УДК 519.7

ИЗОМОРФИЗМЫ АЛГЕБРЫ ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Рассмотрены проблемы построения эффективного математического аппарата для формализации и моделирования систем искусственного интеллекта. В качестве такого аппарата предложен абстрактный эквивалент алгебры конечных предикатов – алгебра идей. На основе алгебра идей получены некоторые результаты в области формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1-3]. Задача этих работ – построение абстрактного эквивалента алгебры конечных предикатов, которая, в свою очередь, используется для формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности. Этот абстрактный эквивалент, названный нами алгеброй идей, необходим для дальнейшего развития теории интеллекта. Выбор такого названия обусловлен тем, что элементы множества – носителя алгебры идей, естественным образом интерпретируются как идеи интеллекта (то есть мысли, понятия, вообще – любые субъективные состояния человека), а операции алгебры идей над этими элементами – как действия интеллекта над идеями. В роли прототипа алгебры идей в работе использована алгебра одноместных k-ичных предикатов первого порядка. Разработана аксиоматика алгебры идей.

Развивая алгебру идей, одновременно с этим будем продвигаться вперед и в деле формального описания закономерностей интеллектуальной деятельности человека. Это будет достигаться посредством *психологической интерпретации* понятий и законов алгебры идей. Правомерность такой интерпретации будет обосновываться в каждом конкретном случае путем экспериментального изучения соответствующих свойств поведения испытуемого. Под *испытуемым* мы подразумеваем того конкретного человека, интеллектуальная деятельность которого подвергается формализации.

1. Формирование множества идей испытуемого

На основании результатов, полученных в работах [1-3], можно перейти к рассмотрению вопроса: как получить разбиение множества ***A***. Предположим, что испытуемому дано задание P. Пусть на набор идей $\xi' = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha', \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ он реагирует положительным ответом, а на набор идей $\xi'' = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha'', \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ – отрицательным. Имеется ввиду, что $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha', \alpha'', \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$ – идеи исследователя, произвольно выбранные из множества ***A*** и выступающие в роли имен идей испытуемого. Своими ответами испытуемый свидетельствует о том, что идеи исследователя α' и α'' порождают в его сознании различные идеи. Следовательно, α' и α'' обозначают различные идеи испытуемого. Таким образом, идеи исследователя α' и α'' должны быть размещены в разных классах разбиения множества ***A***. То же самое надо сделать, если окажется, что $P(\xi') = 0$ и $P(\xi'') = 1$.

Если же опыт покажет, что $P(\xi') = 0$ и $P(\xi'') = 0$ или $P(\xi') = 1$ и $P(\xi'') = 1$, то одного этого факта еще не достаточно, чтобы признать идеи испытуемого, порождаемые идеями исследователя α' и α'', идентичными и поместить их в одном классе разбиения. Такой исход эксперимента означает лишь то, что испытуемый по-одинаковому реагирует на свои идеи α' и α'' (вне зависимости от того, совпадают ли они друг с другом или нет). Отсюда, однако, еще не следует, что он будет реагировать на те же идеи по-одинаковому и при любом другом режиме их анализа. Достаточное основание к размещению идей α' и α'' в одном классе разбиения мы получим лишь тогда, когда равенство $P(\xi') = P(\xi'')$ будет иметь место при любом выборе идей $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n$, числа i и задания P. В этом случае с полным правом можно будет утверждать, что испытуемый не имеет никакой возможности различить свои идеи, числящиеся под именами α' и α''. Таким образом, мы приходим к выводу, что в данном случае идеи исследователя α' и α'' порождают в сознании испытуемого одну и ту же идею.

Напрашивается вопрос, – а что будет, если исследователь не сможет отыскать эксперимент, разделяющий идеи α' и α'', а между тем объективно такой опыт существует (в том смысле, что, будучи кем-то указан, он мог бы быть реализован на практике). Такой случай вполне реален, если принять во внимание астрономическое число возможных экспериментов. Не сделает ли это препятствие неэффективной предложенную выше процедуру формирования множества A, не превратится ли она в безрезультатные поиски “иголки в стоге сена”? Обнадеживающим обстоятельством здесь служит то, что пропуск исследователем некоторых из экспериментов, выявляющих различие идей, не отменяет всей остальной его работы по формированию классов разбиения. Совершив такой пропуск, исследователь получит разбиение множества ***A*** более грубое, чем истинное разбиение. Если в процессе дальнейшей работы исследователь произведет новые эксперименты, разделяющие неизвестным ранее способом его идеи, то ничто не помешает ему детализировать полученное ранее разбиение множества ***A***. В истории развития физики случаи подобной корректировки знания об окружающем нас мире встречались неоднократно. И всегда они воспринимались не как фиаско науки, а как нормальный процесс ее развития.

Рассмотрим еще и такой вопрос: всегда ли описанная выше процедура разделения идей исследователя на классы приводит к вполне определенному разбиению множества M? Оказывается, не всегда. Разбиение получится вполне определенным только в том случае, когда ответы испытуемого однозначно определяются данным ему заданием и предъявленным ему набором идей, иначе говоря, когда при повторении любого эксперимента его результат всегда повторяется. Это условие означает, что испытуемый при каждом задании P реализует своим поведением вполне определенную двоичную функцию (т.е. предикат) $P(x_1, x_2,..., x_n)$. Сформулированное условие назовем *законом однозначности поведения испытуемого*. Закон этот не будет выполняться, если испытуемый просто выдумывает ответы, а не получает их в результате сравнения своих идей; если он недостаточно внимательно выполняет задание исследователя; если в процессе проведения опыта действуют не учтенные исследователем факторы. Проверка закона однозначности поведения испытуемого всецело находится во власти исследователя, поэтому он всегда сможет не допустить неоднозначных реакций испытуемого. Значит, исследователь всегда сможет сформировать интересующее его множество идей испытуемого при условии, что последний обладает способностью воспроизводить своим поведением любые предикаты, которые потребуются исследователю.

После того как множество идей испытуемого сформировано, исследователь вводит на нем бинарный предикат D, пользуясь следующим правилом: если идеи исследователя, порождающие идеи испытуемого x и y, принадлежат одному классу разбиения, то принимаем $D(x, y) = 1$, в противном случае полагаем $D(x, y) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что так введенный на множестве $A \times A$ предикат D является предикатом равенства. В самом деле, ранее было установлено [2], что свойства рефлексивности и подстановочности однозначно определяют предикат равенства.

Рефлексивность предиката D непосредственно вытекает из факта существования разбиения множества ***A***. Возможность же построения разбиения обусловлена способом отбора заданий для испытуемого. Как было сказано в последнем абзаце предыдущего пункта, исследователь проводит свои эксперименты лишь с теми заданиями, которые обеспечивают однозначные реакции испытуемого на любые наборы идей. Свойством подстановочности предикат D обладает по той причине, что разбиение множества ***A*** формировалось именно так, чтобы это свойство выполнялось. Таким образом, наличие свойств подстановочности у предиката D обусловлено самим способом образования множества ***A***. Итак, единственность предиката D предопределена той методикой, с помощью которой обследуется поведение испытуемого. Существование предиката D обусловлено тем, что такая методика оказывается эффективной, т.е. фактически приводит к построению вполне определенного предиката, описывающего поведение испытуемого.

Предположим, что исследователь дал задание испытуемому определять, равны или нет предъявляемые ему идеи. Сможет ли он, не опираясь на интроспективное свидетельство испытуемого, вывести из своих экспериментов на испытуемом, что тот производит именно отождествление своих идей, а не какую-либо иную операцию над ними? Да, сможет. Для этого исследователю достаточно при данном задании определить реакции испытуемого на всевозможные пары его идей x, y и убедиться, что все они совпадают со значениями предиката $D(x, y)$.

