УДК 519.7

АЛГЕБРА ИДЕЙ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Рассмотрены интерпретации аксиом абстрактного эквивалента алгебры конечных предикатов - алгебры идей. Получено аксиоматическое задание предиката равенства идей, рассмотрены вопросы полноты и однозначности аксиоматики и связанный с ними вопрос изоморфизма моделей.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ РАВЕНСТВА, ТЕОРИЯ ИНТЕЛЛЕКТА, АКСИОМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Введение

Настоящая работа является продолжением статьи [1]. Здесь рассмотрены интерпретации свойств предиката равенства идей и его аксиоматическое задание; вопросы изоморфизма моделей равенства идей и экономности системы аксиом предиката равенства идей. Предложено модифицированное понятие модели, которое больше соответствует потребности теории интеллекта, чем классическое алгебраическое понятие модели.

1. Интерпретации свойств предиката равенства идей

Теорема 1 [1] позволяет задать *предикат равенства идей* аксиоматически в виде следующего определения: любой предикат D_k, заданный на $S_k \times S_k$ и подчиняющийся законам рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности, есть предикат равенства идей. Множество S_k вместе с заданным на его декартовом квадрате предикатом равенства идей D_k, то есть пару $\langle S_k, D_k \rangle$, назовем *моделью равенства идей*.

Переходим к психологической интерпретации свойств предиката равенства идей. Сначала рассмотрим *психологическую интерпретацию закона симметричности* (10) [1]. В содержательной формулировке закон *симметричности* гласит: если испытуемый признал мысли x и y идентичными, то он обязательно признает идентичными также и мысли y и x. Факты, которые бы опровергали закон симметричности, не удается обнаружить. Из закона симметричности следует, что области задания для переменных x и y предиката $D_k(x, \; y)$ совпадают, а это означает, что множество T, на котором определен предикат D_k, можно представить, причем единственным образом, в виде декартова квадрата некоторого множества Q, то есть $T = Q \times Q$. Множество Q мы примем в роли *носителя алгебры идей* S_k.

Несколько сложнее будет обстоять дело с выполнением закона симметричности, если мы захотим распространить понятие идеи не только на мысли, но и на ощущения. Известны такие опыты из области психофизики ощущений, которые, казалось бы, опровергают закон симметричности для предиката D_k. Опишем один из таких опытов [2, с. 232]. Испытуемому предъявляются два коротких звука, имеющих специально подобранные спектры и следующих друг за другом с секундным интервалом. Предлагается установить, равны ли они по громкости. Для тех случаев, когда громкости оказываются одинаковыми, звуки меняют местами и снова предъявляют испытуемому. Оказывается, что теперь первый звук слышится громче, чем второй. Описанный эффект, однако, легко объясняется маскирующим действием первого звука на второй, снижающим слышимую громкость последнего. Здесь мы имеем неконтролируемый побочный фактор, нарушающий условие повторяемости. Громкость одного и того же физического звука меняется в зависимости от наличия или отсутствия предшествующего звука. К закону симметричности это не имеет никакого отношения.

Переходим к *психологической интерпретации закона рефлексивности* (9) [1]. В содержательной формулировке *закон рефлексивности* гласит: равные мысли должны восприниматься испытуемым как равные. Иными словами, на равные мысли испытуемый всегда должен реагировать положительным ответом. В такой формулировке закон рефлексивности выглядит как довольно бессодержательное утверждение. Действительно, если с самого начала две мысли принимаются равными, то как они после этого могут оказаться неравными? И все же, в законе рефлексивности содержится нечто такое, что требует экспериментального подтверждения. Дело в том, что мысли фактически могут быть равными, однако испытуемый недоброкачественно их проанализирует и в результате вместо положительного выработает отрицательный ответ.

Закон рефлексивности, по существу, представляет собой требование корректности проведения эксперимента: при выработке двоичного ответа, сигнализирующего о равенстве или неравенстве мыслей, испытуемый не должен ошибиться. При фактическом равенстве мыслей он обязан отреагировать положительным ответом. Ясно, что из-за невнимательности или по злому умыслу испытуемый это требование вполне может нарушить. Отметим, что закон рефлексивности весьма близок к *закону тождества*, который рассматривается в курсах формальной логики [4, с. 77]. Закон тождества требует, чтобы в процессе рассуждения все понятия оставались равными самим себе, нельзя производить подмены понятий. Закон тождества в формальной логике расценивается как одно из важнейших требований, без выполнения которого интеллектуальная деятельность человека становится невозможной.

Далее рассмотрим *психологическую интерпретацию закона транзитивности* (11) [1]. В содержательной формулировке закон транзитивности гласит: если для некоторого испытуемого мысль x равна мысли y, а мысль y равна мысли z, то мысль x тем же испытуемым должна восприниматься как равная мысли z. В применении к смыслам фраз закон транзитивности выполняется на практике безупречно. Когда люди замечают, что кто-то из них нарушает закон транзитивности, то это неизменно квалифицируется ими как сбой в мыслительной деятельности. В практике математических доказательств встречаются длинные ряды равносильных друг другу высказываний, и при этом всегда оказывается, что первое высказывание в ряду равносильно последнему. Если же это не так, то всегда может быть обнаружена ошибка в доказательстве.

Несколько сложнее обстоит дело с выполнением закона транзитивности в случае с ощущениями. Известен следующий опыт, который обычно приводится для опровержения закона транзитивности. Испытуемому предъявляется световое излучение красного цвета определенной мощности. К красному цвету предлагается подравнять по видимой яркости (светлоте) оранжевый цвет путем регулирования мощности вызывающего его светового излучения. Далее к оранжевому цвету подравнивается по светлоте желтый цвет, а затем то же проделывается с салатным, зеленым, лазурным, голубым, синим, фиолетовым и сиреневым цветами. Наконец, к сиреневому цвету подравнивается по светлоте исходный красный цвет. В итоге оказывается, что мощность исходного светового излучения, как правило, не совпадает с мощностью излучения, полученного в конце процесса подравнивания.

Опровергает ли этот опыт закон транзитивности? Мы полагаем, что нет. Если описанный опыт выполнить многократно с одними и теми же цветами и одной и той же исходной мощностью излучения, то результирующая мощность светового излучения не получается в разных опытах одной и той же, но меняется случайным образом от опыта к опыту. При этом она колеблется вокруг первоначальной мощности излучения, то приближаясь к ней, то удаляясь от нее в сторону увеличения или уменьшения. И чем больше опытов проведено, тем более среднее значение результирующей мощности, вычисленное по всем опытам, будет приближаться к исходной мощности светового излучения. Этот факт можно истолковать таким образом, что светлота световых излучений, предъявляемых испытуемому, не остается стабильной и испытывает небольшие случайные колебания. При движении по длинному ряду цветов эти колебания светлоты накапливаются (опять-таки случайным образом), и в результате появляется заметное различие начальной и конечной светлот. Так что в этом и в любых других подобных опытах нарушается не закон транзитивности, а условие повторяемости.

Нам осталось рассмотреть психологическую интерпретацию закона подстановочности (12) [1]. Но прежде чем сделать это, мы должны предварительно выяснить психологический смысл предиката $R_k(x)$, фигурирующего в формулировке этого закона. Символом $R_k(x)$ обозначен произвольный одноместный предикат, заданный на множестве всех идей S_k. Предикат $R_k(x)$ задает исследователь, а испытуемый реализует его своим поведением. Задать предикат $R_k(x)$ можно в виде фразы, смысл которой заключается в том, что мысль x удовлетворяет специально подобранному условию. Если предъявленная испытуемому мысль x удовлетворяет этому условию, то он должен отреагировать на нее сигналом $R_k(x)=1$, если не удовлетворяет — сигналом $R_k(x)=0$. Например исследователь задает режим поведения испытуемого (то есть реализуемый им предикат $R_k(x)$) фразой «Из высказывания x логически следует высказывание «Идет дождь»». Если после этого исследователь предъявит испытуемому мысль x в форме конкретного высказывания «Идет дождь, и светит солнце», то последний должен дать ответ 1, поскольку из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» на самом деле логически следует высказывание «Идет дождь». Если же испытуемому будет предъявлено высказывание «Светит солнце», то он обязан ответить сигналом 0, так как из высказывания «Светит солнце» логически не вытекает высказывание «Идет дождь».

