вид

$$k(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [-h, 0], \\ 0, & \xi \notin [-h, 0]. \end{cases}$$

Отметим, что к таким же вопросам приводят задачи определения: 1) формы радиоимпульса, излученного источником, по результатам записи его на больших расстояниях от источника, 2) формы

электрического импульса на входе кабеля по результатам записи на выходе, 3) переходных функций в линейных преобразователях автоматического регулирования и многие другие. Для решения этих задач могут быть применены те же методы, что и описанные выше в применении к задаче (74).

Укажем, наконец, еще один способ нахождения функции $\alpha(t)$. На этот раз будем пользоваться отрезками любой непрерывной положительной на $[0, 1]$ функции $\varphi(t)$. Положим

$$\varphi_\tau(t) = \varphi(t)x_\tau(t) = \begin{cases} \varphi(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Тогда (72) дает

$$a(\varphi_\tau) = \int_0^\tau \varphi(t)\alpha(t)dt.$$

Так же, как и в случае равенства (73), имеем почти всюду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a(\varphi_\tau) = \varphi(\tau)\alpha(\tau),$$

откуда

$$\alpha(\tau) = \frac{1}{\varphi(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} a(\varphi_\tau). \quad (95)$$

При использовании формулы (95) возникают те же вопросы, связанные с некорректностью, что и при использовании (74), (90) или (92).

Выводы

В статье рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Проанализированы отдельные условия к предикатам с точки зрения экономности и удобства в приложениях, а также процедура практической проверки линейной независимости функционалов. Пред-

ложены различные варианты условий линейности предиката. Доказаны соответствующие теоремы о необходимых и достаточных условиях линейности предиката.

Список литературы: 1. Бондаренко, М.Ф. Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнарченко, С.Ю. Шабанов-Кушнарченко // Бiонiка iнтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. 2. Бондаренко, М.Ф. О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнарченко, С.Ю. Шабанов-Кушнарченко // Бiонiка iнтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. 3. Люстерник, Л.А. Элементы функционального анализа [Текст] / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев М.: Наука, 1965. 389 с.

Поступила в редколлегию 20.04.2011.

УДК 519.7

Інтегральні представлення лінійних предикатів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнарченко, С.Ю. Шабанов-Кушнарченко // Бiонiка iнтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78.

Сформульовані і доведені системи необхідних і достатніх умов лінійності предиката для скінченних або зчисленних систем. Запропоновані різні варіанти умов лінійності предиката та процедура практичної перевірки лінійної незалежності функціоналів.

Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Integral presentations of linear predicates / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). – P. 65-78.

The formulated and well-proven systems of necessary and sufficient predicate linearness terms for the eventual or countable systems. Offered different variants of predicate linearness terms and practical verification procedure of linear functionals independence.

Ref.: 3 items.