Но если мы спросим, сможет ли исследователь вывести из чисто объективных наблюдений за поведением испытуемого существование у испытуемого субъективно переживаемых им идей, то на это придется дать отрицательный ответ. Удостовериться в наличии субъективных переживаний может только сам испытуемый, но объективной проверке эта информация не поддается. Исследователь может верить в существование субъективных состояний у испытываемого, а может и не верить. Если исследователь не верит в это, то тем самым лишает себя морального права утверждать, что он изучает внутренний мир испытываемого. В этом случае исследователь может претендовать лишь на то, что он изучает поведение испытуемого.

Сказанное в предыдущем абзаце может привести читателя к выводу, что утверждения противоречивы. Действительно, выше утверждалось, что из экспериментов, в которых изучается только поведение испытуемого, выводится существование классов разбиения множества ***A***, которые психологически интерпретируются как идеи испытуемого. Вместе с тем, утверждается, что существование субъективных состояний из наблюдений за поведением испытуемого невыводимо. На самом деле никакого противоречия между этими двумя утверждениями нет. Дело в том, что термин *существование* имеет в русском языке два различных смысла, назовем их *логическим* и *фактическим*. Субъективные состояния испытуемого, которые он переживает в текущий момент времени, существуют в фактическом смысле. Классы же разбиения множества ***A*** существуют в логическом смысле. Поведение испытуемого таково, что дает возможность ввести классы разбиения множества ***A***. Но возможность – это еще не действительность. Классы вводятся не как реально существующие объекты, а лишь как логически возможные абстракции. Классы разбиения можно психологически интерпретировать как реально существующие идеи испытуемого лишь в том случае, когда признается фактическое существование идей испытуемого.

Логическое существование слабее фактического. Если предмет существует фактически, то он существует и в логическом смысле, обратное же верно не всегда. Когда мы говорим, что предмет существует в логическом смысле, то утверждаем лишь то, что этот предмет может существовать и фактически, т.е. ничто не мешает, чтобы данный предмет действительно находился в реальном мире. Например, в логическом смысле всегда существует отрезок прямой, соединяющий любые две точки. Но две точки, отмеченные чернилами на листе бумаги, могут быть отрезком прямой на самом деле не соединены, в данном случае отрезок прямой фактически не существует. Тем не менее, при желании такой отрезок мы всегда можем нарисовать, тогда он будет существовать и фактически. Логически не существует окружности диаметра 5 см, которую можно было бы провести через две точки, отстоящие друг от друга на расстоянии 10 см. Отсюда следует, что и реально такая окружность не может существовать: нельзя практически подобрать такое положение окружности заданного диаметра на листе бумаги, чтобы она проходила через две указанные выше точки.

Если поведение какого-то физического устройства, например, вычислительной машины таково, что допускает введение классов разбиения множества его входных сигналов, отсюда следует, что существование субъективных образов этих сигналов в логическом смысле гарантировано. Но ошибочно было бы только на этом основании утверждать, что устройство на самом деле переживает какие-то субъективные состояния. Для внешнего наблюдателя испытуемый представляет собой всего лишь устройство, преобразующее сигналы, поэтом фактическое существование субъективных состояний у испытуемого из анализа его поведения никак не вытекает. Исследователь вынужден просто верить заявлениям испытуемого, что у того действительно имеются субъективные состояния (мысли, ощущения и т.п.). Если исследователь в это верит, то перед ним появляется задача математического описания субъективных состояний испытуемого, и для ее решения он может воспользоваться приведенным выше методом сравнения. Если же исследователь не склонен верить испытуемому, то он лишается предмета исследования в виде субъективных переживаний испытуемого, и применение каких бы то ни было методов их математического описания становится для него неуместным: теперь их просто не к чему применять.

2. Понятие алгебры идей

Любую алгебраическую систему L_n, которая состоит из множества S_n ($n \in \{1,2,...\}$), содержащего 2^n элементов, отношения равенства $x = y$ и операции $x \vee y$ ($x, y, z \vee y \in S_n$), назовем *алгеброй идей* если для нее выполняются следующие условия:

1) для любого $x \in S_n$ $\quad x \vee x = x$ (*аксиома идемпотентности*);

2) для любых $x, y \in S_n$ $\quad x \vee y = y \vee x$ (*аксиома коммутативности*);

3) для любых $x, y, z \in S_n$ $\quad (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ (*аксиома ассоциативности*);

4) в множестве S_n содержится элемент 0 такой, что для любого $x \in S_n$ $\quad 0 \vee x = x$ (*аксиома нуля*);

5) в множестве S_n содержатся такие не совпадающие с нулем различные элементы $e_1, e_2, ..., e_n$, что из них и из элементов 0 можно с помощью операции $\vee$ получить любой из элементов множества S_n (*аксиома n-мерности*).

Введенные алгебры идей $L_1, L_2, ...$ являются частным случаем коммутативных идемпотентов [4, с. 83].

Множество S_n назовем *носителем* алгебры идей L_n. Число n назовем *размерностью* алгебры L_n. Элементы множества S_n называем *идеями* алгебры L_n. Будем говорить, что идеи алгебры L_n *n-мерны*. Операцию $x \vee y$ называем *дизъюнкцией* идей x и y. Идею $z = x \vee y$, получаемую в результате выполнения операции дизъюнкции над идеями x и y, будем называть их *логической суммой*. Идеи x и y будем называть *слагаемыми* суммы $x \vee y$. Элемент 0 называем *нулевой идеей* или *нулем* алгебры L_n. Элементы $e_1, e_2, ..., e_n$ называем *базисными идеями* алгебры L_n, а множество $B_n = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ – ее *базисом*. Нулевую и базисные идеи будем называть *образующими идеями* алгебры L_n.

Понятие алгебры идей размерности n $(n \in \{1,2,...\})$ нами было введено не прямым определением, а задано неявно системой логических условий. При таком способе задания понятия не исключен случай, когда не существует ни одного объекта, соответствующего вводимому понятию. Так случилось бы, если бы система условий, задающая понятия алгебры идей размерности n, оказалась бы противоречивой. Поэтому важно доказать, что для каждого $n \in \{1,2,...\}$ существует хотя бы одна конкретная алгебра L_n, являющаяся алгеброй идей размерности n. Если этого не сделать, то у нас не будет гарантии того, что при каждом натуральном n алгебра идей есть нечто реальное, а не просто ни на что не годная фикция. Такую гарантию дает доказываемая ниже *теорема о существовании алгебр идей*.

Теорема 1. *Алебра идей любой размерности n ($n=1,2,...$) существует.*

Доказательство. Теорема будет доказана, если нам удастся построить ряд конкретных алгебр $L_1, L_2, ...$, являющихся алгебрами идей размерности 1,2,... . Алгебры $L_1, L_2, ...$ будем строить с помощью специальной порождающей процедуры, начиная с алгебры L_1 размерности $n=1$ и переходя от алгебры L_{k-1} размерности $n=k-1$ к алгебре L_k размерности $n=k$. Проверку алгебр $L_1, L_2, ...$ на их соответствие определению алгебр идей размерности 1,2,... будем вести методом математической индукции по k, начиная с алгебры L_1 и переходя от алгебры L_{k-1} к алгебре L_k.