В условии (12) [1] фигурирует произвольный предикат $R_k(x)$, поэтому для исчерпывающей экспериментальной проверки закона подстановочности необходимо, чтобы исследователь имел возможность задать любой желаемый режим поведения испытуемого, иными словами, мог настроить испытуемого на реализацию любого одноместного предиката. Сделать это можно следующим способом. Предположим, что исследователь сообщает испытуемому фразу: «Мысль x логически равносильна мысли a». Здесь x — мысль, предъявляемая исследователем испытуемому после его настройки, a — мысль, указываемая во фразе в форме конкретного высказывания. Например, если мысль a задана высказыванием «Идет дождь», то фраза, посредством которой исследователь настраивает испытуемого, запишется в виде: «Мысль x логически равносильна мысли «Идет дождь». Реализуя своим поведением фразу «Мысль x логически равносильна мысли a», испытуемый будет реагировать ответом 1 на одну-единственную мысль $x = a$, на любую же другую мысль $x \neq a$ он ответит сигналом 0. Таким образом, испытуемый реализует предикат x^a узнавания [4, с. 17] буквы a.

Предположим теперь, что исследователь хочет сформировать фразу, которая задавала бы произвольно выбранный предикат $R_k(x)$. Пусть требуется, чтобы этот предикат обращался в 1 при всех $x \in \{a_1, a_2, ..., a_r\}$, где $a_1, a_2, ..., a_r$ – произвольно выбранные мысли. Для всех же остальных элементов множества S_k предикат R_k должен обращаться в 0. Такой предикат можно записать в виде формулы [4, с. 88]:

$$R_k(x) = x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee ... \vee x^{a_r}.$$

Его, очевидно, можно задать фразой: «Мысль x логически равносильна мысли a_1 или мысли a_2 ... или мысли a_r». Таким образом, исследователь имеет возможность настроить испытуемого на режим воспроизведения им любого конкретного одноместного предиката, заданного на множестве S_k. Следовательно, имеется возможность экспериментально проверить закон, подстановочности на любом интересующем исследователя предикате $R_k(x)$.

Переходим к *психологической интерпретации, закона подстановочности* (12) [1]. В содержательной формулировке *закон подстановочности* гласит: если какая-нибудь мысль x для некоторого испытуемого обладает свойством R_k, то тем же свойством для этого испытуемого будет обладать и любая мысль y, равная мысли x. Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание закона подстановочности. Предикат $R_k(x)$ задаем условием «Из высказывания х логически следует высказывание «Идет дождь»». В роли x берем смысл высказывания «Идет дождь, и светит солнце», в роли y – смысл высказывания «Светит солнце, и идет дождь». Последние два высказывания логически равносильны, так что $x = y$. Производя подстановку в исходное условие вместо x высказывания «Идет дождь, и светит солнце», получаем тавтологию «Из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» логически следует высказывание «Идет дождь»», при этом $R_k(x) = 1$. Заменяя в исходном условии x на y и подставляя вместо y высказывание «Светит солнце, и идет дождь», получаем высказывание «Из высказывания «Светит солнце, и идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь»». В строгом соответствии с требованием закона подстановочности оно также является тавтологией, при этом $R_k(x) = 1$.

Как в повседневной речи, так и особенно в математике люди постоянно пользуются законом подстановочности, и нет никаких свидетельств, чтобы это приводило к каким-либо сбоям в мышлении. Отметим, что закон подстановочности родственен правилу подстановки, которое рассматривается в курсах исчисления высказываний. Это правило формулируют следующим образом: «Пусть А – формула, содержащая букву A. Тогда, если А – истинная формула в исчислении высказываний, то, заменяя в ней букву A всюду, где она входит, произвольной формулой В, мы также получим истинную формулу».

2. Аксиоматическое задание предиката равенства идей

В [1] мы сформулировали четыре свойства предиката равенства идей – рефлексивность, симметричность, транзитивность и подстановочность. Возникает вопрос – *полна* ли эта система свойств, иными словами, определяет ли она характеризуемый ею объект – предикат D_k единственным образом? Оказывается, – да, определяет. Правда, требование единственности предиката D_k нельзя понимать слишком буквально. Дело в том, что мысли испытуемого идеальны, бестелесны, их нельзя собрать в множество S_k. Множество S_k можно образовать только из имен мыслей. А в выборе имен мыслей имеется известный произвол. Так, одну и ту же мысль можно представить в виде различных по виду, но тождественных по смыслу высказываний. Таким образом, в зависимости от выбора способа обозначения одних и тех же мыслей, мы приходим к тому или иному множеству идей S_k. Поэтому и предикаты равенства идей получаются разными.

Однако ясно, что способ обозначения мыслей не имеет существенного значения для характеристики предиката равенства идей. Конечно, мысли должны быть как-то обозначены, но каким именно способом – это несущественно. Поэтому разумнее говорить о единственности задания предиката равенства идей его свойствами лишь с точностью до обозначения мыслей. В математике так понимаемую единственность объекта характеризуют с помощью понятия *изоморфизма моделей.* Любая *модель* представляет собой некоторое множество S_k с заданными на его декартовых степенях одноместными или многоместными предикатами $A_1, A_2, ..., A_t$, которые отображают соответствующую декартову степень множества M на множество Σ. Записывают модель в виде $\langle M, \ \{A_1, A_2, ..., A_t\} \rangle$. В нашем случае в роли множества M выступает множество S_k – носитель алгебры идей, а в роли предикатов $A_1, A_2, ..., A_t$ – единственный двуместный предикат равенства идей D_k. Заметим, что в математике, кроме понятия модели, используют также понятие алгебры [5, с. 47]. Основная задача этого раздела статьи состоит в том, чтобы ввести носитель алгебры идей и отношение равенства на нем.

Пусть S'_k и S''_k – произвольно выбранные множества имен мыслей испытуемого, D'_k и D''_k – предикаты равенства, вводимые на декартовых квадратах этих множеств поведением испытуемого. Модели $\langle S'_k, D'_k \rangle$ и $\langle S''_k, D''_k \rangle$ будут изоморфны друг другу, если найдется такая биекция Ω: $S'_k \to S''_k$, для которой при любых $x, y \in S'_k$ имеет место равенство (8) [1]. Это равенство означает, что если имена мыслей, содержащиеся в множестве S'_k, заменить с помощью биекции Ω именами тех же мыслей, содержащимися в множестве S''_k, то предикат D''_k совпадет с предикатом $R_k(y)$.

Таким образом, если, при наличии изоморфизма моделей равенства идей, каждый раз производить пересчет реакций испытуемого от произвольной системы обозначений мыслей к некой стандартной системе, то обнаружится, что испытуемый при любом способе обозначения мыслей реализует своим поведением по существу один и тот же предикат равенства идей. Доказанные ранее равенство (8) [1] и теорема 1 [1] свидетельствуют, что если предикаты D'_k и D''_k заданы на декартовых квадратах равномощных множеств S'_k и S''_k и обладают свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности, то биекция Ω, для которой имеет место равенство (8) [1], существует. Следовательно, система свойств (9)-(12) [1] предиката равенства идей действительно полна. Мы видим, что понятие полноты системы аксиом модели (это понятие применимо также и к алгебрам) тесно связано с понятием изоморфизма моделей. Если все равномощные модели данного типа удовлетворяют одной и той же системе аксиом и при этом оказываются изоморфными друг другу, то такая система аксиом по определению считается *полной*. Она полна в том смысле, что ее нельзя пополнить независимыми аксиомами без того, чтобы эта система не стала противоречивой.

В опытах над испытуемым свойства (9)-(12) [1] предиката равенства идей выступают в роли экспериментально проверяемых *постулатов* или *аксиом*. Для того чтобы опыты имели доказательную силу, необходимо, чтобы система всех проверяемых в эксперименте аксиом была полна. Объем фактически выполняемой экспериментальной работы желательно иметь минимальным, поэтому к системе аксиом предъявляется еще и требование *экономности*. Экономность системы аксиом достигается в том случае, если, во-первых, система не содержит лишних аксиом, и, во-вторых, каждая аксиома до предела упрощена. Под *лишними* понимаются такие аксиомы, исключение которых из системы не лишает ее полноты. *Простота аксиомы* понимается в том смысле, что ее экспериментальная проверка требует минимума труда. Сокращение до минимума числа аксиом в системе при сохранении ею свойства полноты достигается исключением из системы *зависимых аксиом*, то есть таких аксиом, которые могут быть логически выведены из совокупности оставшихся аксиом. После исключения всех зависимых аксиом из системы оставшиеся аксиомы становятся *независимыми* друг от друга, и дальнейшее уменьшение числа аксиом в системе становится невозможным. Такую систему аксиом называют *несократимой*.

