УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко
ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

ДЕДУКТИВНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ТЕОРИИ ЦВЕТА

Рассмотрены три варианта теории цвета, отличающиеся степенью общности похода к исследованию механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета. Проанализированы возможности и ограничения использования закона Талбота для экспериментального изучения цветового зрения. Сформулированы и обсуждены особенности нескольких систем аксиом, каждая из которых достаточна для построения на ее основе одной из теорий цвета.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

После необходимой математической “артподготовки”, продолжавшейся на протяжении предыдущих трех статей [1-3], мы можем приступить к реализации проекта Шредингера – теоретического обоснования колориметрии. Замысел состоит в том, чтобы построить дедуктивную теорию цвета, основанную на специальной системе аксиом (математически сформулированных предположений), истинность которых могла бы быть подтверждена с помощью физического эксперимента, проводимого строго объективными методами без привлечения каких-либо субъективных свидетельств нашего сознания. Если это удастся сделать, то теория цвета выйдет на такой же высокий уровень, на какой в свое время вышла геометрия Евклида, под которой в данном случае понимается не математическое учение, а теория физического пространства, в котором мы живем.

Как показал многовековой опыт развития науки, аксиоматическое построение любой физической теории всегда желательно. Оно позволяет выявить и математически сформулировать все предположения, лежащие в основе теории. Вследствие этого появляется возможность сделать каждое из предположений объектом тщательной опытной проверки. Выясняя степень соответствия каждого предположения фактическому положению дела, мы получаем возможность оценить, насколько точно теория описывает соответствующий ей физический объект. Анализ отклонений изучаемых физических процессов от требований аксиом обычно указывает пути дальнейшего совершенствования теории.

Важно отметить, что одно и то же физическое явление можно успешно описывать не одной, а сразу несколькими различными аксиоматическими теориями, причем эти теории могут даже логически исключать друг друга. Так, например, в теории относительности свойства физического пространства математически описываются средствами геометрии Римана, в которой некоторые из аксиом геометрии Евклида не выполняются. В этом случае каждая из конкурирующих теорий имеет сравнительно с остальными свои достоинства и недостатки и распространяется на некоторую свою область практического применения. Например, геометрия Евклида используется в тех случаях, когда речь идет об областях пространства, соизмеримых с размерами Земли. Для галактических масштабов более уместной может оказаться геометрия Римана.

1. Математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета

Мы будем рассматривать три варианта теории цвета, обозначая их буквами *A*, *B* и *C*. Теория *A* предназначается для локального исследования механизма формирования цвета. Эту теорию целесообразно применять, если нас интересует изучение реакций зрительного анализатора “в малом”. Зафиксируем зрительный стимул x_0 и охватим его какой-нибудь небольшой областью V . Теория *A* дает ответ, как будет реагировать орган зрения на стимулы из области V . Таким образом, теория *A* изучает реакции глаза на стимулы, находящиеся вблизи от заданного зрительного стимула x_0 . Теория *B* предназначена для глобального изучения механизма формирования цвета. Эту теорию целесообразно применять, если нас интересуют реакции глаза в достаточно больших внутренних областях множества зрительных стимулов. Теория *C* хороша в тех случаях, когда нас интересуют не только внутренние области множества зрительных стимулов, но и сами границы этого множества. Орган зрения перестает формировать цвета при достаточно малом энергетическом уровне зрительных стимулов. Он также отключается (глаз закрывается) или выходит из строя (глаз слепнет) при чрезмерно высоком энергетическом уровне зрительных стимулов. На базе теории *C* можно вести изучение границ области работоспособности органа зрения. Самой простой из этих теорий является теория *A*. Более сложна теория *B*. Еще сложнее теория *C*, она является обобщением теорий *A* и *B*. Теории

A и *B* не вкладываются друг в друга, они представляют собой различные частные случаи теории *C*.

