ПРО РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Дуба Т.В.
Науковий керівник – канд. фіз-мат. наук., доц., проф. Колосова С.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. Прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: tetiana.duba@nure.ua

In this paper we apply the Bubnov-Galjorkin's method to solve the initial boundary value problem for non-stationary partial differential equations of parabolic type with a non-local condition/ The proposed algorithm allows to get a solution in an analytical king at any values of permanent parameters and functions $u(x,t)$. The supposition for the choose of the coordinate functions is suggested.

Велика кількість явищ у різних областях науки і техніки достатньо повно може бути описана за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних, точні розв'язки яких вдається отримати для досить вузького класу задач. У даній роботі розглядається застосування проекційного методу Бубнова-Гальоркіна до початково-крайової задачі теплопровідності з нелокальною умовою, яку ми назвали нелокальною умовою другого типу на відмінну від умови, розглянутої у [1].

Розглянемо початково-крайову задачу

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0)+f(x,t)=\frac{\partial u}{\partial t}\quad \forall x\in(0,l),\quad t>0, \tag{1}$$

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\ u\big|_{x=0}=0,\ \int_0^l x\cdot u(x,t)dx=N(t), \tag{2}$$

де $u(x,t)$ - температура точки x у момент часу t, $\varphi(x)$ - розподіл температур в точках стержня в початковий момент часу $t=0$, $a^2=const$ - коефіцієнт температуропровідності, $h=\dfrac{\alpha}{c\rho}=const$, ρ - густина маси, c - питома теплоємність, α - коефіцієнт теплообміну між поверхнею стержня та навколишнім середовищем з температурою u_0, $N(t)$- загальна кількість тепла стержня у момент часу t [1, 2].

Шукаємо розв'язок задачі (1), (2) $u(x,t)\in C(\overline{B})$, $\overline{B}=\left\{(x,t)\middle|0\le x\le l,t\ge 0\right\}$. При цьому повинні виконуватися умови узгодженості $\varphi(0)=0$, $\int_0^l\varphi(x)dx=N(0)$.

У задачі (1), (2) зробимо заміну

$$u(x,t)=v(x,t)+W(x,t), \tag{3}$$

$$W(x,t)=\frac{3x}{l^3}N(t). \tag{4}$$

що призводить до наступної задачі з однорідними крайовими умовами:

$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-h(v-u_0)+F(x,t)=\frac{\partial v}{\partial t}\ \ \forall x\in(0,l),\quad t>0\,. \tag{5}$$

$$v|_{t=0}=\varphi(x)-\frac{3x}{l^3}N(0),\ \ v|_{x=0}=0,\ \ \int_0^x x\cdot v(x,t)dx=0\,. \tag{6}$$

де $F(x,t)=f(x,t)-\frac{3hx}{l^3}N(t)-\frac{3x}{l^3}N'(t).$

За координатні функції для розв'язання рівняння $Au=f$, де A - додатно визначений оператор, пропонується взяти систему власних елементів оператора $\bar{A}$, схожого та спорідненого з оператором A [3]. Введемо у розгляд оператор $\bar{A}v=a^2\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}$, $D(\bar{A})=\{v|v(x,t)\in L_2(0,l),\ \forall t\ge 0,\quad v(x,t)\in C^2(B),\quad v(x,t)\in C(\bar{B}),$ $v(0,t)=0,\ \int_0^l xv(x,t)dx=0\ \forall t\ge 0\}$. Відшукаємо власні числа та власні функції оператора $\bar{A}$. Маємо задачу $\phi''(x)+\lambda\phi(x)=0\ \ \forall x\in(0,l),\ \phi(0)=0,\ \int_0^l x\phi(x)dx=0$, звідки $\lambda_k=\left(\frac{\mu_k}{l}\right)^2$, $\phi_k(x)=\sin\frac{\mu_k x}{l}$, $k=1,2,3,...$, тут $\mu_k=\sqrt{\lambda_k}$ Тому що оператори A та $\bar{A}$ є подібними і порідненими, за координатні функції пропонуємо взяти $\varphi_k(x)=\sin\frac{\mu_k x}{l}$, $k=1,2,....$

Обираючи для проведення обчислювальних експериментів дані задачі, треба мати на увазі умови узгодження. Надалі вважаємо $l=1$. Нехай $\varphi(x)=-3x^2+6x$, при цьому у початковий момент часу $t=0$ маємо загальну кількість тепла стержня $N(0)=\int_0^1 x(-3x^2+6x)dx=1.25$. Наведемо деякі можливі вигляди функції $N(t)$, яка повинна задовольняти умову узгодження $\int_0^1\varphi(x)dx=N(0)$: $N(t)=\left\{\frac{5}{4},\frac{5}{4}(t+1),\frac{5}{4}(t^2+1),\frac{5}{4}(t+1)^2,\frac{5}{4}+\sin t,...\right\}.$

Запропонований підхід дозволяє розв'язувати задачу (1), (2) з різними даними. При цьому в алгоритмі задачі достатньо просто замінити одні дані іншими, що дозволить проводити математичне моделювання багатьох технологічних процесів.

1. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическими краевыми условиями // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. № 2. С. 294-304.

2. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. М.: Физматлит, 2004. 688 с.

3. *Михлин С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с.