УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко[1], Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[1], Д.Э. Ситников[2], П.Э. Ситникова[3], А.И. Коваленко[2]

[1]Украина, г. Харьков, ХНУРЭ, [2]Украина, ХДАК,
[3]Украина, г. Харьков, ХГУ «НУА»

ПРИМЕНЕНИЕ ПОДСТАНОВОЧНЫХ ОПЕРАЦИЙ К ПРЕДИКАТАМ, ПРЕДСТАВЛЕННЫМ ФОРМУЛАМИ АЛГЕБРЫ КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ

Вводится определение подстановочной операции, а также сужающего, расширяющего и смещающего оператора. Рассмотрено действие операторов подстановки на предикаты, представленные в виде дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной формы, найдены необходимые и достаточные условия существования сужающих и расширяющих операторов подстановки. Доказаны необходимые и достаточные условия получения последовательности сужающих (расширяющих) операторов, сводящей предикат к нулю (единице).

ПОДСТАНОВОЧНАЯ ОПЕРАЦИЯ, СУЖАЮЩИЙ ОПЕРАТОР, РАСШИРЯЮЩИЙ ОПЕРАТОР, СМЕЩАЮЩИЙ ОПЕРАТОР, ПРЕДИКАТ

Введение

Появление новых эффективных средств и методов обработки и хранения информации обеспечило базу разработки и внедрения в практику информационных систем различного уровня и назначения. Прогресс в области информационных технологий и методов проектирования программного обеспечения способствовал существенному пересмотру принятых ранее подходов к созданию информационных систем.

Представление знаний в такой системе связано с решением задач формализации знаний. Для этого разрабатываются специальные модели представления и языки описания знаний, выделяются их различные типы.

Одним из средств, используемых в качестве аппарата формализации знаний, является алгебра конечных предикатов — современный универсальный математический аппарат, позволяющий моделировать многоместные конечные отношения на рассматриваемых множествах, представляя их в виде системы логических уравнений.

Одной из задач, требующих решения в данной связи, является разработка алгебры подстановочных операций как отдельного случая алгебры конечных предикатов.

Целью данной статьи является получение зависимости между исходными предикатами, имеющими различные формы, и предикатами, полученными в результате действия подстановочных операций.

1. Действие подстановочных операций на предикат, представленный в виде дизъюнктивной нормальной формы

Рассмотрим действие оператора подстановки на предикат P, представленный в виде дизъюнктивной нормальной форма (ДНФ) и конъюнктивной нормальной формы (КНФ).

Пусть P — n–арный предикат, зависящий от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, каждая из которых имеет области допустимых значений, $\{a_{1j}\}_{j=1}^{n_1}$, $\{a_{2j}\}_{j=1}^{n_1}$, ..., $\{a_{nj}\}_{j=1}^{n_n}$ соответственно. Оператором подстановки $a_{ij}(P)$ назовем оператор, преобразующий предикат P в предикат P_1 путем подстановки значения a_{ij} переменной x_i в предикат P:

$$a_{ij}(P(x_1, x_2, ..., x_n)) = P(x_1, x_2, ..., a_{ij}, ..., x_n) = \\ = P(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1} ..., x_n). \qquad (1)$$

Приведем несколько примеров действия оператора подстановки.

Пусть $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{32}}$. Тогда $a_{11}(P) = x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{32}}$. Очевидно, P и $a_{11}(P) = P_1$ связаны соотношением

$$P_1 \supset P. \qquad (2)$$

Пусть $P(x_1, x_2) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{12}} x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{22}} \vee \ \vee x_2^{a_{23}}$. Тогда

$$a_{11}(P) = x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{22}} \vee x_2^{a_{23}} =$$

$$= x_2^{a_{21}}(x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}} \vee x_1^{a_{13}} \vee x_1^{a_{14}}) \vee x_2^{a_{22}} \vee x_2^{a_{23}}$$

В этом случае P и $a_{11}(P) = P_1$ связаны соотношением

$$P_1 \subset P. \qquad (3)$$

Пусть

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \vee \\ \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{31}}.$$

Тогда $a_{11}(P) = P_1 = x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{31}}$. В данном примере не выполняется ни одно из соотношений (2), (3).

Назовем оператор $a_{ij}(P) = P_1$ *сужающим*, если для P и P_1 выполняется соотношение (2).

Назовем оператор $a_{ij}(P) = P_1$ *расширяющим*, если для P и P_1 выполняется соотношение (3).