В этом параграфе для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета. Для краткости будем называть их цветовыми стимулами. В теории *A* цветовые стимулы описываем следующим образом. Пусть $b_0(\lambda)$ – спектр некоторого фиксированного светового излучения, вблизи которого мы намереваемся вести локальное исследование реакций глаза. Назовем это излучение базовым. Предполагаем, что при каждом значении λ в видимом диапазоне $[\lambda_1, \lambda_2]$ длин волн функция $b_0(\lambda)$ имеет положительное значение. Пусть $b(\lambda)$ – спектр цветового стимула. В качестве математической характеристики цветового стимула возьмем разность

$$x(\lambda) = b(\lambda) - b_0(\lambda). \tag{1}$$

Таким образом, под цветовым стимулом $x(\lambda)$ в теории *A* понимается отклонение спектра $b(\lambda)$ цветового стимула от спектра $b_0(\lambda)$ базового излучения. Цветовой стимул x_0, соответствующий спектру $b_0(\lambda)$, равен нулю: $x_0(\lambda) = b_0(\lambda) - b_0(\lambda) \equiv 0$.

Заметим, что математическая природа функций $b(\lambda)$ и $x(\lambda)$ различна. В то время, как любая из функций $b(\lambda)$ при всех значениях аргумента λ неотрицательная (так как энергия не может принимать отрицательных значений), функции $x(\lambda)$ при различных значениях λ могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Будем полагать, что каждый цветовой стимул $x(\lambda)$ принадлежит гильбертову пространству $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$, и что вместе взятые цветовые стимулы заполняют все гильбертово пространство. Это означает, что для каждой функции $x(\lambda)$, являющейся цветовым стимулом, существует конечное значение интеграла

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x^2(\lambda) d\lambda, \tag{2}$$

и что каждой функции $x(\lambda)$, для которой существует интеграл (2), соответствует некоторый вполне определенный цветовой стимул.

В теории *B* в качестве математического описания цветового стимула $x(\lambda)$ принимаем спектр соответствующего светового излучения $b(\lambda)$, так что

$$x(\lambda) = b(\lambda). \tag{3}$$

В этом случае полагаем, что каждый цветовой стимул $x(\lambda)$ принадлежит положительному конусу K гильбертова пространства, и что вместе взятые цветовые стимулы заполняют весь положительный конус. Это означает, что: 1) каждая из функций $x(\lambda)$ может принимать лишь неотрицательные значения; 2) для каждой функции $x(\lambda)$, являющейся цветовым стимулом, существует интеграл (2); 3) каждой функции $x(\lambda)$, для которой существует интеграл (2), соответствует некоторый цветовой стимул.

В теории *C* цветовой стимул $x(\lambda)$ математически описываем разностью

$$x(\lambda) = b(\lambda) - b_1(\lambda), \tag{4}$$

где $b_1(\lambda)$ – спектр произвольно выбранного фиксированного (базового) светового излучения. В отличие от спектра $b_0(\lambda)$ спектр $b_1(\lambda)$ может принимать нулевые значения. В частном случае, когда $b_1(\lambda) \equiv 0$, получаем определение (3); если же принято, что $b_1(\lambda) > 0$ при всех λ ($\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$), то приходим к определению (1). В теории *C* будем полагать, что каждый цветовой стимул $x(\lambda)$ принадлежит некоторому выпуклому множеству V гильбертова пространства, и что вместе взятые цветовые стимулы заполняют все множество V. Для каждого $x(\lambda)$, принадлежащего множеству V, существует интеграл (2).

В теории *A* существует произведение любого цветового стимула на произвольное вещественное число и, кроме того, существует сумма любых двух цветовых стимулов. Это значит: если $x(\lambda)$ – цветовой стимул и μ – вещественное число, то $\mu x(t)$ – тоже цветовой стимул; если $x'(\lambda)$ и $x''(\lambda)$ – цветовые стимулы, то $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ – тоже цветовой стимул. В теории *B* цветовые стимулы можно умножать только на произвольные неотрицательные вещественные числа; можно, кроме того, складывать любые цветовые стимулы. В теории *C* для произвольно взятых цветовых стимулов $x'(\lambda)$ и $x''(\lambda)$ можно образовывать линейные комбинации вида $\mu x'(\lambda) + (1-\mu)x''(\lambda)$, где μ – произвольное вещественное число, заключенное в пределах $0 \le \mu \le 1$.