Являются ли независимыми друг от друга аксиомы рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности? Оказывается, нет. Аксиомы симметричности и транзитивности можно вывести из аксиомы подстановочности. Выводим симметричность.

Если $x = y$, то $D_k(x, y) \supset D_k(y, x) = D_k(x, x) \supset D_k(x, x) = 1$. Если же $x \neq y$, то, полагая $R_k(x) = 1$ и $R_k(y) = 0$ и решая уравнение (12) [1], находим $D_k(x, y) = 0$. Заменяя в уравнении (12) [1] x на y и y на x и полагая $R_k(x) = 0$ и $R_k(y) = 1$, находим $D_k(y, x) = 0$. Следовательно, и в этом случае $D_k(x, y) \supset D_k(y, x) = 0 \supset 0 = 1$. Выводим транзитивность. В роли $R_k(y)$ принимаем предикат $D_k(x, y)$, где x – произвольно фиксированный элемент множества S_k. По закону подстановочности для любых $y, z \in S_k$ из $R_k(y) = D_k(x, y) = 1$ и $D_k(y, z) = 1$ выводим $R_k(z) = D_k(x, z) = 1$. Итак, мы приходим к более экономному аксиоматическому заданию *предиката равенства идей*: любой предикат D_k, заданный на множестве $S_k \times S_k$ и подчиняющийся законам рефлексивности и подстановочности, есть предикат равенства идей.

Независимость аксиом, в общем случае связывающих переменные предикаты $A_1, A_2, ..., A_t$, доказывают *методом интерпретаций*. Суть этого метода состоит в том, что пытаются подобрать такие фиксированные предикаты $A_{11}, A_{21}, ..., A_{t1}$, которые после подстановки $A_1 = A_{11}$, $A_2 = A_{21}, ...,$ $A_t = A_{t1}$ обращают первую аксиому в противоречие, а остальные аксиомы – в тождества. Затем пытаются подобрать предикаты $A_{12}, A_{22}, ..., A_{t2}$, которые после такой же подстановки обращают вторую аксиому а противоречие, а остальные – в тождества, и так далее. Если для каждой аксиомы рассматриваемой системы удается подобрать предикаты с только что указанным свойством, то такая система аксиом будет несократимой. Ни одну из аксиом этой системы невозможно вывести из совокупности остальных.

Докажем методом интерпретаций независимость друг от друга аксиом рефлексивности (9) [1] и подстановочности (12) [1]. Подставляем вместо переменного предиката D_k, фигурирующего в указанных аксиомах, тождественно ложный предикат 0. В результате уравнение (9) [1] обращается в противоречие вида 0=1, а уравнение (12) [1] – в тождество вида 1=1. Подставляя же вместо D_k тождественно истинный предикат 1, находим, что он удовлетворяет условию рефлексивности, но не удовлетворяет условию подстановочности. Чтобы убедиться в последнем, достаточно обратить внимание на то, что всегда существуют такие значения переменных R_k, x и y, для которых $R_k(x)=1$ и $R_k(y)=0$.

Можно ли из аксиом рефлексивности, симметричности, транзитивности и подстановочности образовать другие полные несократимые системы аксиом, отличные от системы, образованной аксиомами рефлексивности и подстановочности? Оказывается, нельзя. В самом деле, исключим из исходной системы четырех аксиом аксиому рефлексивности. Оставшимся трем аксиомам симметричности (10), транзитивности (11) и подстановочности (12) [1] удовлетворяет, кроме предиката равенства, еще и тождественно ложный предикат 0. Таким образом, любые системы, образованные из оставшихся аксиом, будут неполными. Исключим теперь из исходной системы аксиому подстановочности. Оставшимся трем аксиомам рефлексивности (9), симметричности (10) и транзитивности (11) [1] удовлетворяет, кроме предиката равенства, еще и тождественно истинный предикат 1. Следовательно, любая система, образованная из аксиом рефлексивности, симметричности или транзитивности, будет неполной. Итак, мы видим, что ни одна полная система, образованная из имеющихся в нашем распоряжении четырех аксиом или меньшего их числа, не может обойтись без аксиом рефлексивности и подстановочности. Следовательно, из аксиом исходной системы можно образовать единственную полную несократимую систему аксиом, а именно – систему, состоящую из аксиом рефлексивности и подстановочности.

Нам нужно еще рассмотреть вопрос о существовании предиката D_k, задаваемого аксиоматически. Имеет ли система уравнений (9) и (12) [1] хотя бы одно решение относительно предикатной переменной D_k, иначе говоря, является ли она *непротиворечивой*? Оказывается, что решение для каждого множества S_k существует. В самом деле, возьмем в роли D_k *диагональный предикат*, определяемый следующим образом:

$$D_k(x,y)=\begin{cases}0, \text{ если } x\neq y,\\ 1, \text{ если } x=y,\end{cases}$$

Когда $x=y$, то $D_k(x,y)=1$, следовательно, условие (9) [1] выполняется. Докажем выполнение условия (12) [1]. Пусть $x\neq y$. Тогда $D_k(x,y)=0$, откуда следует, что $R_k(x)\wedge D_k(x,y)\supset R_k(y)=1$. Рассмотрим оставшийся случай, когда $x=y$. Возможны два варианта: либо $R_k(x)=R_k(y)=0$, либо $R_k(x)=R_k(y)=1$. Оба они приводят к равенству $R_k(x)\wedge D_k(x,y)\supset R_k(y)=1$. Таким образом, условие (12) [1] тоже выполняется. Итак, система, состоящая из аксиом рефлексивности и подстановочности, непротиворечива. Докажем единственность решения системы уравнений (9) и (12) [1]. Из условия (9) [1] следует, что при $x=y$ $R_k(y)$. Если же $x\neq y$, то, принимая $R_k(x)=1$ и $R_k(y)=0$, из (12) [1] выводим $1\cdot D_k(x)\supset 0=1$. Решая последнее уравнение, получаем $D_k(x,y)=0$.

Мы рассмотрели четыре свойства предиката равенства идей и установили, что из них можно составить единственную полную и несократимую систему аксиом, образованную из аксиом рефлексивности и подстановочности. Можно ли утверждать, что найденная система аксиом – простейшая из всех возможных? Нет, нельзя. Дело в том, что не исключено существование других свойств предиката равенства, из которых можно было бы образовать более экономные полные системы. В связи с этим возникает задача отыскания новых свойств предиката равенства и образования из них (быть может, с привлечением уже рассматривавшихся ранее аксиом) полных и несократимых систем аксиом. Ниже показывается, что возможности в этом направлении еще не исчерпаны.

Аксиоматическое задание предиката равенства идей можно получить на базе единственного закона, родственного закону подстановочности. Следующее утверждение называют *законом экстенсиональности* [6, с. 196]: для любого предиката R_k, заданного на множестве S_k, и для любых $x,y\in S_k$ равенство $D_k(x,y)=1$ равносильно высказыванию «$R_k(x)$ эквивалентно $R_k(y)$». Закон экстенсиональности можно записать формально в виде следующего логического уравнения:

$$\forall x\forall y(D_k(x,y)\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y)))=1. \qquad (1)$$

Здесь имеется в виду, что переменные x и y заданы на множестве S_k, а квантор общности распространяется на систему всех предикатов y, заданных на множестве S_k.

Докажем, что диагональный предикат является решением уравнения (1). Когда $x=y$, то $D_k(x,y)=1$ и $R_k(x)=R_k(y)$ при любых x,y и R_k. Таким образом, условие (1) выполняется. Когда же $x\neq y$, то x, и всегда найдется такой предикат R_k, для которого $R_k(x)\neq R_k(y)$. Следовательно $\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=0$. Итак, условие (1) снова выполняется. Докажем единственность решения уравнения (1). Если $x=y$, то $\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=1$, и из уравнения (1) находим $D_k(x,y)=1$. Если же $x\neq y$, то $\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=0$, и из (1) выводим $D_k(x,y)=0$.