Назовем оператор $a_{ij}(P) = P_1$ *смещающим*, если для P и P_1 не выполняются соотношения (2), (3).

Исследуем вопрос о зависимости общего вида предиката $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и сужающего, расширяющего или смещающего действия оператора подстановки.

Рассмотрим унарный предикат $P(x)$, имеющий вид:

$$P(x) = x^{a_1} \vee x^{a_2} \vee \ldots \vee x^{a_n}.$$

Очевидно, действие оператора подстановки a_i на данный предикат приводит к получению либо нуля (в случае, если узнавание x^{a_i} отсутствует), либо единицы (в случае, если такое узнавание присутствует). В первом случае оператор подстановки действует сужающее, во втором – расширяюще.

Предположим, что $n = 2$ и рассмотрим бинарный предикат $P(x_1, x_2)$ с областями допустимых значений переменных $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ соответственно. Рассмотрим действие оператора подстановки $a_1(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2)$.

Предположим также, что предикат P имеет вид ДНФ. Все слагаемые в P разобьем на пять групп, каждая из которых содержит слагаемые следующего вида:

$$x_1^{a_1} x_2^{b_{j_1}}, j_1 \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_1^{a_{i_1}} x_2^{b_{j_1}}, i_1 \in \{2, \ldots, n\} j_1 \in \{1, \ldots, m\},$$

причем второй сомножитель в слагаемых этого типа обязательно присутствует среди аналогичных сомножителей слагаемых первого типа;

$$x_1^{a_{i_2}} x_2^{b_{j_2}}, i_2 \in \{2, \ldots, n\}, j_2 \in \{1, \ldots, m\};$$

$$x_1^{a_{k_1}}, k_1 \in \{2, \ldots, n\};$$

$$x_1^{a_{k_2}}, k_2 \in \{1, \ldots, m\}.$$

Таким образом, предикат P можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) = &\bigvee_{j_1 \in \{1, \ldots, m\}} x_1^{a_1} x_2^{b_{j_1}} \vee \\ \vee &\bigvee_{\substack{i_1 \in \{2, \ldots, n\} \\ j_1 \in \{1, \ldots, m\}}} x_1^{a_{i_1}} x_2^{b_{j_1}} \vee \bigvee_{\substack{i_1 \in \{2, \ldots, n\} \\ j_1 \in \{1, \ldots, m\}}} x_1^{a_{i_2}} x_2^{b_{j_2}} \vee \\ \vee &\bigvee_{k_1 \in \{2, \ldots, n\}} x_1^{a_{k_1}} \vee \bigvee_{k_2 \in \{1, \ldots, m\}} x_2^{b_{k_2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Так, например, если $P(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{b_1} \vee x_1^{a_3} \vee \vee x_2^{b_4} \vee x_1^{a_1} x_2^{b_3} \vee x_1^{a_2} x_2^{b_1} \vee x_1^{a_2} x_2^{b_2}$, то, заключая последовательно каждую группу разбиения, соответствующего оператору a_1 в скобки, запишем:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) = (x_1^{a_1} x_2^{b_1} \vee x_1^{a_1} x_2^{b_3}) \vee \\ \vee (x_1^{a_2} x_2^{b_1}) \vee (x_1^{a_2} x_2^{b_2}) \vee (x_1^{a_3}) \vee (x_2^{b_4}). \end{aligned} \tag{5}$$

Заметим, что второй сомножитель слагаемых второй группы обязательно повторит один из сомножителей слагаемых первой группы.

Итак, при действии оператора подстановки a_1 на предикат P, очевидно, что первое слагаемое в (4) преобразуется в дизъюнкцию вторых сомножителей каждой пары, второе, третье и четвертое слагаемые обратятся в нуль, а последнее останется без изменения:

$$a_1(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2) = \bigvee_{j_1 \in \{1, \ldots, m\}} x_2^{b_{j_1}} \vee \bigvee_{k_2 \in \{1, \ldots, m\}} x_2^{b_{k_2}}. \tag{6}$$

Например, применяя операторы a_1 к предикату P (формула (5) из вышеприведенного примера), получаем

$$a_1(P) = P_1 = (x_2^{b_1} \vee x_2^{b_3}) \vee (x_2^{b_4}). \tag{7}$$

Представим теперь предикат P (формула (6)) в следующем виде:

$$P_1(x_2) = \bigvee_{j_1 \in \{1, \ldots, m\}} x_2^{b_{j_1}} \wedge \bigvee_{i = \overline{1, n}} x_1^{a_i} \vee \bigvee_{k_2 \in \{1, \ldots, m\}} x_2^{b_{k_2}}.$$