Важно заметить, что математические заменители цветовых стимулов, введенные во всех трех теориях, не вполне точно воспроизводят действительные свойства цветовых стимулов. Так, наше исходное понятие – спектр светового излучения никак не учитывает возможность когерентности или поляризации световых волн. Между тем, когерентное излучение и поляризованный свет, получаемые с помощью лазеров и поляроидов, могут порождать цвета, несколько отличающиеся от тех, которые дает некогерентное и неполяризованное световое излучение того же спектра. Далее, понятие спектра предполагает, что для каждого вещественного значения длины волны λ должно существовать вполне определенное значение спектральной плотности лучистой яркости $b(\lambda)$. Однако современные спектроанализаторы из-за своей ограниченной разрешающей способности и чувствительности могут измерить значения функции $b(\lambda)$ лишь для конечного набора длин волн, причем значения эти выбираются не из континуума, а лишь из конечного множества чисел.

С весьма большой натяжкой можно принять, что любой функции $x(\lambda)$, для которой существует конечное значение интеграла (2), соответствует свой цветовой стимул. Дело в том, что этому условию удовлетворяют не только все функции с конечными значениями, но и весьма экзотические функции, принимающие бесконечные значения на конечном или даже счетном множестве длин волн. Требование о том, что в теории A любой цветовой стимул можно умножить на произвольное вещественное число, также нельзя понимать вполне буквально. Практически оно означает лишь то, что следует ограничиваться выбором достаточно малой области, окружающей световое излучение $b_0(\lambda)$. Тогда умножение цветовых стимулов из этой области на не очень большие по абсолютной величине положительные и отрицательные числа не выведет нас за пределы реальных световых излучений, видимых глазом. В этом же смысле надо понимать и требование теории A о возможности образования суммы двух цветовых стимулов. Два цветовых стимула, взятые из области, окружающей базисное световое излучение $b_0(\lambda)$, дадут сумму в той же области или же вблизи нее.

Требование теории B о возможности умножения цветовых стимулов на любые неотрицательные числа также не вполне точно соответствует действительному положению дел. Так, всегда можно подыскать такой достаточно близкий к нулю множитель, что произведение его на цветовой стимул будет очень мало, и его уже нельзя будет считать цветовым стимулом, так как мы перейдем в область сумеречного зрения, при котором цветовые ощущения вообще не возникают. С другой стороны, можно взять значение множителя настолько большим, что глаз не вынесет столь мощного излучения. Чтобы требования теории B о существовании произведения цветового стимула на неотрицательное число и о существовании суммы цветовых стимулов достаточно хорошо соответствовало действительному положению дела, надо цветовые стимулы брать из области световых излучений, весьма удаленной от границ, определяемых условиями работоспособности зрительного анализатора и неотрицательности спектров световых излучений.

У читателя может возникнуть вопрос, почему именно гильбертово пространство положено в основу всех трех теорий цвета, а не какое-нибудь иное. Следует признать, что такой выбор во многом произволен, он определяется не столько физическими, сколько математическими соображениями. Дело в том, что для достижения изящества математической теории цвета весьма желательно, чтобы для выбранного пространства существовало скалярное произведение. Для гильбертова пространства скалярное произведение существует, и в этом его большое преимущество перед другими видами пространств (например, пространств суммируемых, непрерывных, ограниченных или других видов функциональных пространств). Правда, скалярным произведением обладает также и n-мерное евклидово пространство. Однако для теории цвета оно не всегда удобно, так как обязывает нас ввести конкретное значение размерности пространства n. Число n физически интерпретируется как число точек в спектре. Выбор конкретного значения n для теории цвета не всегда просто выполним, так как он определяется многими факторами, в частности, принятыми на практике способом и точностью измерения спектра. Поэтому гильбертово пространство, не требующее введения числа n, в ряде приложений выглядит более предпочтительным.