Алгебру L_1 с номером $k=1$ определяем следующим образом. В роли носителя алгебры L_1 используем множество $S_1=\{0, \ e_1\}$. В качестве элементов множества S_1 берем символы 0 и e_1. Таким образом, в множестве S_1 содержится $2=2^1$ элемента. Операцию $\vee$ дизъюнкции элементов множества S_1 определяем следующим образом: $0\vee 0=0$, $0\vee e_1=e_1$, $e_1\vee 0=e_1$, $e_1\vee e_1=e_1$. Докажем, что так определенная алгебра L_1 удовлетворяет всем аксиомам алгебры идей размерности 1. Проверяем идемпотентность дизъюнкции. По только что принятому определению операции дизъюнкции имеем: $0\vee 0=0$, $e_1\vee e_1=e_1$. Следовательно, при любом $x\in S_1$ $x\vee x=x$. Проверяем коммутативность дизъюнкции: $0\vee e_1=e_1=e_1\vee 0$. Итак, при любых $x,y\in S_1$, $x\vee y=y\vee x$. Из определения операции дизъюнкции выводим аксиому ассоциативности:

$$(0\vee 0)\vee 0=0\vee 0=0\vee(0\vee 0),$$
$$(0\vee 0)\vee e_1=0\vee e_1=0\vee(0\vee e_1),$$
$$(0\vee e_1)\vee 0=e_1\vee 0=e_1=0\vee e_1=0\vee(e_1\vee 0),$$
$$(0\vee e_1)\vee e_1=e_1\vee e_1=e_1=0\vee e_1=0\vee(e_1\vee e_1),$$
$$(e_1\vee 0)\vee 0=e_1\vee 0=e_1\vee(0\vee 0),$$
$$(e_1\vee 0)\vee e_1=e_1\vee(0\vee e_1),$$
$$(e_1\vee e_1)\vee 0=e_1\vee 0=e_1=e_1\vee e_1=e_1\vee(e_1\vee 0),$$
$$(e_1\vee e_1)\vee e_1=e_1\vee e_1=e_1\vee(e_1\vee e_1).$$

Мы получили, что при любых $x,y,z\in S_1$, $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)$.

Проверяем аксиому нуля. В роли нуля алгебры L_1 берем символ 0. Это мы имеем право сделать, поскольку для символа 0 аксиома нуля выполняется. В самом деле: $0\vee 0=0$, $0\vee e_1=e_1$. Это означает, что при любом $x\in S_1$ $0\vee\ x=x$. Проверяем аксиому одномерности. В роли базисного элемента алгебры L_1 принимаем символ e_1. Элемент e_1 – ненулевой, поскольку он не удовлетворяет аксиоме нуля: $e_1\vee 0=e_1$, следовательно, $e_1\vee 0\neq 0$. Все элементы множества S_1 выражаются через базисный и нулевой элементы с помощью операции $\vee$, т.к. $0=0\vee 0$, $e_1=0\vee e_1$. Итак, аксиома одномерности в алгебре L_1 выполняется. Как видим, построенная нами при $k=1$ алгебра L_1 есть алгебра идей размерности 1. Следовательно, одномерная алгебра идей существует.

Предположим теперь, что уже построена алгебра L_{k-1}, и сконструируем на ее основе алгебру L_k. В роли носителя алгебры L_{k-1} используется множество S_{k-1}, состоящее из 2^{k-1} различных символов. Пусть в алгебре L_{k-1} роль нулевого элемента выполняет символ 0, а в качестве базисных элементов выступают не совпадающие с нулем различные символы $e_1, e_2, ..., e_{k-1}$. Полагаем, кроме того, что в алгебре L_{k-1} задана двуместная операция $\vee$ дизъюнкции элементов множества S_{k-1}, значениями которой служат элементы того же множества. Имеется в виду, что операция $\vee$ идемпотентна и ассоциативна, а также удовлетворяет аксиомам нуля и (k-1)-мерности.

В роли носителя алгебры L_k берем множество S_k, которое формируется следующим образом. Во-первых, включаем в его состав 2^{k-1} символов, образующих множества S_{k-1}. Во-вторых, включаем в состав множества S_k символ e_k, отличающийся от любого элемента множества S_{k-1}. В-третьих, включаем в состав множества S_k всевозможные символы вида xe_k, где x – произвольный ненулевой элемент множества S_{k-1}. Символ xe_k представляет собой последовательность символов x и e_k. Каждый из 2^{k-1}-1 символов вида xe_k отличается от всех других элементов множества S_k. Действительно, символы xe_k и ye_k, различны. Каждый из символов вида xe_k отличается от любого символа из множества S_{k-1} наличием в его составе символа e_k, стоящего справа. От символа же e_k каждый из символов вида xe_k отличается наличием левой части x. Таким образом, множество S_k составлено из 2^k различных символов. Полагаем, что в алгебре L_k роль нулевого элемента выполняет символ 0, а в качестве базисных элементов используются символы $e_1, e_2, ..., e_k$.

Операцию дизъюнкции элементов в алгебре L_k определяем следующим образом. В качестве логической суммы $z=x\vee y$ любых двух символов $x,y\in S_{k-1}$ берем символ $z\in S_{k-1}$, получаемый в алгебре L_{k-1} в результате выполнения операции дизъюнкции символов x и y. Дизъюнкцию символа e_k с самим собой задаем правилом $e_k\vee e_k=e_k$ (1), с символом 0 – правилами $0\vee e_k=e_k\vee 0=e_k$ (2, 3), с любым ненулевым элементом $x\in S_{k-1}$ – правилами $x \vee e_k = e_k \vee x = xe_k$ (4, 5), с любым элементом вида xe_k – правилами $e_k \vee xe_k = xe_k \vee e_k = xe_k$ (6, 7). Дизъюнкцию произвольного символа $x \in S_{k-1}$ с символом вида ye_k задаем правилами $x \vee ye_k = ye_k \vee x = (x \vee y)e_k$ (8, 9) Наконец, дизъюнкцию любых символов вида xe_k и ye_k определяем правилом $xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k$ (10).

Итак, мы полностью построили алгебру L_k. Осталось показать, что введенная в ней операция дизъюнкции обладает свойствами идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, а также удовлетворяет аксиомам нуля и k-мерности. Проверяем идемпотентность дизъюнкции. Для любого элемента $x \in S_{k-1}$, согласно свойству идемпотентности операции $\vee$ в алгебре L_{k-1}, имеем $x \vee x = x$. Для символа e_k по правилу (1) имеем $e_k \vee e_k = e_k$. Для любого символа вида xe_k, согласно правилу (10) и аксиоме идемпотентности в алгебре L_{k-1}, получаем $xe_k \vee xe_k = (x \vee x)e_k = xe_k$.

Проверяем коммутативность. Для любых $x, y \in S_{k-1}$ равенство $x \vee y = y \vee x$ имеет место ввиду коммутативности дизъюнкции в алгебре L_{k-1}. В случае, когда одно из слагаемых x есть элемент из S_{k-1}, а другое – символ e_k, коммутативность вытекает из равенств (2)-(5): если $x=0$, то $x \vee e_k = 0 \vee e_k = e_k = e_k \vee 0 = e_k \vee x;$ если же $x \neq 0$, то $x \vee e_k = xe_k = e_k \vee x.$ Для случая, когда одно из слагаемых есть символ $x \in S_{k-1}$, а другое – символ вида ye_k, коммутативность вытекает из правил (8) и (9): $x \vee ye_k = (x \vee y)e_k = ye_k \vee x.$ Для случая, когда одно слагаемое есть символ e_k, а другое – символ xe_k, коммутативность следует из правил (6) и (7): $e_k \vee xe_k = xe_k = xe_k \vee e_k.$ Остался нерассмотренным случай, когда оба слагаемых являются символами вида xe_k и ye_k. Коммутативность в этом случае следует из правила (10) и аксиомы коммутативности дизъюнкции в алгебре L_{k-1}: $xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = (y \vee x)e_k = ye_k \vee xe_k.$