Итак, *предикат равенства идей* можно аксиоматически определить следующим образом: любой предикат D_k, заданный на $S_k\times S_k$ и подчиняющийся закону экстенсиональности, есть предикат равенства идей. Выражение (1) позволяет дать *прямое определение предиката равенства идей* D_k: для любых $x,y\in S_k$

$$D_k(x, y) = \forall R_k(R_k(x) \sim R_k(y)). \qquad (2)$$

Действительно, если $x, y \in S_k$ таковы, что $D_k(x, y) = 0$, то, решая уравнение (1), находим $R_k(x) \sim R_k(y) = 0$. Если же $D_k(x, y) = 1$, то из (1) выводим $R_k(x) \sim R_k(y) = 1$. Определение предиката D_k с помощью систем аксиом (в частности, – уравнением (1)) будем называть *косвенным*.

Остановимся на *психологической интерпретации закона экстенсиональности* (1). В содержательной формулировке *закон экстенсиональности* гласит: если какие-нибудь мысли x и y для некоторого испытуемого равны, то любое свойство R_k будет либо одновременно выполняться для этих мыслей, либо одновременно не выполняться относительно данного испытуемого, то есть всегда должно иметь место равенство $R_k(x) = R_k(y)$. Рассмотрим пример, иллюстрирующий содержание закона экстенсиональности. Берем высказывания x =«Идет дождь, и светит солнце» и y =«Светит солнце, и идет дождь». Смыслы этих высказываний совпадают $x = y$. Предикат $R_k(x)$ задаем условием «Из высказывания x логически следует высказывание «Идет дождь»». Рассматриваем высказывание «Из высказывания «Идет дождь, и светит солнце» логически следует высказывание «Идет дождь»» и «Из высказывания «Светит солнце, и идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь»», которые получаются в результате подстановки x и y в исходное условие. Мы видим, что оба высказывания тавтологичны, следовательно, в обоих случаях условие R_k выполняется. Это означает, что $R_k(x) = R_k(y) = 1$. Рассматриваем, далее, высказывания «Из высказывания «Идет дождь» логически следует высказывание «Идет дождь, и светит солнце»» и «Из высказывания «Идет дождь» логически следует высказывание «Светит солнце, и идет дождь»», которые получаются в результате подстановки высказываний «Идет дождь, и светит солнце» и «Светит солнце, и идет дождь» вместо x в условие «Из высказывания «Идет дождь» логически следует высказывание x». Мы видим, что в обоих высказываниях из посылки не следует заключение. Следовательно, в обоих случаях исходное условие не выполняется, то есть $R_k(x) = 0$. Итак, в рассмотренных примерах закон экстенсиональности соблюдается.

Закон экстенсиональности воплощает *принцип Лейбница* [6, с. 194] о тождестве неразличимых: если нельзя указать никакого свойства R_k, по отношению к которому объекты x и y различны, то x и y тождественны. Если x и y – это один и тот же элемент, то любые свойства элементов x и y обязательно совпадут, откуда $R_k(x) = R_k(y)$. С другой стороны, если x и y – различные элементы, то обязательно найдутся свойства, которые их «разделяют», то есть такие, что $R_k(x)$ истинно, когда $R_k(y)$ ложно, и наоборот, так что равенство $R_k(x) = R_k(y)$, будет иметь место не при любом R_k. Нам неизвестны такие литературные данные, в которых бы принцип Лейбница ставился под сомнение. Не дает поводов к сомнению и обыденная практика мышления людей.

Можно ли предложить еще какие-нибудь полные несократимые системы аксиом, задающие предикат равенства идей? На этот вопрос мы пока не можем ответить. Продвижение вперед по этому направлению нам представляется важным. Мы располагаем лишь некоторыми «заготовками» на эту тему. Ниже приводятся четыре свойства предиката равенства, которые еще не удалось использовать в какой-нибудь полной несократимой системе аксиом:

$$\forall x \forall y \forall z (D_k(x,y) \wedge D_k(x,z) \supset D_k(y,z)) = 1, \qquad (3)$$

$$\forall x \forall y \forall z (D_k(x,y) \sim (D_k(x,z) \sim D_k(y,z))) = 1, \qquad (4)$$

$$\forall x \forall y (D_k(x,y) \sim \exists z (D_k(x,z) \wedge D_k(y,z)) = 1, \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} &\forall x \forall x_1 \forall y \forall y_1 (D_k(x, y_1) \wedge \\ &\wedge D_k(x_1, y_1) \wedge D_k(x_1, y) \supset D_k(x, y)) = 1. \end{aligned} \qquad (6)$$

Знак $\exists$ означает квантор существования.

Представляется интересным следующий вопрос: можно ли образовать для предиката равенства полную систему из аксиом, не содержащих предикатную переменную R_k? Если бы это удалось сделать, то появилась бы возможность существенно сократить объем экспериментов, необходимых для обоснования наличия у испытуемого способности различать и отождествлять мысли. Если же будет доказано, что без предикатной переменной в аксиоматике равенства идей обойтись невозможно, то при этом мы кое-что узнаем о тех осложнениях, которые встают на пути исследований механизма интеллекта человека.

Поиск новых свойств предиката равенства идей интересен не только для образования новых полных несократимых систем аксиом. Каждое такое свойство представляет собой постулат, допускающий непосредственную проверку в эксперименте. Каждый же новый постулат выводит исследователя на какие-то неизвестные ранее факты, расширяя его знания о проявлениях человеческого интеллекта. Кроме того, задание математических моделей интеллекта (в данном случае – модели равенства идей) избыточным числом постулатов дает возможность более надежно эти модели экспериментально обосновать.

Заметим, что непротиворечивость, полноту и независимость аксиом предиката равенства идей мы доказывали не вполне строго, поскольку вели рассуждения относительно одной модели $\langle S_k, D_k \rangle$ с фиксированным значением индекса k. На самом же деле имеется не одна модель равенства идей, а целое их семейство. Разным значениям индекса k соответствуют, строго говоря, различные модели равенства идей. Какой же из этих моделей придется воспользоваться на практике при исследовании интеллекта конкретного испытуемого, заранее неизвестно. Поэтому возникает необходимость строить аксиоматическую теорию сразу для всех возможных моделей равенства идей, а это требует обращения к методу математической индукции, без которой мы до сих пор обходились. Этот вопрос по нашему мнению весьма важен, он нуждается в специальной разработке.

Докажем методом математической индукции, что предикат D_k, определяемый законом экстенсиональности (1), существует. Имеется в виду, что предикат D_k задан на декартовом квадрате множества $A_k=\{a_1,\ a_2,...,\ a_k\}$, содержащего k элементов. Здесь A_k играет роль неполного множества идей N. При $k=1$ предикат D_k определяем равенством $D_1(a_1,\ a_1)$. Если предикат D_{k-1} уже определен, то предикат D_k определяем следующим образом. В случае, когда $x,y\in A_{k-1}$, принимаем $D_k(x,y)=D_{k-1}(x,y)$ и $D_k(x,a_k)=D_{k-1}(a_k,y)=0$. В оставшемся случае полагаем $D_k(a_k,a_k)=1$. Проверяем выполнение закона экстенсиональности (1) для так определенного предиката D_k. Для этого сначала убеждаемся в справедливости этого закона при $k=1$. В данном случае переменные x и y уравнения (1) принимают единственное значение a_1 из множества $A_1=\{a_1\}$. В роли значений переменной R_1 могут выступать всего два предиката $R'_1(a_1)=0$ и $R''_1(a_1)=1$. Имеем: $D_1(x,y)\sim\forall R_1(R_1(x)\sim R_1(y))=$ $=D_1(a_1,a_1)\sim(R'_1(a_1)\sim R'_1(a_1)\wedge(R_1''(a_1)\sim R''_1(a_1))=$ $=1\sim(0\sim0)(1\sim1)=1\sim1\bullet1=1$. Таким образом, предикат D_k, удовлетворяющий уравнению (1), при $k=1$ существует.