С физической точки зрения естественнее, чем гильбертово пространство, выглядит пространство функций, суммируемых с первой степенью, так как для него требуется существование не интеграла (2), а интеграла

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} x(\lambda) d\lambda \,. \tag{5}$$

Это требование легко интерпретируется физически, поскольку интеграл (5) численно равен энергии светового излучения (в теории B). Однако отсутствие скалярного произведения в этом пространстве делает его гораздо менее удобным с математической точки зрения. Серьезным конкурентом гильбертова пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ является пространство обобщенных функций Шварца. Элементом этого пространства является, кроме обычных функций, еще и δ-функция Дирака, которая физически интерпретируется как линия в спектре. В гильбертовом же пространстве спектральные линии – это “незаконные” объекты. Представляется, что одним из важных направлений дальнейшего развития теории цвета является ее разработка на основе пространства обобщенных функций.

Остановимся теперь на вопросе о физической реализации операций. Эти операции можно свести к операциям над спектрами световых излучений. В теории A сумма $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ цветовых стимулов $x'(\lambda)$ и $x''(\lambda)$ выражается через спектры $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ световых излучений, соответствующих этим стимулам, и через спектр $b_0(\lambda)$ базового излучения следующим образом:

$$x'(\lambda) + x''(\lambda) = b'(\lambda) - b_0(\lambda) + b''(\lambda) - b_0(\lambda) = \\ = b'(\lambda) + b''(\lambda) - 2\,b_0(\lambda)\,.$$

Спектр светового излучения, соответствующего цветовому стимулу $x'(\lambda) + x''(\lambda)$, равен

$$x'(\lambda) + x''(\lambda) + b_0(\lambda) = b'(\lambda) + b''(\lambda) - b_0(\lambda)\,. \tag{6}$$

Пусть цветовому стимулу $x(\lambda)$ соответствует спектр $b(\lambda)$, тогда произведение $\mu x(\lambda)$ выразится через $b(\lambda)$ и $b_0(\lambda)$ так:

$$\mu x(\lambda) = \mu(b(\lambda) - b_0(\lambda)) - \mu b(\lambda) - \mu b_0(\lambda).$$

Спектр светового излучения, соответствующего цветовому стимулу $\mu x(\lambda)$, равен

$$\mu x(\lambda) + b_0(\lambda) = \mu b(\lambda) - (\mu - 1) b_0(\lambda). \qquad (7)$$

В теории *B* цветовому стимулу $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ соответствует световое излучение со спектром $b'(\lambda) + b''(\lambda)$, а стимулу $\mu x(\lambda)$ – излучение со спектром $\mu x(\lambda)$. В теории *C* определение спектров, соответствующих стимулам $x'(\lambda) + x''(\lambda)$ и $\mu x(\lambda)$, можно выполнять по формулам (6) и (7) после замены $b_0(\lambda)$ на $b_1(\lambda)$.

Умножение спектра излучения на неотрицательный множитель физически достигается диафрагмированием светового потока или изменением расстояния от источника света до освещаемой им поверхности. Сложение спектров можно осуществить, совмещая в пространстве соответствующие световые потоки. Большие возможности для формирования световых излучений с нужным спектром дает практическое использование закона Талбота, известного в трех вариантах: спектральном, временном, пространственном. Сущность спектрального варианта закона Талбота иллюстрируется диаграммами рис. 1.