Тогда

$$P_1 = \bigvee_{\substack{j_1 \in \{1, \ldots, m\} \\ i = \overline{1, n}}} x_1^{a_i} x_2^{b_{j_1}} \bigvee_{k_2 \in \{1, \ldots, m\}} x_2^{b_{k_2}}. \tag{8}$$

Очевидно, так как второй сомножитель каждой пары первого слагаемого уравнения (8) повторяет аналогичный в парах первого и второго слагаемого уравнения (4), а множество первых сомножителей первого слагаемого уравнения (8) содержит все возможные узнавания переменной x_1, то первое слагаемое в (8) полностью включает первое и второе слагаемые в (4). Последние слагаемые уравнений (4) и (8) одинаковы. Таким образом, верны следующие утверждения:

Утверждение 1. Если в предикате $P(x_1, x_2)$ слагаемые из первой группы отсутствуют, то для P и P_1 выполнится соотношение (2), и оператор подстановки $a_1(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2)$ действует сужающе.

Доказательство следует из того факта, что в данном случае предикат, представленный формулами (6) и (8), будет состоять только из второго слагаемого.

Пример 1. Пусть $P(x_1, x_2) = x_1^{a_2} x_2^{b_1} \vee x_1^{a_3} x_2^{b_2} \vee \vee x_1^{a_1} \vee x_2^{b_3}$. Тогда $a(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2) = x_2^{b_3}$ и, следовательно, $P_1 \supset P$.

Утверждение 2. Если в предикате $P(x_1, x_2)$ слагаемые из первой группы присутствуют, а слагаемые третьей и четвертой группы отсутствуют, то для P и P_1 выполнится соотношение (3), и оператор подстановки $a_1(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2)$ действуют расширяюще.

Доказательство следует из представления предиката P_1 формулой (8).

Пример 2. Пусть $P(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{b_1} \vee x_1^{a_1} x_2^{b_2} \vee \vee x_1^{a_2} x_2^{b_1} \vee x_2^{b_3}$. Тогда $a(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2) = x_2^{b_1} \vee \vee x_2^{b_2} \vee x_2^{b_3}$ и, следовательно, $P_1 \subset P$.

Утверждение 3. В случае, если предикат P содержит слагаемые первой, третьей и четвертой группы, то не выполняются соотношения (2), (3), т.е.

$$(P_1 \overline{\supset} P) \wedge (P_1 \overline{\subset} P). \tag{9}$$

Пример 3. Пусть $P(x_1, x_2) = x_1^{a_1} x_2^{b_2} \vee x_1^{a_2} \vee \quad \vee x_2^{b_3}$. Тогда $a_1(P(x_1, x_2)) = P_1(x_2) = x_2^{b_2} \vee x_2^{b_3}$ и, следовательно, оператор a_1 действует смещающе.

Пусть теперь $P(x_1,x_2)=x_1^{a_1}x_2^{b_2}\vee x_1^{a_2}x_2^{b_3}\vee x_2^{b_1}$. Тогда $a_1(P(x_1,x_2))=P_1(x_2)=x_2^{b_1}\vee x_2^{b_2}$ и, следовательно, оператор подстановки действует также смещающе.

Рассмотрим теперь n–арный предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ с областью допустимых значений (ОДЗ) переменных $\{a_{11},a_{12},...,a_{1n}\}$, $\{a_{21},a_{22},...,a_{2n}\}$,..., $\{a_{n1},a_{n2},...,a_{nn}\}$ соответственно. Исследуем действие оператора подстановки $a_{ij}(P)=P_1$. Разобьем все слагаемые предиката .P., представленного в виде ДНФ, на следующие пять классов.

1. Содержит слагаемые вида

$$x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_2}}...x_i^{a_{ij}}...x_n^{a_{nj_n}},j_k\in\{1,...,n_k\},k=\overline{1,n}.$$

2. Содержит слагаемые вида

$$x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_2}}...x_i^{a_{iji}}...x_n^{a_{nj_n}},j_k\in\{1,...,n_k\},k=\overline{1,n},$$

причем произведение всех переменных данного сомножителя, кроме узнавания переменной x_i, ($x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_2}}...x_{i-1}^{a_{i-1,ji-1}}x_{i+1}^{a_{i+1,ji+1}}...x_n^{a_{nj_n}}$) содержится среди аналогичных в слагаемых первого класса.