Проверяем ассоциативность дизъюнкции. Множество S_k разбиваем на четыре класса элементов: а) нулевой элемент 0, б) ненулевые элементы множества S_{k-1}, в) элемент e_k, г) элементы вида xe_k. Поскольку в аксиоме ассоциативности $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ фигурируют три элемента x, y и z, то приходится проверять $4^3=64$ типа равенств. Если $x, y, z \in S_{k-1}$, то, согласно свойству ассоциативности операции $\vee$ в алгебре L_{k-1}, имеем $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$. Проверяем ассоциативность для случая, когда $x, y, z \in \{0, e_k\}$:

$$(0 \vee 0) \vee e_k = 0 \vee e_k = 0 \vee (0 \vee e_k),$$
$$(0 \vee e_k) \vee 0 = e_k \vee 0 = 0 \vee (e_k \vee 0),$$
$$(e_k \vee 0) \vee 0 = e_k \vee 0 = e_k \vee (0 \vee 0),$$
$$(0 \vee e_k) \vee e_k = e_k \vee e_k = e_k = 0 \vee e_k = 0 \vee (e_k \vee e_k),$$
$$(e_k \vee 0) \vee e_k = e_k \vee e_k = e_k \vee (0 \vee e_k),$$
$$(e_k \vee e_k) \vee 0 = e_k \vee 0 = e_k = e_k \vee e_k = e_k \vee (e_k \vee 0),$$
$$(e_k \vee e_k) \vee e_k = e_k \vee e_k = e_k \vee (e_k \vee e_k).$$

Рассматриваем все оставшиеся случаи, когда в условии ассоциативности присутствует любые элементы, кроме элементов вида xe_k:

$$(x \vee y) \vee e_k = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = x(y \vee e_k),$$
$$(x \vee e_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = x \vee (e_k \vee y),$$
$$(e_k \vee x) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y) \vee e_k = e_k \vee (x \vee y),$$
$$(x \vee e_k) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k = x \vee e_k = x \vee (e_k \vee e_k),$$
$$(e_k \vee x) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (x \vee e_k),$$
$$(e_k \vee e_k) \vee x = e_k \vee x = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (e_k \vee x),$$
$$(0 \vee x) \vee e_k = x \vee e_k = x \vee e_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (x \vee e_k),$$
$$(x \vee 0) \vee e_k = x \vee e_k = x \vee (0 \vee e_k),$$
$$(e_k \vee 0) \vee x = e_k \vee x = e_k \vee (0 \vee x),$$
$$(e_k \vee x) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = e_k \vee x = e_k \vee (x \vee 0),$$
$$(0 \vee e_k) \vee x = e_k \vee x = x \vee e_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (e_k \vee x),$$
$$(x \vee e_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = x \vee e_k = x \vee (e_k \vee 0).$$

Рассматриваем случаи, когда в условии ассоциативности присутствуют нулевые элементы вида xe_k:

$$(0 \vee 0) \vee xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (0 \vee xe_k),$$
$$(0 \vee xe_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (xe_k \vee 0) \wedge$$
$$\wedge (xe_k \vee 0) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k(0 \vee 0),$$
$$(0 \vee xe_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = 0 \vee (x \vee y)e_k =$$
$$= 0 \vee (xe_k \vee ye_k)(xe_k \vee 0) \vee ye_k =$$
$$= xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (0 \vee ye_k),$$
$$(xe_k \vee ye_k) \vee 0 = (x \vee y)e_k \vee 0 = (x \vee y)e_k =$$
$$= xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (xe_k \vee 0),$$
$$(xe_k \vee ye_k) \vee zy_k = (x \vee y)e_k \vee ze_k = ((x \vee y) \vee z)e_k =$$
$$= xe_k \vee (y \vee z)e_k = xe_k \vee (ye_k \vee ze_k).$$

Проверяем ассоциативность при наличии ненулевых элементов множества S_{k-1} и элементов вида xe_k:

$$(x \vee y) \vee ze_k = ((x \vee y) \vee z)e_k = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$x \vee (y \vee z)e_k = x \vee (y \vee ze_k),$$
$$(x \vee ye_k) \vee z = (x \vee y)e_k \vee z = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$= x \vee (y \vee z)e_k = x \vee (ye_k \vee z),$$
$$(xe_k \vee y) \vee z = (x \vee y)e_k \vee z = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$= (x \vee (y \vee z))e_k = xe_k \vee (y \vee z),$$
$$(x \vee ye_k) \vee ze_k = (x \vee y)e_k \vee ze_k = ((x \vee y) \vee z)e_k =$$
$$= (x \vee (y \vee z))e_k = x \vee (ye_k \vee ze_k),$$
$$(xe_k \vee y) \vee ze_k = (x \vee y) \vee ze_k = (x \vee y)e_k \vee ze_k =$$
$$((x \vee y) \vee z)e_k = (x \vee (y \vee z))e_k = xe_k \vee (y \vee z)e_k =$$
$$= xe_k \vee (y \vee ze_k),$$
$$(xe_k \vee ye_k) \vee z = (x \vee y)e_k \vee z = (x \vee (y \vee z))e_k =$$
$$(x \vee (y \vee z))e_k = xe_k \vee (y \vee z)e_k = xe_k \vee (ye_k \vee z).$$

Рассматриваем случай, когда в условии ассоциативности присутствуют элементы вида xe_k, а также элементы e_k и 0:

$$(e_k \vee e_k) \vee ze_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (e_k \vee xe_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee e_k = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (xe_k \vee e_k),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k \vee (e_k \vee e_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = \\ = e_k \vee (xe_k \vee ye_k),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (e_k \vee ye_k),$$

$$(xe_k \vee ye_k) \vee e_k = (x \vee y)e_k \vee e_k = (x \vee y)e_k = \\ = xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (ye_k \vee e_k),$$

$$(0 \vee e_k) \vee xe_k = e_k \vee xe_k = xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (e_k \vee xe_k),$$

$$(e_k \vee 0) \vee xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (0 \vee xe_k),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = xe_k \vee e_k = xe_k \vee (e_k \vee 0),$$

$$(0 \vee xe_k) \vee e_k = xe_k \vee e_k = xe_k = 0 \vee xe_k = 0 \vee (xe_k \vee e_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee 0 = xe_k \vee 0 = xe_k = e_k \vee xe_k = e_k \vee (xe_k \vee 0).$$

Осталось проверить два случая, когда в аксиоме ассоциативности фигурируют элемент 0 и элементы вида x, ye_k или элементы вида e_k, x, ye_k, где x, y — любые ненулевые элементы множества S_{k-1}:

$$(0 \vee x) \vee ye_k = x \vee ye_k = (x \vee y)e_k = 0 \vee (x \vee y)e_k = \\ = 0 \vee (x \vee ye_k),$$

$$(x \vee 0) \vee ye_k = x \vee ye_k = x \vee (0 \vee ye_k),$$

$$(xe_k \vee 0) \vee y = xe_k \vee y = xe_k \vee (0 \vee y),$$

$$(xe_k \vee y) \vee 0 = (x \vee y)e_k = xe_k \vee y = xe_k \vee (x \vee 0),$$

$$(0 \vee xe_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = 0 \vee (x \vee y)e_k = \\ = 0 \vee (xe_k \vee y),$$

$$(x \vee ye_k) \vee 0 = (x \vee y)e_k \vee 0 = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = \\ = 0 \vee (ye_k \vee 0),$$

$$(x \vee e_k) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = x \vee ye_k = \\ = x \vee (e_k \vee ye_k),$$

$$(e_k \vee x) \vee ye_k = xe_k \vee ye_k = (x \vee y)e_k = \\ = e_k \vee (x \vee y)e_k = e_k \vee (x \vee ye_k),$$

$$(x \vee ye_k) \vee e_k = (x \vee y)e_k \vee e_k = (x \vee y)e_k = \\ = x \vee ye_k = x \vee (ye_k \vee e_k),$$

$$(xe_k \vee y) \vee e_k = (x \vee y)e_k \vee e_k = (x \vee y)e_k = \\ = xe_k \vee y = xe_k \vee (y \vee e_k),$$

$$(e_k \vee xe_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = \\ = e_k \vee (x \vee y)e_k = e_k \vee (xe_k \vee y),$$

$$(xe_k \vee e_k) \vee y = xe_k \vee y = (x \vee y)e_k = \\ = xe_k \vee ye_k = xe_k \vee (e_k \vee y).$$

