МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ МЕТОДАМИ R-ФУНКЦИЙ И ГАЛЕРКИНА

Ламтюгова С.Н.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет
городского хозяйства им. А.Н. Бекетова
(61002, . Харьков , ул. Маршала Бажанова, 17, каф. Высшей математики,
тел. (057) 707-31-30)
e-mail: maliatko@gmail.com

In the paper the nonlinear stationary problem of flow around body of revolution is considered. For solving the problem it is proposed to apply the R-functions and nonlinear Galerkin method. Computational experiment has been conducted for the tasks of flow around one, two touching and two jointed spheres at different Reynolds numbers.

В работе рассматривается нелинейная стационарная задача обтекания тела вращения потоком вязкой несжимаемой жидкости [1, 2]:

$$\nu E^2\psi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial E\psi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial E\psi}{\partial\theta}\right) +$$

$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)E\psi \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\psi\cdot r^{-2} = \frac{1}{2}U_\infty\sin^2\theta, \tag{3}$$

где $\nu = \mathrm{Re}^{-1}$ – коэффициент вязкости, Re – число Рейнольдса, $\psi = \psi(r,\theta)$ – функция тока, $E\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)$, $E^2\psi = E\left(E\psi\right)$, $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль, U_∞ – невозмущенная скорость жидкости на бесконечности.

Приближенное решение поставленной задачи ищем в виде функции $\psi = \omega_M^2(\psi_0 + \Phi_1) + \omega_M^2(1-\omega_M)\Phi_2$, которая при любом выборе достаточно гладких функций Φ_1 и Φ_2 ($\Phi_1\cdot r^{-2}\to 0$ при $r\to+\infty$) точно удовлетворяет краевым условиям (2) и условию на бесконечности (3) [3]. Здесь $\psi_0 = \frac{1}{4}U_\infty(r-R)^2\left(2+\frac{R}{r}\right)\sin^2\theta$ – решение Стокса для задачи про обтекание сферы радиуса R (сфера радиуса R целиком лежит внутри обтекаемого тела), $\omega_M = f_M(\omega)$, $f_M(\omega) = \begin{cases} 1-\exp(M\omega(\omega-M)^{-1}), & 0\le\omega<M, \\ 1, & \omega\ge M, \end{cases}$ а ω – функ-

ция, обладающая свойствами: 1) $\omega > 0$ вне $\overline{\Omega}$; 2) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$; 3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$ – строится с использованием конструктивного аппарата теории *R*-функций [4].

Для аппроксимации неопределенных компонент Φ_1 и Φ_2 используется нелинейный метод Галеркина [5]. Функции Φ_1 и Φ_2 аппроксимируются выражениями вида

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k \cdot \varphi_k \,, \quad \Phi_2 = \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j \cdot \tau_j \,,$$

где $\{\varphi_k(r,\theta)\} = \left\{ r^{1-k} J_k(\cos\theta), k = 2,3,...; r^{3-k} J_k(\cos\theta), k = 4,5,... \right\}$,

$\{\tau_j(r,\theta)\} = \left\{ rJ_2(\cos\theta), J_3(\cos\theta), r^j J_j(\cos\theta), r^{j+2} J_j(\cos\theta), j = 2,3,... \right\}$,

$J_k(\cos\theta)$ – функции Гегенбауэра первого рода.

Вычислительный эксперимент был проведен для задачи обтекания одной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, двух соприкасающихся сфер $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$, $(x+1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ и двух сочлененных сфер $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $U_\infty = 1$, $M = 10$, $m_1 = 10$, $m_2 = 14$ при разных числах Рейнольдса. На рис. 1 приведены линии уровня функции тока для двух соприкасающихся сфер при $\mathrm{Re} = 70$, на рис. 2 – двух сочлененных сфер при $\mathrm{Re} = 30$.

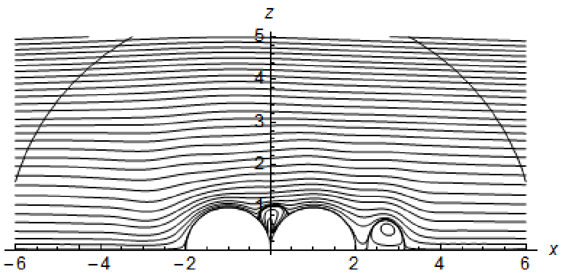

Рис. 1

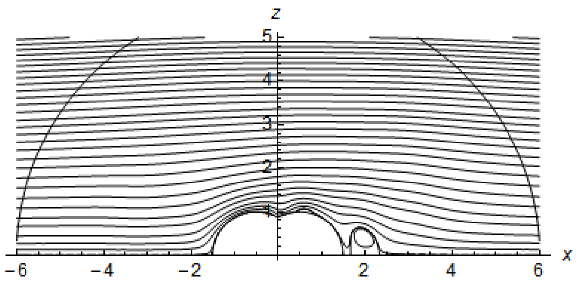

Рис. 2

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

2. Химическая гидродинамика: справочное пособие / А.М. Кутепов, А.Д. Полянин, З.Д. Запрянов [и др.]. – М.: Квантум, 1996. – 336 с.

3. Lamtyugova S.N. Numerical analysis of the external slow flows of a viscous fluid using the R-function method / S.N. Lamtyugova, M.V. Sidorov // J. Eng. Math. – 2015. – 91 (1). – P. 59–79. (DOI: 10.1007/s10665-014-9746-x)

4. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

5. Приближенное решение операторных уравнений. / Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. [и др.]. – М.: Наука, 1969. – 420 с.