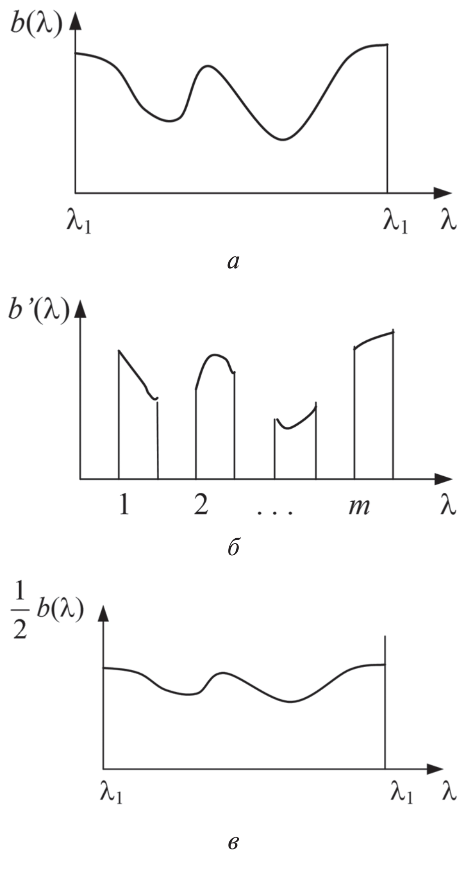

Рис. 1

На диаграмме рис. 1*а* показан спектр $b(\lambda)$ произвольно выбранного светового излучения. На диаграмме рис. 1*б* этот спектр “прорежен”, в результате получен спектр $b'(\lambda)$. “Прореженный” спектр получен следующим образом: интервал $[\lambda_1, \lambda_2]$ разбит на m равных участков, на левой половине каждого участка принято $b'(\lambda) \equiv 0$, на правой $b'(\lambda) = b(\lambda)$. Световое излучение с таким спектром можно получить практически, если на пути светового потока, разложенного в спектр, поставить заслонку, имеющую форму гребешка. Если число m зубцов такого гребешка взять достаточно большим, то глаз воспримет излучение $b'(\lambda)$ точно так же, как и излучение со спектром $\frac{1}{2}\, b(\lambda)$ (диаграмма рис. 1*в*)). В этом и состоит эффект закона Талбота. Согласно этому закону, излучение, спектр которого достаточно часто колеблется по мощности при движении вдоль оси длин волн, воспринимается глазом точно таким же, как если бы этот спектр был усреднен и сглажен.

Если на пути светового потока, разложенного в спектр $b(\lambda)$, поставить заслонку, у которой зубцы имеют общую ширину μ, а просвет между ними – ширину 1 – μ, измеренную в долях суммарной ширины зубца и просвета, то мы получим излучение, эквивалентное по зрительному восприятию излучению со спектром $\mu\, b(\lambda)$. Таким образом, мы получаем возможность умножать спектр на любое число μ, находящееся в пределах от 0 до 1. Более того, если ширину “зубцов” μ изменять в зависимости от длины волны λ, по некоторому желаемому закону $\mu = \mu(\lambda)$, то из излучения $b(\lambda)$ получим такое излучение, которое будет эквивалентно по восприятию световому излучению со спектром $b'(\lambda) = \mu(\lambda) b(\lambda)$. На получаемые таким образом излучения накладывается одно ограничение: при любых λ должно выполняться $b'(\lambda) \le b(\lambda)$. Если требуется излучение $b(\lambda)$ превратить в излучение, эквивалентное по зрительному восприятию излучению $b'(\lambda)$, то следует взять гребенчатую заслонку, ширина зубцов которой изменяется по закону $\mu(\lambda) = \dfrac{b'(\lambda)}{b(\lambda)}$.

Временной вариант закона Талбота состоит в том, что достаточно быстрые периодические световые мелькания для глаза сливаются в ровный немигающий свет, точно такой же, как если бы наблюдателю было предъявлено одно усредненное излучение. Пусть в первую фазу достаточно быстрого мелькания, длящуюся μ-ю долю периода, на глаз наблюдателя действует излучение со спектром $b_1(\lambda)$, а во вторую – $b_2(\lambda)$. Тогда в сознании наблюдателя возникнет зрительное ощущение, точно такое же, как от излучения со спектром:

$$\mu\, b_1(\lambda) + (1 - \mu)\, b_1(\lambda). \qquad (8)$$

Таким образом, временной вариант закона Талбота дает возможность получать излучение, эквивалентное по своему действию на глаз некоторой линейной комбинации исходных световых излучений. Пространственный вариант закона Талбота имеет аналогичное содержание. Чтобы с его помощью получить излучение, эквивалентное по своему действию на глаз излучению со спектром (8), нужно создать на плоскости достаточно мелкую однородную мозаику из источников света двух типов, причем источники первого типа формируют излучения со спектром $b_1(\lambda)$, второго – $b_2(\lambda)$. Суммарные площади рабочих поверхностей источников первого и второго типа должны находиться в пропорции $\mu : 1 - \mu$. Методы физической реализации операций над излучениями, использующие закон Талбота, весьма удобны на практике, однако в теоретическом отношении они не безупречны, так как опираются на некоторые свойства зрительного анализатора, которые сами нуждаются в математической теории, основанной на экспериментального проверяемых постулатах.

