МЕТОДИ КОНСТРУКТИВНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вороненко М.Д.
Науковий керівник – канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: mykyta.voronenko@nure.ua

The problem of mathematical modeling of many stationary processes leads to the need for finding positive solution of the first boundary-value problem for equation $-u'' = f(x,u)$, where $f(x,u)$ – a nonnegative and continuous function in the set of variables $x \in (0,1)$, $u \geq 0$. When using two-way iterative methods, two iterative sequences (upper and lower solutions) are constructed, which on both sides coincide with the exact solution of the problem, which allows at each step of the iterative process to have a posteriori estimate of the error.

The effectiveness of the developed method is demonstrated by the computational experiment

У сучасній науці при математичному моделюванні високотемпературних процесів у хімії, фізиці плазми, теорії горіння приходять до необхідності розв'язання крайових задач для нелінійного звичайного диференціального рівняння. Точні розв'язки таких крайових задач відомі лише у поодиноких випадках. Крім того, до певних складностей приводить вирішення питання про існування та єдність розв'язку. У зв'язку з цим актуальною науковою проблемою є розробка методів конструктивного дослідження нелінійних крайових задач, тобто таких, які не тільки дозволяють з'ясувати питання існування розв'язку, але й пропонують алгоритм його знаходження. Серед таких методів особливе місце належить двобічним методам, які дозволяють оцінити невідомий розв'язок знизу та зверху, а отже, пропонують зручну апостеріорну оцінку похибки наближеного розв'язку.

Розглянемо задачу

$$-u'' = u^p, \ x \in (0,1), \tag{1}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{2}$$

На конусі K невід'ємних у $C[0,1]$ функцій крайова задача (1), (2) еквівалентна нелінійному інтегральному рівнянню

$$u(x) = \int_0^1 G(x,s) u^p(s) ds,$$

де $G(x,s) = \begin{cases} x(1-s), & 0 \leq x \leq s, \\ s(1-x), & s \leq x \leq 1, \end{cases}$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ на відрізку $[0,1]$.

Розглянемо оператор T, що діє у $C[0,1]$ за правилом

$$u(x)=\int_0^1 G(x,s)u^p(s)ds.$$

Можна довести, що оператору T на конусі K має такі властивості: є додатнім, цілком неперервним, монотонним та u_0-вогнутим, де $u_0(x)=\int_0^1 G(x,s)ds$.

Для монотонного оператора T побудуємо інваріантний конусний відрізок $<v_0,w_0>$, де $v_0(x)=\alpha x(1-x)$, $w_0(x)=\beta x(1-x)$, а константи α и β ($0\le\alpha<\beta$) вибираються з умов $Tv_0\ge v_0$, $Tw_0\le w_0$. Далі розглянемо схему послідовних наближень

$$v_{n+1}(x)=\int_0^1 G(x,s)v_n(s)^p\,ds,\quad w_{n+1}(x)=\int_0^1 G(x,s)w_n(s)^p\,ds,\ n=0,1,2,\dots.$$

Послідовність $\{v_n(x)\}$ не спадає за конусом K, а послідовність $\{w_n(x)\}$ не зростає за конусом K, тобто мають місце нерівності

$$v_0\le v_1\le\ldots\le v_n\le\ldots\le u^*\le\ldots\le w_n\le\ldots\le w_1\le w_0,$$

де u^* – точний розв’язок задачі (1), (2).

Отже, побудовано дві ітераційні послідовності, що збігаються до точного розв’язку задачі (1), (2) зверху і знизу відповідно. Наближеним розв’язком крайової задачі (1), (2) на n-й ітерації буде функція $u_n=\dfrac{v_n+w_n}{2}$, при цьому похибка оцінюється нерівністю $\left\|u_n-u^*\right\|\le\dfrac{1}{2}\max\limits_{x\in[0,1]}(w_n(x)-v_n(x))$.

Наближені розв’язки знаходились з точністю $\varepsilon=10^{-4}..10^{-7}$ в залежності від $p\in(0,1)$. У таблиці наведена залежність норми наближеного розв'язку від p.

p	0,2	0,4	0,6	0,8
$\lVert u_n\rVert$	0,0702	0,0269	0,00394	$0{,}129\cdot10^{-4}$

1. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

2. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.