Предположим теперь, что закон экстенсиональности выполняется для предиката D_{k-1}. Это означает, что для всех $x,y\in A_{k-1}$ справедливо равенство

$$D_{k-1}(x,y)\sim\forall R_{k-1}(R_{k-1}(x)\sim R_{k-1}(y))=1. \tag{7}$$

Фигурирующий в этом равенстве квантор общности распространяется на семейство M_{k-1} всех предикатов, заданных на множестве A_{k-1}. Нам нужно доказать выполнение закона экстенсиональности для предиката D_k, то есть установить, что равенство

$$D_k(x,y)\sim\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=1 \tag{8}$$

выполняется при любых $x,y\in A_k$. В последнем равенстве квантор общности распространяется на семейство M_k всех предикатов, заданных на множестве A_k.

Каждому предикату $R_{k-1}(x)$, принадлежащему семейству M_k поставим в соответствие предикаты $R'_k(x)$ и $R''_k(x)$ из семейства M_k, определяя их следующим образом:

$$R'_k(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x=a_k,\\ R_{k-1}(x), & \text{если } x\in A_{k-1},\end{cases} \tag{9}$$

$$R''_k(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x=a_k,\\ R_{k-1}(x), & \text{если } x\in A_{k-1},\end{cases} \tag{10}$$

Класс всех предикатов вида (9) обозначим символом M'_k, вида (10) символом M''_k. Очевидно, что, вместе взятые, предикаты $R'_k(x)$ и $R''_k(x)$ исчерпывают все предикаты, которые можно задать на множестве A_k, иными словами, $M'_k\cup M''_k=M'_k$. Сказанное позволяет записать следующее равенство, справедливое при любых $x,y\in M_k$:

$$\begin{gathered}\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=(\bigwedge_{R'_k\in M'_k}(R'_k(x)\sim\\ \sim R'_k(y)))\wedge(\bigwedge_{R''_k\in M''_k}(R''_k(x)\sim R''_k(y))).\end{gathered} \tag{11}$$

Доказываем, что при любых $x,y\in A_k$ – равенство (8) справедливо. Если $x=y=a_k$, то $D_k(a_k,a_k)\sim$ $\sim\forall R_k(R_k(a_k)\sim R_k(a_k))=1\sim1=1$, и равенство (8) выполняется. Пусть теперь $x\in A_{k-1}$, а $y=a_k$. Тогда $D_k(x,a_k)=0$. Кроме того, по (9)-(11) имеем:

$$\begin{gathered}\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(a))=(\bigwedge_{R'_k\in M'_k}(R'_k(x)\sim R'_k(a_k)))\wedge\\ \wedge(\bigwedge_{R''_k\in M''_k}(R''_k(x)\sim R''_k(a_k)))=(\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}(R_{k-1}(x)\sim0))\wedge\\ \wedge(\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}(R_{k-1}(x)\sim1)))=(\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}\overline{R_{k-1}(x)})\wedge\\ \wedge(\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}R_{k-1}(x))=\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}\overline{R_{k-1}(x)}R_{k-1}(x)=0.\end{gathered}$$

Таким образом, и в этом случае равенство (8) выполняется.

При $x=a_k$ и $y=M_{k-1}$ справедливость равенства (8) доказывается аналогично. Осталось рассмотреть случай, когда $x,y\in A_{k-1}$. Теперь $D_k(x,y)=$ $=D_{k-1}(x,y)$. Вместе с тем

$$\begin{gathered}\forall R_k(R_k(x)\sim R_k(y))=(\bigwedge_{R'_k\in M'_k}(R'_k(x)\sim R'_k(y)))\wedge\\ (\bigwedge_{R''_k\in M''_k}(R''_k(x)\sim R''_k(y)))=(\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}(R_{k-1}(x)\sim R_{k-1}(y)))\wedge\\ (\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}(R_{k-1}(x)\sim R_{k-1}(y)))=(\bigwedge_{R_{k-1}\in M_{k-1}}(R_{k-1}(x)\sim R_{k-1}(y))=\\ =\forall R_{k-1}(R_{k-1}(x)\sim R_{k-1}(y)).\end{gathered}$$

Итак, условие (8) мы привели к условию (7), которое верно по предположению. Мы доказали для любого k существование предиката $D_k(x,y)$, являющегося решением уравнения (1). Другими словами, доказана непротиворечивость условия экстенсиональности для случая, когда переменные x и y заданы на произвольном конечном множестве A_k.

Докажемдлялюбого k единственностьпредиката D_k, заданного на множестве $A_k\times A_k$ и определяемого условием экстенсиональности (1). При $k=1$ имеем: $D_1(a_1,a_1)\sim\forall R_1(R_1(a_1)\sim(R_1(a_1))=D_1(a_1,a_1)\sim1=$ $=D_1(a_1,a_1)$. Следовательно, согласно условию экстенсиональности, $D_1(a_1, a_1) = 1$, и единственность предиката D_1 обеспечена. Предположим теперь, что условие (7) определяет единственный предикат D_{k-1} и выведем отсюда единственность предиката D_k, удовлетворяющего условию (8). Пусть $x = y = a_k$. Тогда условие (8) определяет значение предиката D_k единственным образом. В самом деле, $D_k(a_k, a_k) \sim \forall R_k(R_k(a_k) \sim R_k(a_k)) = D_k(a_k, a_k)$, поэтому $D_k(a_k, a_k) = 1$.

Если $x \in A_{k-1}$ и $y = a_k$, то согласно доказанному выше, $D_k(x, a_k) \sim \forall R_k(R_k(a_k) \sim R_k(a_k)) = D_{k-1}(x, a_k) \sim 0 = \overline{D_{k-1}}(x, a_k)$. Следовательно, $\overline{D_{k-1}}(x, a_k) = 1$, т.е $D_{k-1}(x, a_k) = 0$ и единственность значений предиката D_k обеспечена и в этом случае. Случай, когда $x = A_k$ и $y = A_{k-1}$, рассматривается аналогично. Осталось рассмотреть случай, когда $x, y \in A_{k-1}$. Согласно доказанному ранее, имеем: $D_k(x, y) \sim \forall R_k(R_k(x) \sim (R_k(y)) = D_k(x, y) \sim \forall R_{k-1}(R_{k-1}(x) \sim \sim (R_{k-1}(y))$. Таким образом,

$$D_k(x, y) \sim \forall R_{k-1}(R_{k-1}(x) \sim (R_{k-1}(y)) = 1. \qquad \text{(e)}$$

Из (a) и (e), пользуясь свойствами симметричности и транзитивности операции эквивалентности логических констант, выводим равенство $D_k(x, y) = D_{k-1}(x, y)$, справедливое для всех $x, y \in M_{k-1}$. Поскольку, в силу индуктивного предположения, предикат $D_{k-1}(x, y)$ единственен, то и значение предиката $D_k(x, y)$ тоже единственное при любом выборе $x, y \in A_{k-1}$. Итак, единственность предиката $D_k(x, y)$, рассматриваемого в роли решения уравнения (1), доказана для любого k.

В заключение заметим, что предикат равенства идей D_k, реализуемый испытуемым в процессе установления им совпадения или различия предъявляемых ему идей, можно было бы изучать чисто эмпирически, не прибегая к формулировке никаких законов (аксиом). Можно было бы изучать не законы интеллектуального поведения испытуемого, а только само поведение. Для этого достаточно было бы просто составить таблицу двоичных ответов испытуемого на всевозможные пары идей. Однако, как показал многовековой опыт развития исследований в физике, такой эмпирический подход менее эффективен, он используется обычно только на начальной стадии работы, чтобы накопить достаточное число исходных фактов, необходимых для последующего построения теории. Так, например, формулировке движения небесных тел в науке предшествовало составление таблиц местонахождения планет на небесной сфере в различные моменты времени. Аксиоматическое представление явлений природы (то есть описание законов, лежащих в их основе) обычно оказывается неизмеримо более экономным, удобным и лучше проникающим в суть изучаемых процессов, чем непосредственное описание самих процессов.