2. Аксиомы теории цвета

В этом параграфе сформулированы и рассмотрены несколько систем аксиом, каждая из которых достаточна для построения на ее основе одной из теорий цвета (имеются в виду теории A, B и C).

Аксиома предиката. Существует однозначный предикат $y = \Phi\,(\,b_1(\lambda)\,, b_2(\lambda)\,)$, заданный на декартовом квадрате: 1) пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории A; 2) положительного конуса K пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории B; 3) некоторого выпуклого множества V пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории C.

Здесь под функциями имеются в виду цветовые стимулы, предъявленные наблюдателю на полях сравнения, под значением y предиката Φ понимается двоичный ответ наблюдателя. Значению $y = 1$ соответствует ответ “да”, означающий совпадение цветов на полях сравнения, значению $y = 0$ соответствует ответ “нет”, означающий различие цветов. Предикат Φ интерпретируем как закон функционирования наблюдателя в процессе выработки им сигнала y в ответ на предъявленную ему пару цветовых стимулов ($x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$). Требование существования предиката Φ означает, что при предъявлении любой пары цветовых стимулов из указанной области наблюдатель всегда ставит им в соответствие один из ответов “да” или “нет”. Требование однозначности предиката Φ означает, что при повторном предъявлении той же самой пары цветовых стимулов наблюдатель реагирует на нее тем же самым ответом, что и при первом предъявлении.

Аксиома предиката выполняется не всегда. Так, она ложна для слепого или спящего человека, а также для наблюдателя, не желающего участвовать в колориметрическом эксперименте. В этих и других подобных случаях реакция наблюдателя на пару цветовых стимулов не определена, а, следовательно, предикат Φ не существует. Аксиома предиката не будет выполняться также и в том случае, если наблюдатель задался целью давать ответы наобум, вне зависимости от предъявленных ему цветовых стимулов. В этом случае предикат не будет однозначным.

Опыт колориметрических испытаний свидетельствует о том, что даже в нормальных условиях аксиома предиката выполняется не вполне строго. Это проявляется в том, что на границе между равенством и неравенством цветов на полях сравнения существует зона, в которой ответы наблюдателя становятся случайными, и таким образом требование однозначности нарушается. Размер зоны неоднозначности невелик, однако зона, в которой имеет место однозначный ответ “да”, еще меньше.

Это положение иллюстрируется диаграммой, представленной на рис. 2. На ней изображена зависимость частоты p ответа “да” от параметра $\mu - 1$, которая наблюдалась в одном из опытов на колориметре Демкиной. В опыте на обоих полях предъявлялись излучения со спектрами $b(\lambda)$ и $\mu\ b(\lambda)$. Каждая точка диаграммы построена на базе ста предъявлении сигналов. Выбор конкретного спектра особого значения не имеет, так как вид кривой мало зависит от $b(\lambda)$. Вероятностный ответ наблюдается при различиях в мощности излучения в пределах от 0,1 до 0,6 %, то есть в зоне 0,5%.

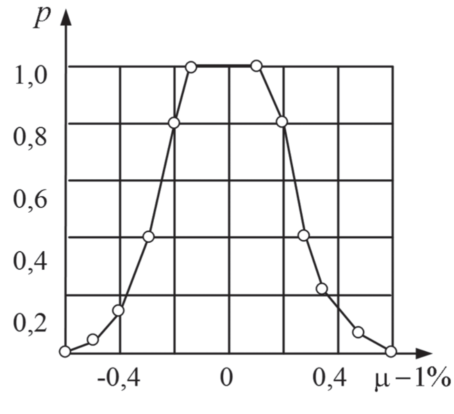

Рис. 2

В то же время зона однозначного ответа “да” составляет всего 0,2%. Приведенная диаграмма, между прочим, показывает, что привлечение глубокой статистической обработки ответов наблюдателя позволяет довести точность установки светового излучения на визуальное равенство по цвету до очень высокого уровня. В описанных выше опытах значение множителя μ, отрегулированное “по цвету”, отличалось при повторных испытаниях, как правило, не более, чем на 0,01%. Далеко не в каждом чисто физическом эксперименте можно достичь такого высокого уровня точности измерений, как в психофизическом колориметрическом опыте!

