

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ТЕПЛА У ПЛАСТИНЦІ

Мартиненко М.С.

Наукові керівники – канд. техн. наук, доц. Гибкіна Н.В.,
канд. фіз.-мат. наук, доц. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки
(61166, Харків, пр. Науки, 14, каф. прикладної математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: mykhailo.martynenko@nure.ua

One of the possible statements of the optimal control of homogeneous plate heating is considered in the article. Control of the plate temperature is set up by setting heating sources inside the plate, which at the final moment of time shall set the temperature inside the plate as close to the specified temperature distribution as possible.

Розглянемо задачу оптимального керування процесом нагрівання однорідної пластинки. Модель процесу розповсюдження тепла у однорідній пластинці за наявності внутрішніх джерел нагрівання описується неоднорідним рівнянням теплопровідності виду [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(t, x, y) + p(t, x, y), \quad (1)$$

$$x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad t \in (0, T],$$

з початковою та крайовими умовами

$$u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \alpha u \Big|_{\partial \Omega} = 0, \quad (2)$$

де $f(t, x, y)$ – задана функція з $L_2(Q)$, а $p(t, x, y)$ – керуюча функція, $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, T]$, $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$. Припустимими керуваннями вважатимемо функції $p(t, x, y) \in L_2(Q)$, які майже всюди у Q задовольняють умову

$$|p(t, x, y)| \leq 1.$$

Задача оптимального керування полягає у тому, щоб знайти таке припустиме керування $p^*(t, x, y)$ та відповідний йому розв'язок $u^*(t, x, y)$ задачі (1) – (2), за яких функціонал якості

$$I = \int_0^a \int_0^b [u[T, x, y] - z(x, y)]^2 dx dy + \beta \int_0^a \int_0^b \int_0^T p^2(t, x, y) dx dy dt.$$

Аналогічно до розв'язання одновимірного випадку у [2], оптимальне керування отримаємо у вигляді

$$p^*(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\lambda^2 \mu_{mn}^2 q_{mn}}{2\beta \lambda^2 \mu_{mn}^2 + 1 - e^{-2\lambda^2 \mu_{mn}^2 T}} \cdot e^{\lambda^2 \mu_{mn}^2 (t-T)} \cdot \Phi_{mn}(x, y),$$

де

$$q_{mn} = z_{mn} - \int_0^T f_{mn}(\tau) e^{\lambda^2 \mu_{mn}^2 (\tau - T)} d\tau,$$

$$\Phi_{mn}(x, y) = \left(\sqrt{\rho_n} \cos \sqrt{\rho_n} x + \alpha \sin \sqrt{\rho_n} x \right) \cdot \left(\sqrt{\eta_m} \cos \sqrt{\eta_m} y + \alpha \sin \sqrt{\eta_m} y \right),$$

$$\mu_{mn} = \sqrt{\eta_{mn} + \rho_{mn}},$$

$$\rho_n = \frac{\xi_n^2}{a^2}, \quad \xi_n - n\text{-й додатний корінь рівняння } \operatorname{tg} \xi = \frac{2\alpha a \xi}{\xi^2 - \alpha^2 a^2},$$

$$\eta_m = \frac{\zeta_m^2}{b^2}, \quad \zeta_m - m\text{-й додатний корінь рівняння } \operatorname{tg} \zeta = \frac{2\alpha b \zeta}{\zeta^2 - \alpha^2 b^2}.$$

Обчислювальний експеримент було проведено при $a=1$, $b=1$, $T=1$. Бажаний розподіл температур у кінцевий момент часу має вигляд $z(x, y) = xy(a-x)(b-y)$. Нагрівання виконується лише за рахунок внутрішніх джерел тепла. Функція нагрівання має вигляд $f(t, x, y) = xyt$. Коефіцієнт $\beta = 0,01$. Графіки бажаного й фактичного розподілів наведено на рис. 1, 2, їх порівняння наведено на рис. 3.

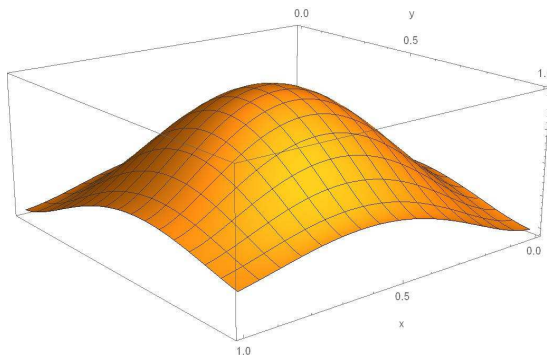


Рис. 1. Розподіл температур $u(T, x, y)$ у пластинці у кінцевий момент часу

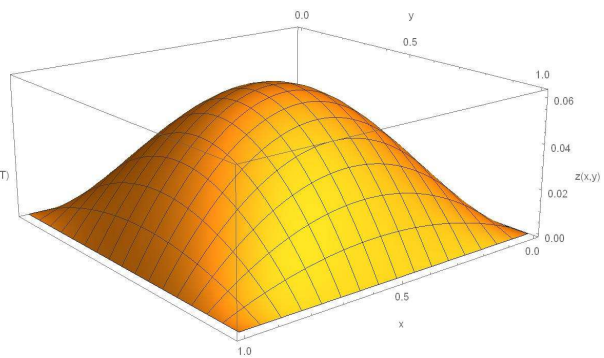


Рис. 2 – Бажаний розподіл температур $z(x, y)$ у кінцевий момент часу

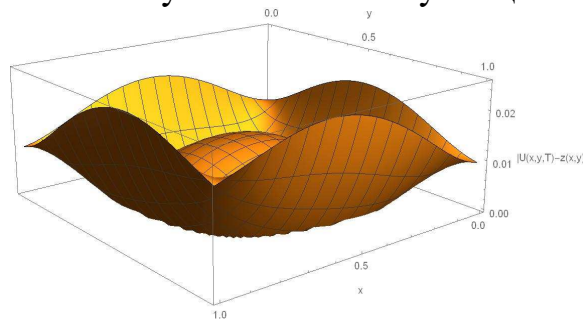


Рис. 3. Графік $|u(T, x, y) - z(x, y)|$

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.

2. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.