Проверяем аксиому нуля. Для любого $x \in S_{k-1}$, согласно аксиоме нуля в алгебре L_{k-1}, имеем $0 \vee x = x$. Для символа e_k по правилу (2) имеем $0 \vee e_k = e_k$. Для любого символа вида xe_k, согласно правилу (8) и аксиоме нуля в алгебре L_{k-1}, получаем: $0 \vee xe_k = (0 \vee x)\ e_k = xe_k$. Проверяем аксиому k-мерности. По индуктивному предположению для всех $x \in S_{k-1}$ аксиома $(k-1)$-мерности выполняется. Следовательно, все элементы множества S_k, принадлежащие вместе с тем и множеству S_{k-1}, можно получить из базисного и нулевого элементов алгебры L_{k-1} (а значит, из базисных и нулевого элементов алгебр L_k) с помощью операции дизъюнкции. Элемент e_k выражается в виде $e_k = 0 \vee e_k$. Остальные элементы множества S_k имеют вид xe_k, где $x \in S_{k-1}$. Все они выражаются, согласно (4), в виде $xe_k = x \vee e_k$. Итак, мы убедились в том, что введенная в алгебре L_k, операция дизъюнкции обладает свойством идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, а также удовлетворяет аксиомам нуля и k-мерности. Следовательно, теорема доказана.

При доказательстве теоремы о существовании алгебр идей нам пришлось построить ряд конкретных алгебр идей $L_1, L_2, \ldots$. Эти алгебры будем называть *каноническими алгебрами идей*. Носителем канонической алгебры идей L_n служит множество S_n, образованное из всевозможных символов вида $0, e_1, e_2, \ldots, e_n$, а также из всевозможных символов вида $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$, где $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p} \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, $2 \leq p \leq n$. Каждый такой символ представляет собой последовательность, составленную из двух или более (не обязательно всех) символов, называемых *базисными*, которые расположены в порядке возрастания их номеров. Любой из базисных символов может входить в последовательность $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$ не более одного раза. Например, множество S_1 состоит из двух символов 0 и e_1, множество S_2 — из четырех символов $0, e_1, e_2, e_1e_2$, множество S_3 — из восьми символов 0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1, e_2, e_3. Множество S_n состоит из 2^n символов.

В канонической алгебре идей L_n операция дизъюнкции определена следующим образом. Дизъюнкция любого элемента x с нулем дает в результате элемент x. Например, $0 \vee e_1e_2 = e_1e_2$, $e_2e_3e_4 \vee 0 = e_2e_3e_4$. Логическая сумма $z = x \vee y$ любых ненулевых элементов $x = e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$ и $y = e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}$ ($p, q \in \{1, 2, \ldots, n\}$) формируется по следующему правилу: $z = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}$, где $\{e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}\} = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\} \cup \{e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}\}$. Для получения логической суммы $z = x \vee y$ по этому правилу нужно выбрать из обоих слагаемых $x = e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$ и $y = e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}$ все входящие в них базисные символы $e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}$, $e_{j_1}, e_{j_2}, \ldots, e_{j_p}$ и составить из них последовательность $z = e_{k_1}, e_{k_2}, \ldots, e_{k_r}$, не допуская в ней повторений базисных элементов и располагая базисные символы в порядке возрастания их номеров. Например, $e_4 \vee e_1 = e_1e_4$, $e_1e_2 \vee e_1 = e_1e_2$, $e_2e_3 \vee e_1e_3e_4 = e_1e_2e_3e_4$.

Элементы множества S_n канонической алгебры идей L_n можно естественным образом расположить в ряд. Начинаем этот ряд символом 0, после него помещаем символ e_1. Это – первый шаг, в результате которого получаем $2 = 2^1$ члена ряда. На втором шаге получаем еще два члена ряда, формируя их из членов ряда, полученных на первом шаге: 0 заменяем на символ e_2, а к символу e_1 дописываем справа символ e_2. В результате имеем уже 2^2 членов ряда: $0, e_1, e_2, e_1e_2$. На третьем шаге получаем еще 2^2 членов ряда, формируя их из элементов уже имеющегося отрезка ряда: 0 заменяем символом e_3, а остальные члены ряда получаем дописыванием справа символа e_3 к последующим членам уже имеющегося отрезка ряда. В результате имеем уже 2^3 членов ряда: 0, e_1, e_2, e_1e_2, e_3, e_1e_3, e_2e_3, e_1, e_2, e_3. Процесс построения ряда продолжаем аналогичным образом. На n-ом шаге формируем 2^{n-1} элементов, заменяя в уже имеющемся отрезке ряда 0 на символ e_n и дописывая справа символ e_n к остальным членам ряда. В результате получаем искомый ряд элементов множества S_n, состоящий из 2^n элементов.

Пронумеруем элементы множества S_n в том порядке, в каком они располагаются в построенном нами ряду. Нулевому символу присваиваем номер 0, элементу e_1 – номер 1 и т.д. От каждого элемента нетрудно перейти к его порядковому номеру. Для этого символ e_1 снабжен весовым коэффициентом 2^0, символ e_2 – коэффициентом 2^1, символ e_n – весовым коэффициентом 2^{n-1}. Тогда произвольному элементу $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}$ соответствует порядковый номер

$$2^{i_1-1} + 2^{i_2-1} + ... + 2^{i_p-1},$$

представляющий собой сумму весовых коэффициентов всех символов, составляющих этот элемент. Например, элемент e_2, e_4, e_7 имеет номер

$$2^{2-1} + 2^{4-1} + 2^{7-1} = 2 + 8 + 32 = 42.$$

Нетрудно также от заданного номера N перейти к соответствующему ему элементу множества S_n. Для этого нужно перевести число N в двоичный код $\sigma_n, \sigma_{n-1}, ..., \sigma_2, \sigma_1$. Здесь $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}, \sigma_n$ – двоичные цифры 0 или 1. Элемент множества S_n с номером N строим по следующему правилу. Если в двоичном коде числа N $\sigma_i = 1$ $(i = 1, 2, ..., n)$, то символ e_i включается в последовательность $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}$, представляющую искомый элемент. Если же $\sigma_i = 0$, то символ e_i в состав элемента $e_{i_1}, e_{i_2}, ..., e_{i_p}$ не включается. К примеру, отыщем элемент, соответствующий номеру 154. Переводя число 154 из десятичной системы в двоичную, получаем двоичный код 10011010. В нем единицы стоят на втором, четвертом, пятом и восьмом местах (считая справа налево). Искомый элемент имеет вид $e_2e_4e_5e_8$.

Важно отметить, что если какой-либо элемент принадлежит множеству S_i, то он принадлежит также и всем множествам S_{i+1}, $S_{i+2}, ...$ $(i = 1, 2, ...)$ большей размерности. Например, элемент e_1e_2, входящий в состав множества S_3, входит также и в множество S_3. Номер любого элемента остается одним и тем же вне зависимости от того, в составе какой алгебры L_i он рассматривается. Например, в алгебрах L_2 и L_3 элемент e_1e_2 имеет один и тот же номер 3. Логическая сумма $x \vee y$ любых двух слагаемых x и y (а также ее номер) будет одной и той же во всех алгебрах, где имеются элементы x, y и $x \vee y$. Все сказанное приводит к выводу, что при любых $i < j$ $(i, j \in \{1, 2, ...\})$ алгебра L_j является просто расширением алгебры L_i. Иначе говоря, алгебра L_i является подалгеброй алгебры L_j. Имеет место вложение любой канонической алгебры меньшей размерности в каноническую алгебру большей размерности. Поэтому можно иметь дело всего лишь с одной алгеброй идей L_n, размерность n которой выбрана остаточно большой с таким расчетом, чтобы все нужные нам алгебры идей оказались фрагментами алгебры L_n. Алгебру идей L_n, обладающую таким свойством, назовем *универсальной канонической алгеброй идей.*

Для примера в таблице 1 представлены значения операции дизъюнкции $x \vee y$ в алгебре L_3.