Аксиома рефлексивности. Для любых $x(\lambda)$ $\Phi($ $x(\lambda)$, $x(\lambda)$ $)=1$.

Аксиома симметричности. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ из $\Phi($ $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ $)=1$ следует $\Phi($ $x_2(\lambda)$, $x_1(\lambda)$ $)=1$.

Аксиома транзитивности. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ из $\Phi($ $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ $)=1$ и $\Phi($ $x_2(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ $)=1$ следует $\Phi($ $x_1(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ $)=1$.

Смысл требования рефлексивности состоит в том, что любые два световые излучения, имеющие одинаковые математические описания, всегда должны порождать равные цвета. О выполнении этого требования можно утверждать лишь с целым рядом оговорок. Рефлексивность заведомо не выполняется, если поля сравнения окружены различными фонами (например, красным и синим). В этом случае вступает в действие механизм зрительной индукции, вследствие чего идентичные световые излучения дают совершенно различные цвета. Чтобы добиться рефлексивности, поля сравнения выбирают не очень большими по угловым размерам и располагают рядом, симметрично относительно друг друга. Поля сравнения помещают в центре поля зрения и окружают нулевым (черным) или произвольным равномерным фоном. Однако даже в этих условиях рефлексивность соблюдается не всегда. Так, наблюдались случаи неравенства цветов при предъявлении наблюдателю поляризованного и неполяризованного света с одинаковым спектром. Если же предъявить когерентное излучение, состоящее из двух гармоник, близких по частоте, то можно наблюдать цветовые биения (периодическое нарастание и убывание яркости цвета во времени).

Если условия рефлексивности обеспечены, то требования симметричности и транзитивности, как показывает практика колориметрических измерений, выполняются автоматически. Впрочем, при поочередном уравнивании по цвету соседних стимулов в последовательности $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$,..., $x_n(\lambda)$, если число n велико, ошибки измерения могут накопиться, и стимулы $x_1(\lambda)$, $x_n(\lambda)$, вопреки транзитивности, в этом случае окажутся разноцветными.

Аксиомам рефлексивности, симметричности и транзитивности должны удовлетворять все три теории зрения для соответствующих им областей определения предиката Φ. Из этих аксиом чисто логически вытекает, что предикат Φ может быть представлен в следующем виде:

$$\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = D(F(x_1(\lambda)), F(x_1(\lambda))). \tag{9}$$

Здесь F – некоторая функция, заданная на пространстве $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ в теории A , на положительном конусе H – в теории B или на выпуклом множестве V – в теории C . Функцию F интерпретируем как закон преобразования светового излучения, воздействующего на глаз наблюдателя, в цвет зрительного ощущения, осуществляемого зрительной системой человека. Значение функции $F(x(\lambda))$ при заданном цветовом стимуле $x(\lambda)$ понимаем как цвет стимула $x(\lambda)$, возникающий в сознании наблюдателя. Буквой D обозначен предикат равенства

$$D(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v, \\ 0, & \text{если } u \neq v. \end{cases} \tag{10}$$

Предикат $y = D(u, v)$ интерпретируем как операцию сравнения цветов u и v , производимую сознанием наблюдателя и завершающуюся выработкой наблюдателем сигнала y (“да” – если цвета совпадают и “нет” – в противном случае).