Итак, придерживаясь аксиоматического метода, мы ввели в этой главе множество идей S_k и задали на его декартовом квадрате предикат равенства D_k, отображающий множество $S_k \times S_k$ в множество Σ. С помощью предиката D_k в [1] введено отношение равенства идей, этим сделан первый шаг на пути создания алгебры идей. По каким направлениям развивать алгебру идей дальше? Одной из важнейших задач, на наш взгляд, является аксиоматическое введение *предиката следования* $E_k(x, y)$ *идей* x и y. Предикат $E_k(x, y)$ содержательно определяется следующим образом. Исследователь предъявляет испытуемому две идеи x и y, взятые из множества S_k, и предлагает ему отреагировать положительным ответом, если из идеи x логически следует идея y ($E_k(x, y) = 1$), и отрицательным – если не следует ($E_k(x, y) = 0$). С помощью предиката $E_k(x, y)$ вводим *отношение следования* $x \Rightarrow y$ и *отношение неследования* $x \not\Rightarrow y$ *идей* x и y. Полагаем: $x \Rightarrow y$, если $E_k(x, y) = 1$, и $x \not\Rightarrow y$, если $E_k(x, y) = 0$. Имеется в виду, что предикат $E_k(x, y)$ задан на множестве $S_k \times S_k$.

Другая, столь же важная, задача заключается в том, чтобы аксиоматически *определить операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции идей*. На практике отрицание идеи может быть задано с помощью частицы «не». Например, отрицание идеи «Идет дождь» задается высказыванием «Не идет дождь». Конъюнкция идей может быть задана союзом «и», дизъюнкция – союзом «или» (понимаемым в соединительном смысле «или также»). Будем писать: $y = \bar{x}$, если идея y является отрицанием идеи x; $z = x \wedge y$, если идея z является конъюнкцией идей x и y; $z = x \vee y$, если идея z является дизъюнкцией идей x и y. Записанные равенства можно рассматривать как *отношение отрицания идей* x, y и *отношения конъюнкции и дизъюнкции идей* x, y, z.

Отношение отрицания идей экспериментально вводим с помощью *предиката отрицания идей* ОТР(x, y), задаваемого на множестве $S_k \times S_k$. Предикат отрицания идей реализуется поведением испытуемого, который настраивается на выполнение следующего задания: если $y = \bar{x}$, то ОТР(x, y)=1; если же $y \neq \bar{x}$, то ОТР(x, y)=0. Отношение конъюнкции идей вводим с помощью *предиката конъюнкции идей* КОН(x, y, z), задаваемого на множестве $S_k \times S_k \times S_k$. Предикат конъюнкции идей практически воспроизводится испытуемым при следующей его настройке: если $z = x \wedge y$, то КОН(x, y, z)=1; если же $z \neq x \wedge y$, то КОН(x, y, z)=0. Отношение дизъюнкции идей в эксперименте задается *предикатом дизъюнкции идей* ДИЗ(x, y, z), определяемым на множестве $S_k \times S_k \times S_k$. При этом испытуемый должен руководствоваться в своих действиях следующим заданием: если $z = x \vee y$, то при предъявлении идей x, y, z им формируется положительный ответ (ДИЗ(x, y, z)=1);

если же $z \neq x \vee y$, то отрицательный (ДИЗ(x, y, z)=0). Проблема состоит в том, чтобы связать предикаты отрицания, конъюнкции и дизъюнкции идей полной системой аксиом, которую можно было бы затем принять в качестве формального определения операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции идей.

3. Модификация понятия модели

Выше мы рассмотрели модель равенства идей. Эта модель выступает в роли основного результата исследования: она формально описывает способность человека устанавливать равенство и неравенство идей. Для модели равенства идей формулируются обосновывающие ее аксиомы. Эти аксиомы выступают в роли законов интеллекта, они допускают непосредственную проверку в эксперименте на испытуемом. Модель равенства идей служит тем центром, вокруг которого группируются различные данные о способности человека идентифицировать идеи. Экстраполируя это наблюдение, мы можем ожидать, что и при дальнейшем развитии теории интеллекта в роли ее основной продукции будут выступать модели различных сторон интеллекта человека. Возникает впечатление, что понятие модели – это основной инструмент познания механизма интеллекта.

Модель мы вводили в виде пары $\langle S_k, D_k \rangle$. В роли первого компонента этой пары выступает множество всех идей S_k, в роли второго компонента – бинарный предикат равенства идей $t = D_k(x, y)$, значение t которого определяется идеями x и y. Предикат D_k задан на множестве $S_k \times S_k$. В самом общем смысле под термином «идея» нами содержательно понимается субъективное состояние человека. К идеям относятся ощущения, восприятия, представления, понятия, мысли, эмоции, чувства, желания человека. Вместо множества всех идей S_k можно брать любое его подмножество N.

Так, например, было введено множество N' мыслей, являющихся смыслами всевозможных высказываний. Предикат равенства идей $D'(x, y)$, входящий в состав модели $\langle N', D' \rangle$, содержательно интерпретируется как логическая равносильность мыслей x и y. Выше рассматривалось равенство цветовых ощущений, фактически шла речь о модели $\langle N'', D'' \rangle$, у которой N'' есть множество всевозможных цветов, а D'' – предикат равенства, введенный на этом множестве. Заметим, что мысли и цвета являются субъективными состояниями человека, так что множества N' и N'' – это подмножества множества S_k.

Каждая из трех только что введенных пар $\langle S_k, D_k \rangle$, $\langle N', D' \rangle$, $\langle N'', D'' \rangle$, если ее брать изолированно от других пар, может быть подведена под общее понятие модели, которое мы находим в учении об алгебраических системах [2, с. 46]. Моделью там называют систему $\langle A, \pi \rangle$, состоящую из произвольно выбранного множества A и совокупности $\pi = \{P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \ldots, P_r^{n_r}\}$ предикатов $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \ldots, P_r^{n_r}$. Числа $n_1, n_2, \ldots, n_r$ обозначают *арности предикатов* $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \ldots, P_r^{n_r}$, то есть количество переменных, от которых каждый из этих предикатов зависит. Все переменные предикатов $P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \ldots, P_r^{n_r}$ заданы на множестве A. Набор чисел ($n_1, n_2, \ldots, n_r$) называют *типом модели* $\langle A, \pi \rangle$, а множество π – *сигнатурой модели*. Число r всех предикатов в множестве π называют *порядком модели* $\langle A, \pi \rangle$. Множество A называют *основным множеством модели* $\langle A, \pi \rangle$ или ее *носителем*. Число элементов k в множестве A называют *мощностью модели* $\langle A, \pi \rangle$. В каждой из рассмотренных выше трех моделей $\langle S_k, D_k \rangle$, $\langle N', D' \rangle$, $\langle N'', D'' \rangle$ сигнатура состоит только из одного предиката. Исходя из общего определения модели, следовало бы указывать в приведенных моделях не сам предикат, а множество, состоящее из одного этого предиката, то есть, к примеру, вместо $\langle S_k, D_k \rangle$ писать $\langle S_k, \{D_k\} \rangle$.

Исследователь, получивший модели $\langle N', \{D'\} \rangle$ и $\langle N'', \{D''\} \rangle$ в результате изучения поведения испытуемого, естественно, захочет соединить их вместе. Но как это сделать? Казалось бы, вместо этих двух моделей можно ввести одну модель вида $\langle N, \{D', D''\} \rangle$. Однако возникает затруднение: неясно, какое множество следует взять в роли N. Если мы возьмем в роли N множество всех идей, то получим модель $\langle S_k, \{D', D''\} \rangle$, которая нас не может удовлетворить. Это вызвано тем, что в ней действие предикатов D' и D'' автоматически распространяется на множество всех идей S_k. При этом искажается фактическое положение, поскольку на самом деле предикат D' можно распространить лишь на область N', а предикат D'' – лишь на область N''. Не помогает делу и введение каких-либо других вариантов моделей $\langle N' \cup N'', \{D', D''\} \rangle$, $\langle S_k, \{D_k\} \rangle$, $\langle N' \cup N'', \{D_k\} \rangle$, поскольку все они так или иначе искажают информацию об объекте исследования.

Можно было бы пойти по другому пути и просто образовать систему $\{\langle N', \{D'\} \rangle, \langle N'', \{D''\} \rangle\}$ исходных моделей $\langle N', \{D'\} \rangle$ и $\langle N'', \{D''\} \rangle$. Но и при таком способе действий теряется важная информация об объекте исследования. А именно, в образованной системе моделей не находит отражения тот факт, что множества N' и N'' являются подмножествами одного и того же множества S_k. Из-за этого обе модели в системе воспринимаются как совершенно изолированные друг от друга. На самом же деле они взаимосвязаны, поскольку описывают различные стороны интеллекта одного и того же испытуемого.