3. Содержит слагаемые вида

$$x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2l_2}}...x_i^{a_{il_i}}...x_n^{a_{nl_n}},l_k\in\{1,...,n_k\},k=\overline{1,n},$$

причем сомножитель $x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_2}}...x_{i-1}^{a_{i-1,ji-1}}x_{i+1}^{a_{i+1,ji+1}}...x_n^{a_{nj_n}}$ отличается от аналогичных в слагаемых первого класса.

4. Содержит слагаемые вида $x_i^{a_{il_i}},l_i\in\{1,...,n_i\}$.

5. Содержит слагаемые вида

$$x_1^{a_{1l_1}}x_2^{a_{2l_2}}...x_{i-1}^{a_{i-1,li-1}}x_{i+1}^{a_{i+1,li+1}}...x_n^{a_{nl_n}},l_k\in\{1,...,n_i\},k=\overline{1,n}.$$

Таким образом, предикат P можно записать в виде:

$$\begin{gathered}P(x_1,x_2,...,x_n)=\bigvee_{\substack{j_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ j_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_1}}...x_i^{a_{ij}}...x_n^{a_{nj_n}}\vee\\ \vee\bigvee_{\substack{j_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ j_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_2}}...x_i^{a_{ij}}...x_n^{a_{nj_n}}\vee\\ \bigvee_{\substack{l_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ l_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1l_1}}x_2^{a_{2l_2}}...x_i^{a_{il_i}}...x_n^{a_{nl_n}}\vee\bigvee_{l_i\in\{1,...,n_i\}}x_i^{a_{il_i}}\vee\\ \vee\bigvee_{\substack{l_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ l_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1l_1}}x_2^{a_{2l_2}}...x_{i-1}^{a_{i-1,li-1}}x_{i+1}^{a_{i+1,li+1}}...x_n^{a_{nl_n}}.\end{gathered}\tag{10}$$

На примере

$$P(x_1,x_2,x_3)=x_1^{a_{11}}x_2^{a_{21}}\vee x_1^{a_{11}}x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}}\vee x_1^{a_{12}}x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}}\vee$$
$$\vee x_1^{a_{12}}x_2^{a_{23}}x_3^{a_{33}}\vee x_1^{a_{13}}\vee x_2^{a_{23}}x_3^{a_{32}}$$

проведём разбиение по указанным выше пяти классам, заключая каждый из них в скобки

$$\begin{gathered}P(x_1,x_2,x_3)=(x_1^{a_{11}}x_2^{a_{21}}\vee x_1^{a_{11}}x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}})\vee\\ \vee(x_1^{a_{12}}x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}})\vee(x_1^{a_{12}}x_2^{a_{23}}x_3^{a_{33}})\vee\\ \vee(x_1^{a_{13}})\vee(x_2^{a_{23}}x_3^{a_{32}}).\end{gathered}\tag{11}$$

Применяя оператор подстановки к предикату P, заданному уравнением (10), получим

$$\begin{gathered}a_{ij}(P)=P_1=\bigvee_{\substack{j_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ j_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1j_1}}x_2^{a_{2j_1}}...x_n^{a_{nj_n}}\vee\\ \vee\bigvee_{\substack{l_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ l_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1l_1}}x_2^{a_{2l_2}}...x_n^{a_{nl_n}}\vee\\ \vee\bigvee_{\substack{l_1\in\{1,...,n_1\}\\ \dots\dots\dots\\ l_n\in\{1,...,n_n\}}}x_1^{a_{1l_1}}x_2^{a_{2l_2}}...x_{i-1}^{a_{i-1,li-1}}x_{i+1}^{a_{i+1,li+1}}...x_n^{a_{nl_n}},\end{gathered}\tag{12}$$

где первое слагаемое данного уравнения образовано из первого слагаемого уравнения (10) вследствие обращения в единицу узнавания $x_i^{a_{ij}}$, а последнее слагаемое повторяет аналогичное в уравнении (10). Второе, третье и четвёртое слагаемые уравнения (10) обращаются в нуль. На примере предиката, представленного уравнением (11), действие оператора подстановки выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}a_{11}(P(x_1,x_2,x_3))=\\ =(x_2^{a_{21}}\vee x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}})\vee(x_2^{a_{23}}x_3^{a_{32}}).\end{gathered}\tag{13}$$

Из приведенных рассуждений можно вывести утверждения:

Утверждение 4. Если предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ не содержит слагаемых первого класса, то предикат P_1, общий вид которого представлен уравнением (12), будет содержать только второе и третье слагаемые, а следовательно, P и P_1 связаны соотношением (2), то есть оператор подстановки действует сужающе.