Таблица 1

x \ y	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
0	0	e_1	e_2	e_1e_2	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1	e_1	e_1	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_2	e_2	e_1e_2	e_2	e_1e_2	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	e_1e_2	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_3	e_3	e_1e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_3	e_1e_3	r	$e_1e_2e_3$
e_1e_3	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	e_1e_3	e_1e_3	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$
e_2e_3	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$	e_2e_3	$e_1e_2e_3$
$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$	$e_1e_2e_3$

Части таблицы, очерченные жирными линиями и имеющие размер 2×2 и 4×4 ячейки, характеризуют операции дизъюнкции соответственно в алгебрах L_1 и L_2. Таблица имеет размер 8×8 ячеек. Достраивая таблицу до размера 16×16 ячеек, можно получить таблицу, задающую операции дизъюнкции идей в алгебре L_4.

Переход от таблицы дизъюнкции идей в алгебре L_{i+1} к таблице дизъюнкции идей в алгебре L_{i+1} можно осуществить следующим способом.

1) Удваиваем вертикальный и горизонтальный размеры уже имеющейся таблицы, добавляя к ней снизу 2^i строк и справа 2^i столбцов.

2) Новые строки и столбцы помечаем элементами множества S_{i+1}, отсутствующими в множестве S_i. Располагаем эти элементы в порядке роста их номеров.

3) Ячейки верхней правой четверти таблицы заполняем, приписывая справа символ e_{i+1} к элементам, расположенным на соответствующих местах верхней левой четверти таблицы. Исключение составляет лишь верхняя левая ячейка, в которую следует занести символ e_{i+1}.

4) Остальные две четверти таблицы (нижнюю левую и нижнюю правую) заполняем точно так же, как и верхнюю правую четверть таблицы.

3. Изоморфизм алгебр идей

Рассмотренные в предыдущей части работы канонические алгебры идей являются конкретным случаем алгебры идей. Теперь мы снова возвратимся к изучению алгебр идей в абстрактном их понимании. Для обозначения n-мерных идей алгебры L_n вводим *формулы алгебры идей* L_n. Формулы будем строить из символов $0, e_1, e_2, ..., e_n$, обозначающих образующие идеи алгебры L_n, символа $\vee$, обозначающего операцию дизъюнкции алгебры L_n, и двух вспомогательных символов – скобок (и). Символы $0, e_1, e_2, ..., e_n$ будут называть *образующими символами* алгебры L_n, а символы $e_1, e_2, ..., e_n$ – *базисными символами* алгебры L_n. Любые конечные последовательности введенных символов будем называть *выражениями* алгебры L_n.

Понятие формулы определяем индуктивно с помощью порождающей процедуры, основанной на следующих двух правилах. 1) Все образующие символы называем формулами алгебры L_n. 2) Если выражения A и B – формулы алгебры L_n, то выражение $(A \vee B)$ называем формулой алгебры L_n. Будем считать, что формула $(A \vee B)$ обозначает идею, получаемую в результате дизъюнкции идей, обозначенных формулами A и B. Нетрудно видеть, что введенные формулы представляют собой графическое изображение всевозможных способов получения идей в алгебре L_n. Из аксиомы n-мерности следует, что для каждой идеи алгебры L_n найдется хотя бы одна обозначающая ее формула. Это означает, что язык формул логической алгебры L_n при любом $n \in \{1, 2, ...\}$ *полон*. Отметим, что выражения и формулы алгебры идей L_n являются вместе с тем выражениями и формулами любых алгебр идей L_{n+1}, L_{n+2},... большей размерности.

Рассмотрим примеры образования формул алгебры идей. Берем трехмерную алгебру идей. В роли символов e_1, e_2, e_3 используем в ней буквы a, b, c. По правилу 1) образуем формулу $(0 \vee b)$, из формул c и $(0 \vee b)$ образуем формулу $(c \vee (0 \vee b))$, из формул $(0 \vee b)$ и b образуем формулу $((0 \vee b) \vee b)$, из формул $(c \vee (0 \vee b))$ и $((0 \vee b) \vee b)$ образуем формулу $((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b))$. Итак, мы построили ряд все более удлиняющихся формул: $0, b, c$, $(0 \vee b)$, $(c \vee (0 \vee b))$, $((0 \vee b) \vee b)$, $((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b))$.

Формулы, обозначающие одну и ту же идею, назовем *тождественными формулами*. Из аксиомы ассоциативности следует, что все формулы, отличающиеся друг от друга лишь положением имеющихся в них скобок, тождественны. Например, формулы

$$((c \vee (0 \vee b)) \vee ((0 \vee b) \vee b)),$$
$$((((c \vee (0 \vee b) \vee 0) \vee (b \vee b)),$$
$$((c \vee 0) \vee (((b \vee 0) \vee b) \vee b))$$

тождественны друг другу. В связи с этим появляется возможность выбросить из формулы все скобки и записывать любые идеи в виде выражений более простых, чем формулы. Выражения получаемые из формул исключением всех скобок, будем называть *бесскобочными формами*. Например, всем трем только что записанным формулам соответствует одна и та же бесскобочная форма $c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b$.

Далее, из аксиомы коммутативности вытекает возможность сузить класс бесскобочных форм для обозначения всех идей, оставив лишь те из них, у которых образующие символы следуют в порядке $0, e_1, e_2, ..., e_n$. К примеру, одну и ту же идею, представленную тремя различными скобочными формами $c \vee 0 \vee b \vee 0 \vee b \vee b$, $b \vee b \vee 0 \vee b \vee 0 \vee c$ и $0 \vee c \vee 0 \vee b \vee b \vee b$, можно записать единственной формой $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$. Кроме того, основываясь на аксиоме идемпотентности, можно упростить запись идеи, оставляя в обозначающей ее бесскобочной форме лишь по одному вхождению образующего символа. Например, идею, записанную в форме $0 \vee 0 \vee b \vee b \vee b \vee c$, можно представить более короткой бесскобочной формой $0 \vee b \vee c$. Наконец, из аксиомы нуля вытекает возможность еще большего упрощения представления идей: из любой бесскобочной формы, кроме формулы 0, можно исключить символ 0, если он там имеется. К примеру, идея, представленная формой $0 \vee b \vee c$, после выбрасывания из этой формы символа 0 запишется более экономной бесскобочной формой $b \vee c$.

Формулу 0 и все бесскобочные формы, в которые не входит символ 0, а базисные символы входят не более, чем по одному разу и расположены в порядке роста их номеров, будем называть *стандартными формами* идей. Формулу 0 будем называть *нулевой стандартной формой*. Ниже приводится *теорема о стандартной форме*.

Теорема 2. *Для каждой идеи алгебры* L_n $(n = 1, 2, ...)$ *существует единственная стандартная форма.*

Доказательство. *Существование.* Каждая ненулевая стандартная форма алгебры L_n имеет вид $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$, где $i_1, i_2, ..., i_p \in \{1, 2, ..., n\}$, $i_1 < i_2 < ... < i_p$, $p \le n$. Как было сказано ранее, для каждой идеи алгебры L_n найдется хотя бы одна обозначающая ее формула. Вместе с тем, только что было установлено, что для каждой формулы A алгебры идей L_n существует стандартная форма, обозначающая ту же идею, что и формула A. Таким образом, любую идею алгебры L_n можно представить в стандартной форме.

Единственность. Пусть $A = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$ – произвольно выбранная ненулевая стандартная форма. Множество $E_A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_p}\}$ всех базисных символов, присутствующих в форме A *назовем ядром ненулевой стандартной формы* A. *Ядром нулевой стандартной формы* 0 назовем пустое множество $\varnothing$. Ядро каждой стандартной формы является одним из подмножеств множества $B_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Каждому подмножеству множества B_n соответствует своя стандартная форма. Таким образом, между стандартными формами и подмножествами множества B_n имеет место взаимное однозначное соответствие. Всего имеется 2^n подмножеств множества B_n. Следовательно, всего существует 2^n различных стандартных форм. С другой стороны, множество B_n состоит из 2^n различных идей алгебры L_n. Таким образом, каждой идее алгебры L_n соответствует единственная стандартная форма. Теорема доказана.