Все сказанное приводит нас к выводу, что при исследовании интеллекта нельзя ограничиться использованием приведенного выше общего понятия модели. Главное обстоятельство, которое препятствует этому, заключается в том, что исследователь вынужден, кроме множества всех идей S_k привлекать еще и различные его подмножества. Если не позволить ему это делать, то исследователь не будет иметь возможности расчленять чрезвычайно сложную и поэтому непосильную общую задачу исследования интеллекта человека на более мелкие подзадачи. При этом эффективное изучение механизма интеллекта человека станет невозможным. В приведенном же выше общем понятии модели фигурирует только одно множество A, а его подмножества не вводятся. Поэтому в пределах этого понятия модели нет возможности одновременно рассматривать несколько предикатов, заданных на различных подмножествах множества всех идей.

Все сказанное вынуждает нас ввести новый вариант понятия модели, определяя его с таким расчетом, чтобы оно удовлетворяло запросам теории интеллекта в большей мере, чем классическое общее понятие модели, приведенное выше. *Моделью* над *универсумом букв* $\mathsf{A}=(a_1,\ a_2,...,\ a_k)$ и *универсумом переменных* $\mathsf{B}=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ назовем любую пару $\langle M, P\rangle$, у которой в роли первого компонента выступает какое-нибудь подмножество M n-ной декартовой степени множества A, то есть $M \subseteq \mathsf{A}^n$, а роль второго компонента выполняет какой-либо n-местный предикат $P=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$, заданный на A^n. Первый компонент модели $\langle M, P\rangle$ назовем ее *носителем* или *основным множеством модели*. Число элементов в множестве M называем *мощностью модели*. Второй компонент P называем *предикатом модели* $\langle M, P\rangle$. Множество A^n назовем *универсальным пространством размерности* n. Оно состоит из всевозможных n-компонентных наборов букв, взятых из множества A. *Мощностью пространства* A^n назовем число k^n содержащихся в нем наборов букв. Для различения введенного нами понятия модели с классическим модели только что описанного вида будем называть *модифицированными*.

Только что введенное понятие модифицированной модели фактически основывается на универсальной алгебре, описанной в работе [4, с. 62]. Задавая множества A и B, мы, на самом деле, ввели алфавит букв и алфавит переменных универсальной алгебры. Именно на языке универсальной алгебры в дальнейшем будут записываться множество M и предикат P модели $\langle M, P\rangle$. Подобно тому, как это было принято в универсальной алгебре, будем считать алфавиты A и B настолько обширными, чтобы в них содержались все нужные знаки для формального описания интересующих нас моделей. О числах k и n будем предполагать известным лишь то, что они неопределенно велики, но конечны. При таком подходе не представляется возможным перечислить все буквы и переменные алфавитов A и B, однако такое перечисление и не потребуется. Если бы мы при определении понятия модифицированной модели $\langle M, P\rangle$ не ввели алфавиты A и B, то лишились бы возможности записывать в виде математических выражений компоненты M и P модели $\langle M, P\rangle$.

Было бы неправильным утверждать, что введенное нами понятие модифицированной модели является обобщением классического понятия модели. На самом деле, оба эти понятия являются различными обобщениями одного частного случая понятия модели, а именно – модели $\langle A, P\rangle$, в сигнатуре которой содержится всего лишь один предикат P. Запросы учения об алгебраических системах обусловили введение такого обобщения понятия модели, при котором предикат P заменяется системой предикатов $\{P_1^{n_1}, P_2^{n_2},..., P_r^{n_r}\}$. Потребности же теории интеллекта вынуждают нас ввести другое обобщение понятия модели, при котором область задания A^n предиката P ограничивается некоторым произвольно выбираемым подмножеством M. При первом варианте обобщения неприкосновенным сохраняется первый компонент A исходной модели, а при втором – ее второй компонент P.

Нетрудно было бы ввести, далее, такое обобщение понятия модели, которое охватывало как классическое, так и модифицированное понятия модели. А именно, моделью над A и B можно было бы назвать пару $\left\langle M, \{P_1^{n_1}, P_2^{n_2},..., P_r^{n_r}\}\right\rangle$, у которой роль первого компонента выполняет какое-нибудь множество $M \subseteq \mathsf{A}^n$, а вторым компонентом служит система каких-либо предикатов $P_1^{n_1}, P_2^{n_2},..., P_r^{n_r}$, арности которых $n_1, n_2,..., n_r$ не превышают числа переменных, содержащихся в множестве B. Однако этой возможностью мы не воспользуемся, поскольку такое обобщенное понятие модели нам не понадобится. Дело в том, что, как будет показано ниже, только что упомянутое обобщенное понятие модели создает лишь видимость обобщения. На самом же деле оно обладает той же описательной силой, что и введенное нами понятие модифицированной модели. Оказывается, что любую «обобщенную» модель можно выразить в виде равносильной ей модифицированной модели.

Может возникнуть вопрос, почему при определении понятия модифицированной модели предикат P задается на множестве A^n, а не на области M, указанной в модели $\langle M, P\rangle$. Ведь фактически исследователь находит опытным путем лишь те значения предиката $P(x_1, x_2,..., x_n)$, реализуемого испытуемым, которые определяются наборами $(x_1, x_2,..., x_n)$ значений аргументов предиката P, принадлежащими области M. Для наборов же, выходящих за пределы области M, исследователь значений предиката P не знает. Искусственно приписывая предикату P значения за пределами области M, мы тем самым закладываем в модель $\langle M, P\rangle$ заведомо ложную информацию, которая не соответствует фактическому положению дела. Это неизбежно приводит к несоответствию модели физическому объекту, который она призвана формально описать.

Все сказанное верно, и тем не менее приходится задавать предикат P на всем множестве A^n, а не на его части M. Это диктуется спецификой формульного выражения любых зависимостей, от которой при всем желании не удается избавиться. Если в формуле присутствуют переменные, то ничто не мешает подставлять вместо каждой из них любое значение из универсума букв A. Поэтому у нас нет практического средства ограничить область определения предиката P. Из-за этого обстоятельства предикат P, хотим мы этого или нет, принудительно определяется на всем множестве A^n. Хотя нет способа ограничить сферу действия предиката P, однако все же имеется возможность все наборы $(x_1, x_2, ..., x_n)$, содержащиеся в множестве A^n, разделить на два класса. В один класс помещаем все те наборы, для которых значения предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ соответствуют фактическим реакциям испытуемого. Во второй класс помещаем все те наборы, для которых предикат P формирует вымышленные значения.

Сделать это можно следующим образом. Подбираем предикат $M^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданный на множестве A^n с таким расчетом, чтобы он обращался в единицу на всех тех наборах $(x_1, x_2, ..., x_n)$, которые принадлежат области M, и обращаются в нуль на всех остальных наборах множества A^n. В этом случае множество M определится уравнением

$$M^*(x_1, x_2, ..., x_n) = 1. \qquad (12)$$

Если мы будем множество M, фигурирующее в модели $\langle M, P \rangle$, задавать с помощью этого уравнения, то любой набор, не принадлежащий множеству M, обратит уравнение (12) в противоречие вида 0=1. Таким образом, с помощью уравнения (7) мы получаем информацию о том, что любой набор ($x_1, x_2, ..., x_n$), не принадлежащий множеству M, является запрещенным, а значения предиката P, получаемые для этого набора, не следует принимать во внимание. Вместе с тем, все наборы ($x_1, x_2, ..., x_n$), принадлежащие множеству M, уравнение (12) допустит, так как при подстановке любого такого набора в это уравнение оно обращается в тождество вида 1=1.

Заметим, что предикат M^* взаимно однозначно связан с множеством M. Эта связь может быть выражена следующим образом:

$$M^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x_1, x_2, ..., x_n) \in M, \\ 0, & \text{если } (x_1, x_2, ..., x_n) \notin M. \end{cases} \qquad (13)$$

В связи с этим возникает вопрос, не проще ли было бы определить понятие модели в виде пары $\langle M^*, P \rangle$, а не пары $\langle M, P \rangle$. Мы считаем такой способ определения понятия модели принципиально неприемлемым, хотя как чисто практический прием задания модели он не вызывает возражений.