Утверждение 5. Если предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ содержит слагаемые первого класса, а слагаемые третьего и четвёртого классов отсутствуют, то, предикаты P и P_1 связаны соотношением (3), то есть оператор подстановки действует смещающее.

Утверждение 6. Если предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ содержит слагаемое первого класса, а также слагаемые третьего или четвёртого классов, то оператор подстановки действует смещающее.

Приведём примеры, иллюстрирующие утверждение 4-утверждение 6.

Пример 4. Пусть

$$P(x_1,x_2,x_3)=x_1^{a_{12}}x_2^{a_{21}}x_3^{a_{32}}\vee x_1^{a_{13}}x_2^{a_{21}}x_3^{a_{32}}\vee x_4^{a_{14}}\vee x_2^{a_{22}}x_3^{a_{33}}.$$

Тогда $a_{11}(P(x_1,x_2,x_3))=P_1=x_2^{a_{22}}x_3^{a_{33}}$. Очевидно, $P_1\supset P$, т.е. оператор подстановки a_{11} действует сужающе.

Пример 5. Пусть

$$P(x_1,x_2,x_3)==x_1^{a_{11}}x_2^{a_{21}}\vee x_1^{a_{12}}x_2^{a_{21}}\vee x_2^{a_{22}}x_3^{a_{33}}\vee x_2^{a_{23}}x_3^{a_{32}}.$$

Тогда

$$a_{11}(P(x_1,x_2,x_3))=P_1=x_2^{a_{21}}\vee x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}}\vee x_2^{a_{23}}x_3^{a_{32}}=$$
$$=x_2^{a_{21}}(x_1^{a_{11}}\vee x_1^{a_{12}}\vee x_1^{a_{13}})\vee x_2^{a_{22}}x_3^{a_{31}}\vee x_2^{a_{23}}x_3^{a_{32}}.$$

Следовательно, $P\supset P_1$, т.е. оператор подстановки a_{11} действует расширяюще.

Пример 6. Пусть

$$P(x_1,x_2,x_3) = = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{23}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} .$$

Тогда $a_{11}(P(x_1,x_2,x_3)) = P_1 = x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}}$. В этом случае оператор подстановки a_{11} действует смещающе, так же как и в следующем примере:

$$P(x_1,x_2,x_3) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{12}} \vee x_1^{a_{13}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} .$$

Тогда

$$a_{11}(P(x_1,x_2,x_3)) = P_1 = x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{32}} .$$

2. Действие подстановочных операций на предикат, представленный в виде конъюнктивной нормальной формы

Допустим, что n -арный предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ представлен в виде КНФ таким образом, что каждая элементарная дизъюнкция содержит узнавания только одной переменной. Например,

$$P(x_1,x_2,x_3 x_4) = (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}} \vee x_1^{a_{14}}) \wedge (x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{22}}) \wedge$$
$$\wedge (x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{33}}) \wedge (x_4^{a_{41}} \vee x_4^{a_{42}}).$$

В этом случае предикат P в общем виде можно представить как

$$P(x_1,x_2,...,x_n) = \bigvee_{i_1 \in \{1,...,n_1\}} x_1^{a_{1i_1}} \wedge$$
$$\wedge \bigvee_{i_2 \in \{1,...,n_2\}} x_2^{a_{1i_2}} \wedge ... \wedge \bigvee_{i_n \in \{1,...,n_n\}} x_n^{a_{1i_n}} .$$

Рассмотрим действие оператора подстановки $a_{ij}(P) = P_1$. Возможны два случая:

Элементарная дизъюнкция, содержащая узнавания переменной x_i содержит также узнавание $x_i^{a_{ij}}$. Эта элементарная дизъюнкция не содержит такого узнавания.

В первом случае слагаемое $x_i^{a_{ij}}$ обращается в единицу, а следовательно, в единицу обращается вся скобка. Тогда, очевидно, $P \supset P_1$, т.е. оператор подстановки действует расширяюще. Во втором случае вся элементарная дизъюнкция, содержащая узнавания переменной x_i , обращается в нуль, а следовательно, весь предикат также обращается в нуль. Таким образом, в этом случае оператор действует сужающе.