Конкретный вид функции F из перечисленных выше аксиом не удается извлечь, поскольку в них содержится недостаточный объем информации о свойствах зрительного анализатора. Для этого нужны дополнительные аксиомы, которые приводятся ниже. Если какая-либо из этих аксиом используется в теории A , то подразумевается, что все фигурирующие в ней цветовые стимулы принадлежат пространству $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$; в теории B – положительному конусу K пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$; в теории C – некоторому выпуклому множеству V пространства $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$. Область $L^2[\lambda_1, \lambda_2]$ назовем полем теории A , область K – полем теории B , область V – полем теории C .

Аксиома равноделения. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 1$ и $\Phi(x_3(\lambda), x_4(\lambda)) = 1$ следует

$$\left(\frac{x_1(\lambda) + x_3(\lambda)}{2}, \frac{x_2(\lambda) + x_4(\lambda)}{2} \right) = 1.$$

Аксиома равноделения может быть проинтерпретирована следующим образом. Предположим, что мы сформировали на полях сравнения два одноцветных стимула $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$ (например, оба зеленые) и еще два одноцветных стимула $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ (например, оба красные). Аксиома равноделения гласит, что полусуммы стимулов, сформированных соответственно на левом и правом полях сравнения $(x_1(\lambda) + x_3(\lambda)) / 2$ и $(x_2(\lambda) + x_4(\lambda)) / 2$ всегда будут порождать в создании того же самого наблюдателя одинаковые цвета (например, желтые). Аксиома равноделения используется во всех трех теориях.

Аксиома суммы. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 1$ и $\Phi(x_3(\lambda), x_4(\lambda)) = 1$ следует $\Phi(x_1(\lambda) + x_3(\lambda), x_2(\lambda) + x_4(\lambda)) = 1$.

Аксиома суммы означает, что суммы одинаково выглядящих цветовых стимулов выглядят одинаково. Эта аксиома используется в теориях A и B .

В теории C аксиома суммы выполняется не всегда: можно найти стимулы $x_1, x_2 \in V$ такие, что их сумма выйдет за пределы выпуклого множества, то есть $x_1, x_2 \notin V$.

Аксиома деления отрезка. Для любых $x_1(\lambda)$, $x_2(\lambda)$, $x_3(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ из $\Phi(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = 1$ и $\Phi(x_3(\lambda), x_4(\lambda)) = 1$ следует $\Phi(\gamma x_1(\lambda) + (1-\gamma)x_3(\lambda),\ \gamma x_2(\lambda) + (1-\gamma)x_4(\lambda)) = 1$ при любом вещественном γ, заключенном в интервале $\gamma : 1-\gamma$.

Эта аксиома означает, что если мы соединим в поле цветовых стимулов точки $x_1(\lambda)$, $x_3(\lambda)$ и $x_2(\lambda)$, $x_4(\lambda)$ отрезками прямых и разделим эти отрезки в отношении $\gamma : 1-\gamma$, то цветовые стимулы, соответствующие точкам деления отрезков, всегда будут выглядеть для наблюдателя одноцветными. Аксиома деления отрезка используется только в теории C, хотя она справедлива во всех трех теориях.

Выводы

Введены три варианта теории цвета, предназначенные для локального, глобального и полного исследования механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета. Проанализированы возможности и ограничения использования закона Талбота для экспериментального изучения цветового зрения. Сформулированы и обсуждены особенности нескольких систем аксиом, каждая из которых достаточна для построения на ее основе одной из теорий цвета.

Список литературы: **1.** *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3.** *Бондаренко, М.Ф.* Интегральные представления линейных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78.

Поступила в редколлегию 27.04.2011.

УДК 519.7

Дедуктивна побудова теорії кольору / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 79-85.

Запропоновано три варіанти теорії кольору, що відрізняються рівнем узагальнення підходу до дослідження механізму формування кольору. Сформульовані і обговорені особливості декількох систем аксіом, кожна з яких достатня для побудови на її основі будь-якого з трьох варіантів теорії кольору.

Іл. 2. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Deductive construction of colour theory / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 79-85.

Three variants of colour theory with different generality degree are offered to colour forming mechanism research. Formulated and discussed to the feature of a few axioms systems, each of which suffices for a construction on it basis of any colour theory three variants.

Fig. 2. Ref.: 3 items.