Дело в том, что роль предикатов P и M^* различна. Предикат P используется по своему прямому назначению: он описывает поведение испытуемого. Без него просто нельзя обойтись. Предикат же M^*, взятый сам по себе, в модели нам не нужен. Он выполняет вспомогательную роль, образуя левую часть уравнения (12), задающего множество M. Множество M можно было бы при желании задать и без привлечения предиката M^*, например, непосредственно перечисляя все содержащиеся в нем наборы идей. И этого было бы вполне достаточно для определения модели $\langle M, P \rangle$. Если б мы задали модель в виде пары $\langle M^*, P \rangle$, то пришлось бы сопровождать такое определение специальным комментарием об указанной выше специфической роли предиката M^*. Пришлось бы особо отметить, что на самом деле нас интересует не непосредственно предикат M^*, а лишь задаваемое им множество M.

Рассмотрим пример записи модели на языке универсальной алгебры конечных предикатов. Пусть требуется формально записать модель $\langle M, D \rangle$, где $D(x_1, x_2)$ – предикат равенства идей x_1 и x_2, значения которого экспериментально определены на следующем множестве пар идей:

$$M = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_2, a_1), (a_2, a_2), (a_3, a_1), (a_3, a_3)\}. \qquad (14)$$

Значения предиката $D(x_1, x_2)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

x_1	a_1	a_1	a_1	a_2	a_2	a_3	a_3
x_2	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_1	a_3
D	1	0	0	0	1	0	1

Предикат $M^*(x_1, x_2)$, задающий множество M, записываем в форме:

$$M^*(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_1} x_2^{a_3} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_3}. \qquad (15)$$

Множество M определится уравнением

$$M^*(x_1, x_2) = 1. \qquad (16)$$

Предикат $D(x_1, x_2)$ записываем в виде формулы

$$D(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{a_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{a_2} \vee x_1^{a_3} x_2^{a_3}.$$

Приведенный пример, несмотря на свою простоту, порождает вопросы, требующие разъяснения. Почему в примере не указаны универсум букв A и универсум переменных B, как того, казалось бы, требует определение понятия модели? Ответ на этот вопрос состоит в том, что в определении понятия модели множества A и B лишь упоминаются, а не вводятся фактически. Когда мы пишем, что $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то тем самым постулируем только существование конечных множеств A и B, а вовсе не перечисляем все их элементы. Предполагается, что множества A и B настолько обширны и неопределенны, что в них содержатся все нужные нам буквы и переменные. Поэтому при практическом задании конкретных моделей множества A и B остаются как бы за кадром, они присутствуют лишь потенциально. Именно благодаря их существованию мы можем ввести в нашем примере буквы $a_1, a_2, a_3 \in A$ и переменные $x_1, x_2 \in B$ и оперировать ими. Если бы в определении понятия модифицированной модели не были упомянуты множества A и B, то мы не имели бы права пользоваться символами a_1, a_2, a_3 и x_1, x_2.

Второй вопрос: почему мы записываем предикат D в виде $D(x_1, x_2)$, указывая при этом только две переменные x_1, x_2, а не все те переменные $x_1, x_2, ..., x_n$, которые содержатся в универсуме B? На это можно ответить, что запись $D(x_1, x_2)$ в отличие от записи $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, не полная, а сокращенная. Формируя сокращенную запись, мы руководствуемся следующим правилом: в ней несущественные переменные можно не указывать. Несущественными будем считать те из переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, от значений которых значение предиката $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ не зависит. Однако все существенные переменные должны быть выписаны. Можно сказать, что выражение $D(x_1, x_2)$ есть стенографическая запись полного представления $D = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ предиката D. Мы обращаемся к такой стенографической записи не только из-за стремления к краткости, но, главным образом, в силу необходимости, ввиду невозможности перечислить все переменные $x_1, x_2, ..., x_n$. В нашем примере значения предиката D всегда однозначно определяются значениями переменных x_1, x_2, поэтому все остальные переменные универсума B в данном случае являются несущественными.

Мы обращаемся к сокращенной записи и в том случае, когда представляем множество M в виде выражения (14). Строго говоря, в каждом наборе букв, принадлежащем множеству M, содержится по n компонентов. Фактически же в наборах, фигурирующих в множестве, указанном справа в равенстве (14), записаны только по две буквы, а именно – те буквы, которые являются значениями существенных переменных x_1 и x_2. Если бы мы задались целью выписать в наборах букв, составляющих множество M, все значения хотя бы одной из несущественных переменных, то не смогли бы этого сделать ввиду того, что число наборов букв в записи множества M стало бы неопределенно большим. Так что приходится пользоваться сокращенной записью множества M. Множество M, на самом деле, состоит из всех тех n-компонентных наборов букв универсума A, у которых на местах x_1 и x_2 стоят значения, указанные в сокращенной записи множества M.

Аналитическую запись (15) множества M мы получаем путем перехода от бинарного отношения, стоящего в правой части равенства (14), к соответствующей ему формуле [4, с. 97]. В выражении (15) фигурируют всего две переменные – x_1 и x_2. Казалось бы, отсюда следует, что оно задает бинарный предикат. Такое заключение, однако, неверно. В выражении (15) слева от знака равенства стоит символ $M^*(x_1, x_2)$, который представляет собой сокращенную запись предиката $M^*(x_1, x_2, ..., x_n)$, задающего множество M. Формула, стоящая в выражении (15) справа от знака равенства, на самом деле задает не множество пар букв, фигурирующее в (14), а множество всех n-компонентных наборов, входящих в состав области M. Если бы мы смогли практически перейти к СДНФ предиката (15), то получили бы дизъюнкцию конституэнт единицы, каждая из которых представляет собой произведение узнаваний букв всех переменных $x_1, x_2, ..., x_n$. Таким образом, уравнение (16), несмотря на все сокращения, принятые нами в процессе его получения, задает «настоящее» множество M, то есть n-арное, а не бинарное отношение.

Выводы

Все сказанное о представлении предиката M^* относится также к формульной записи (10) предиката D. На самом деле предикат $D(x_1, x_2)$ – не бинарный, а n-арный, все переменные алфавита B, кроме x_1 и x_2 в нем несущественные. В нашем примере существенные переменные у предикатов P и M^* оказались одни и те же. Такое совпадение, однако, не является обязательным. Заметим, что при желании в формульные представления предикатов P и M^* можно ввести любые из несущественных переменных. Например, можно ввести переменную x_3, дописывая в формуле, стоящей справа от знака равенства в выражении (10), дизъюнктивный член $x_3^{a_1} x_3^{a_2}$, равный нулю.

Список литературы: 1. *Бондаренко М.Ф.* Модель равенства идей [Текст] / *М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко* // Бионика интеллекта. – 2010. – № 2 (73). – С. 3-15. 2. *Цвикер Э.* Ухо как приемник информации [Текст] / *Э. Цвикер, Р. Фельдкелер.* – М.: Связь, 1971. – 320 с. 3. [Текст] / Формальная логика. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 110 с. 4. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / *Ю.П. Шабанов-Кушнаренко.* – Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. Ун-те, 1984 – 144 с. 5. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы [Текст] / *А.И. Мальцев.* – М.: Наука, 1970. – 476 с. 6. *Клини С.К.* Математическая логика [Текст] / *С.К. Клини* – М.: Мир. 1973. – 390 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2010

УДК 519.7

Алгебра ідей / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2 (73). – С. 16–27.

Пропонується біонічний підхід до проблеми побудови штучного інтелекту. Розвивається спеціалізований математичний апарат для ефективного моделювання роботи механізмів інтелекту людини.

Табл. 1. Бібліогр.: 6 найм.

UDC 519.7

Ideas algebra / Bondarenko M.F., Shabanov-Kushnarenko Yu.P., Shabanov-Kushnarenko S.Yu. // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 2 (73). – С. 16–27.

It is offered bionic approach to a problem of construction of an artificial intelligence. The specialized mathematical instrument for effective simulation of activity of mechanism of human intellect develops.

Tab. 1. Ref.: 6 items.