Ниже формулируется и доказывается *теорема об изоморфизме алгебр идей.*

Теорема 3. *Все алгебры идей размерности* n $(n \in \{1, 2, \ldots\})$ *изоморфны друг другу.*

Доказательство. Только что было доказано, что каждой стандартной форме и ее ядру соответствует своя идея алгебры L_n. Следовательно, каждой идее $x \in L_n$ соответствует свое подмножество E_x базиса B_n. Множество E_x будем называть *ядром* идеи x. Обозначим через C_n систему всех подмножеств базиса B_n. Существует биекция $\Omega : S_n \to C_n$, которая ставит в соответствие каждой идее $x \in L_n$ ее ядро $E_x \in C_x$, так что $E_x = \Omega(x)$.

Докажем, что любая алгебра идей размерности n изоморфна канонической алгебре идей $\mathbf{L}_n$ той же размерности. Все символы, относящиеся к алгебре L_n, будем записывать тонким шрифтом, а символы относящиеся к алгебре $\mathbf{L}_n$ – жирным. Введем биекцию $\Phi : S_n \to \mathbf{S}_n$, определив ее следующим образом: $\Phi(0) = \mathbf{0}$, $\Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) = = \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_p}$. Имеем:

$$\Phi(0 \vee 0) = \Phi(0) = \mathbf{0} = \mathbf{0} \vee \mathbf{0} = \Phi(0) \vee \Phi(0),$$

$$\Phi(0 \vee (e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p})) = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) =$$

$$= \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_p} = 0 \vee \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_p} = \Phi(0) \vee \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}),$$

$$\Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee 0) = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) =$$

$$= \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_p} = \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_p} \vee \mathbf{0} = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee \Phi(0).$$

В алгебре L_n логическая сумма $z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r}$ любых ненулевых идей $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$ и $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}$ может быть определена, согласно аксиомам идемпотентности, коммутативности и ассоциативности, следующим правилом: $\{e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r}\} = \{e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}\} \cup \{e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}\}$. Для получения логической суммы y по этому правилу нужно выбрать из стандартных форм обоих слагаемых $x = e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$ и $y = e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}$ все входящие в них базисные символы $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}, e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}$ и составить из них стандартную форму $z = e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r}$, не допуская повторений базисных символов и располагая последние в порядке возрастания их номеров. Как мы знаем, аналогичное правило используется и для образования логической суммы в алгебре L_n.

В силу сказанного имеем:

$$\Phi((e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee (e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q})) =$$

$$\Phi(e_{k_1} \vee e_{k_2} \vee \ldots \vee e_{k_r}) = \mathbf{e}_{k_1} \mathbf{e}_{k_2} \ldots \mathbf{e}_{k_r} = \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \ldots \mathbf{e}_{i_p} \vee$$

$$\vee \mathbf{e}_{j_1} \mathbf{e}_{j_2} \ldots \mathbf{e}_{j_q} = \Phi(e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}) \vee$$

$$\Phi(e_{j_1} \vee e_{j_2} \vee \ldots \vee e_{j_q}).$$

Итак, при любых $x, y \in S_n$ имеем:

$$\Phi(x \vee y) = \Phi(x) \vee \Phi(y).$$

Это означает, что любая алгебра идей L_n изоморфна [5, с. 49] канонической алгебре идей $\mathbf{L}_n$. Отсюда непосредственно следует, что все алгебры идей размерности n изоморфны друг другу. Теорема доказана.

Смысл теоремы 3 сводится к тому, что ранее введенному понятию алгебры идей размерности n удовлетворяет единственный абстрактный математический объект. Это означает, что все возможности алгебры идей размерности n отличаются друг от друга лишь используемыми в них обозначениями. По существу же, т.е. в абстрактном смысле, все такие алгебры неразличимы.

Объединяя теоремы о существовании и изоморфизме алгебр идей, мы можем утверждать что *алгебра идей каждой размерности* n $(n \in \{1, 2, \ldots\})$ *существует и единственна (с точностью до изоморфизма).*

Рассмотрим некоторые из возможных интерпретаций алгебры идей размерности n.

а) Алгебра множеств. В качестве носителя S_n алгебры идей L_n при *теоретико-множественной интерпретации* берем систему T_n всех подмножеств множества $R_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ каких-нибудь символов $a_1, a_2, \ldots, a_n$. В роли элементов множества S_n выступают подмножества системы T_n. В роли нулевой идеи алгебры L_n берем пустое множество $\varnothing$. В роли базисных идей $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в алгебре множеств берем одноэлементные множества $\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\}$. Под элементом $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee \ldots \vee e_{i_p}$ в алгебре множеств понимается множество $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_p}\}$. Роль операции дизъюнкции в алгебре множеств выполняет операция объединения множеств. Легко проверить, что все аксиомы алгебры идей L_n в алгебре множеств выполняются.

б) Алгебра двоичных наборов. В роли идей алгебры при *двоично-кодовой интерпретации* берем n-компонентные наборы $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ двоичных цифр $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$. В роли носителя S_n алгебры L_n в алгебре двоичных кодов принимаем n-ную декартову степень множества {0, 1}. Нулевой идеей алгебры L_n при такой интерпретации служит набор $(0,0,...,0)$, составленный из одних нулей. В роли базисных идей используются всевозможные двоичные наборы, в состав которых входит по одной единице $(1,0,0,...,0),(0,1,0,...,0),...,(0,0,0,...,1)$. Под элементом $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ в алгебре двоичных наборов понимается набор, у которого на $i_1, i_2, ..., i_p$-том местах стоят единицы, а на остальных местах — нули. Дизъюнкция идей при двоично-кодовой интерпретации определяется как дизъюнкция двоичных наборов:

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \vee (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) = \\ = (\alpha_1 \vee \beta_1 \vee, \alpha_2 \vee \beta_2, ..., \alpha_n \vee \beta_n).$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы алгебры идей L_n в алгебре n-компонентных двоичных наборов выполняются.

Между алгеброй множеств и алгеброй двоичных наборов существует взаимно однозначная связь. Пусть A — произвольно выбранный элемент алгебры множеств, а $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ — соответствующий ему элемент алгебры двоичных наборов. Тогда: если $a_i \in A$, то $\alpha_i = 1$; если $a_i \notin A$, то $\alpha_i = 0$; если $\alpha_i = 1$, то $a_i \in A$; если $\alpha_i = 0$, то $a_i \notin A$ $(i \in \{1,2,...,n\})$. Например, элементу (a_2, a_3, a_5) шестимерной алгебры множеств соответствует элемент $(0,1,1,0,1,0)$ шестимерной алгебры двоичных наборов. Элементу $(1,0,0,0,1,1)$ алгебры двоичных наборов соответствует элемент (a_1, a_5, a_6) алгебры множеств.

в) Алгебра одноместных предикатов первого порядка [6, с. 10]. Идеями в n-мерной алгебре одноместных предикатов первого порядка служат всевозможные предикаты $P(x)$, заданные на множестве $R_n = (a_1, a_2, ..., a_n)$ букв $a_1, a_2, ..., a_n$. Нулевой идеей здесь служит тождественно ложный предикат. В роли базисных идей используются предикаты узнавания букв $x^{a_1}, x^{a_2}, ..., x^{a_n}$, обращающиеся в 1 соответственно при $x = a_1, x = a_2, ..., x = a_n$ и в 0 — при остальных значениях переменной x. Идеей $e_{i_1} \vee e_{i_2} \vee ... \vee e_{i_p}$ в алгебре одноместных предикатов первого порядка служит предикат $P(x)$, обращающийся в 1 при $x \in \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}\}$ и в 0 — при всех других значениях переменной x. Роль дизъюнкции идей выполняет операция предикатов. Аксиомы 1) – 5) в алгебре одноместных предикатов первого порядка выполняются. Всего имеется 2^n одноместных предикатов первого порядка.

Между алгеброй множеств и алгеброй двоичных наборов, с одной стороны, и алгеброй одноместных предикатов первого порядка, с другой, имеют место следующие связи. Пусть $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_p}\}$ — произвольно выбранный элемент алгебры множеств. Ему взаимно однозначно соответствует элемент $x^{a_{i_1}}, x^{a_{i_2}}, ..., x^{a_{i_p}}$ алгебры одноместных предикатов первого порядка. Нулевому элементу $\varnothing$ алгебры множеств соответствует тождественно ложный предикат 0. Элементу $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ алгебры двоичных наборов взаимно однозначно соответствует элемент $\alpha_1 \cdot x^{a_1}, \alpha_2 \cdot x^{a_2}, ..., \alpha_n \cdot x^{a_n}$ алгебры одноместных предикатов.

г) Алгебра многоместных предикатов первого порядка. Рассмотрим множество N всевозможных предикатов вида $P(x_1, x_2, ..., x_m)$, заданных на декартовом произведении $M = M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$ множеств $M_i = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_i}\}$, где $i \in \{1,2,...,m\}$. Множество N принимаем в роли носителя алгебры идей L_n. Всего в области M имеется $n = n_1 n_2 ... n_m$ наборов, в множестве N содержится всего $2^{n_1 n_2 ... n_m}$ предикатов. Размерностью алгебры многоместных предикатов первого порядка служит число n. Дизъюнкцией идей в алгебре многоместных предикатов первого порядка служит операция дизъюнкции предикатов. Нулевой идеей служит предикат 0, тождественно равный нулю. В алгебре многоместных предикатов первого порядка имеется n базисных идей. В их роли выступают всевозможные предикаты P_j $(j = 1,2,...,n)$, обращающиеся в единицу на единственном наборе значений аргументов $(s_1, s_2, ..., s_m)$:

$$P_j(x_1, x_2, ..., x_m) = \\ = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_m) = (s_1, s_2, ..., s_m), \\ 0, \text{ если } (x_1, x_2, ..., x_m) \neq (s_1, s_2, ..., s_m). \end{cases} \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что все аксиомы алгебры идей размерности n в алгебре многоместных предикатов первого порядка выполняются.

В теоретико-множественной интерпретации алгебре многоместных предикатов первого порядка соответствует алгебра всех подмножеств декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$. Если P и $(s_1, s_2, ..., s_m)$ — соответствующие друг другу элементы алгебры многоместных предикатов первого порядка и алгебры подмножеств декартова произведения $M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$, то взаимно однозначная связь между ними определяется правилом: $P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1$ в том и только в том случае, когда $(s_1, s_2, ..., s_m) \in M_1 \times M_2 \times ... \times M_m$. В двоично-кодовой интерпретации алгебре многоместных предикатов первого порядка соответствует алгебра двоичных кодов длины $n = n_1, n_2, ..., n_m$. Связь между многоместным предикатом первого порядка и соответствующим ему двоичным кодом длины n может быть установлена следующим образом. Двоичному коду $x_1, x_2, ..., x_m$ взаимно однозначно соответствует предикат

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = \bigvee_{a_1, a_2, ..., a_m} \alpha_i x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_m^{a_m}, \quad (2)$$

где i – номер набора [4, с. 65] $(s_1, s_2, ..., s_m)$.

д) Алгебра предикатов произвольного порядка [7, с. 6]. В ней роль идей алгебры L_n выполняют всевозможные предикаты p-го порядка вида

$$f\ (x_{01}, x_{02}, ..., x_{0m_2}, x_{11}, x_{12}, ..., x_{1m_1}, ..., x_{p-1,1}, x_{p-1,2}, ..., x_{p-1m_{p-1}}),$$

заданные на декартовом произведении

$$M = M_0^{m_0} \times M_1^{m_1} \times ... \times M_{p-1}^{m_{p-1}}. \quad (3)$$

Множество M_i $(i = 1, 2, ..., p-1)$ образовано из предикатов i-порядка. Алгебра предикатов p-го порядка имеет размерность

$$n = n_0^{m_0} n_1^{m_1} ... n_{p-1}^{m_{p-1}}. \quad (4)$$

Числа $n_1, n_2, ..., n_{p-1}$ определяются по следующей рекуррентной формуле

$$n_i = 2^{n_0^{m_0} n_1^{m_1} ... n_{p-1}^{m_{p-1}}}. \quad (5)$$

где n_0 – число элементов в множестве M_0. В остальном алгебра предикатов произвольного порядка рассматривается аналогично алгебре многоместных предикатов первого порядка.

е) Алгебра булевых функций [8, с. 200]. К алгебре булевых функций приходим, принимая в алгебре идей L_n в роли S_n множество всех m-местных булевых функций. Размерностью алгебры идей в этом случае служит число $n = 2^m$. Всего в множестве S_n содержится $n = 2^{2^m}$ векторов. Нулевой идеей служит m-местная булева функция, тождественно равная нулю. В роли базисных идей выступают всевозможные булевы функции, обращающиеся в единицу лишь на одном наборе значений аргументов. Всего в алгебре m-местных булевых функций имеется 2^m различных базисных идей. В роли операции дизъюнкции идей в данном случае выступает операция дизъюнкции m-местных булевых функций. При $m = 1$ приходим к *алгебре логики*. В этом случае в роли операции дизъюнкции идей выступает дизъюнкция двоичных знаков: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$. Нулевой идеей служит знак 0, единственной базисной идеей – знак 1.

Выводы

В настоящей статье рассмотрены вопросы формирования и факторизации множества идей испытуемого. Проанализированы проблемы строгости предложенного подхода при постановке эксперимента и формализации субъективных состояний человека. Сформулирован закон однозначности поведения испытуемого. Определены условия, при которых предложенная методика оказывается эффективной.

Аксиоматически введена алгебра идей. Она определяется пятью аксиомами. Доказана теорема о существовании алгебры идей любой конечной размерности.

Рассмотрены вопросы построения формул алгебры идей. Формулы определяются индуктивно с помощью порождающей процедуры. Обосновано, что язык формул логической алгебры любой конечной размерности полон. Доказаны теоремы о стандартной форме формул алгебры идей и об изоморфизме алгебр идей размерности n.

Рассмотрены некоторые из возможных интерпретаций алгебры идей размерности n: алгебра множеств, алгебра двоичных наборов, алгебра одноместных предикатов первого порядка, алгебра многоместных предикатов первого порядка, алгебра предикатов произвольного порядка, алгебра булевых функций.

Литература: 1. *Бондаренко М.Ф.* Модель равенства идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 3-15. 2. *Бондаренко М.Ф.* Алгебра идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 16-27. 3. *Бондаренко М.Ф.* Метод сравнения [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 28-39. 4. *Ляпин Е.С.* Полугруппы. – М.: Физматгиз, 1960. – 235 с. 5. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 476 с. 6. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1984 – 144 с. 7. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. – 159 с. 8. Глушков В.М. Синтез цифровых автоматов. – М.: Физматгиз, 1962. – 321 с.

Поступила в редколлегию 19.03.2010

УДК 519.7

Ізоморфізми алгебри ідей / Бондаренко М.Ф., Шабанов-Кушнаренко С.Ю., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 40–50.

Пропонується біонічний підхід до проблеми побудови штучного интелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів людського інтелекту.

Бібліогр.: 8 найм.

UDC 519.7

The ideas algebra isomorphisms / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – C. 40–50.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Ref.: 8 items.