Рассмотрим теперь предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$, представленный в виде произвольной КНФ. Пусть ОДЗ переменных составляют множества $\{a_{1j}\}_{j=1}^{n_1}$, $\{a_{2j}\}_{j=1}^{n_2}$, ..., $\{a_{nj}\}_{j=1}^{n_n}$ соответственно.

Разобьем все элементарные дизъюнкции на следующие три класса.

1. Сомножители, в которых присутствуют узнавание $x_i^{a_{ij}}$.

2. Сомножители, в которых отсутствует узнавание $x_i^{a_{ij}}$, но присутствуют другие узнавания переменной x_i .

3. Сомножители, не содержащие вовсе узнаваний переменой x_i .

Например, пусть предикат $P(x_1,x_2,x_3)$ имеет следующий вид:

$$P(x_1,x_2,x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}} \vee x_2^{a_{21}})(x_1^{a_{11}} \vee x_2^{a_{22}} \vee x_3^{a_{31}} \vee$$
$$\vee x_3^{a_{32}}) \wedge (x_1^{a_{12}} \vee x_1^{a_{13}} \vee x_2^{a_{21}})(x_1^{a_{12}} \vee x_3^{a_{31}})(x_2^{a_{22}} \vee x^{a_{33}}) \wedge$$
$$\wedge (x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{32}}).$$

Тогда, исследуя оператор подстановки $a_{11}(\ P(x_1,x_2,x_3))$, разобьём все множители на три класса:

$$(x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}} \vee x_2^{a_{21}}) ,\ (x_1^{a_{11}} \vee x_{21}^{a_{22}} \vee x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{32}}) ;$$
$$(x_1^{a_{12}} \vee x_1^{a_{13}} \vee x_2^{a_{21}}) ,\ (x_1^{a_{12}} \vee x_3^{a_{31}}) ;$$
$$(x_2^{a_{22}} \vee x_3^{a_{33}}) ,\ (x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{32}}) .$$

Обозначим произведение всех сомножителей первого класса через A , т.е.

$$A = \bigwedge_k (x_i^{a_{ij}} \vee \bigvee_{i_1 \in \{1,...,n_1\}} x_1^{a_{i_1}} \wedge ... \wedge \bigvee_{i_n \in \{1,...,n_n\}} x_n^{a_{1i_n}})_k . \qquad (14)$$

Во втором классе в каждой элементарной дизъюнкции можно выделить слагаемое двух типов: к первому отнесем слагаемые, являющиеся узнаваниями переменной x_i , и обозначим их сумму в каждой j -й скобке через B_j :

$$B_j = (\bigvee_{k_i \in \{1,...,n_i\}} x_i^{a_{ik_i}})_j ; \qquad (15)$$

ко второму типу отнесем остальные слагаемые в этой элементарной дизъюнкции и обозначим их сумму через C_j в каждой j -й скобке :

$$C_j = (\bigvee_{\substack{k_l \in \{1,...,n_l\} \\ l \neq i \\ l \in \{1,...,n\}}} x_l^{a_{lk_l}})_j . \qquad (16)$$

Так, в вышеприведенном примере можно обозначить

$$B_1 = x_1^{a_{12}} \vee x_1^{a_{13}} ;\ B_2 = x_1^{a_{12}} ;\ C_1 = x_2^{a_{21}} ;\ C_2 = x_3^{a_{31}} .$$

Произведение сомножителей третьей группы обозначим через D :

$$D = \bigwedge_j (\bigvee_{i_2 \in \{1,...,n_2\}} x_2^{a_{2i_2}} \wedge ... \wedge \bigvee_{i_n \in \{1,...,n_n\}} x_n^{a_{1i_n}})_j , \qquad (17)$$

Итак, предикат P можно представить в виде

$$P(x_1,x_2,...,x_n) = A \wedge \bigwedge_j (B_j \vee C_j) \wedge D . \qquad (18)$$

При действии оператора подстановки $a_{ij}(P)$ первый сомножитель – A обращается в единицу, во втором сомножителе слагаемые B_j обращаются в нуль, третий сомножитель D останется без изменения. Таким образом,

$$a_{ij}(P(x_1,x_2,...,x_n)) = \bigwedge_j C_j \wedge D . \qquad (19)$$

Из вышеприведенных объяснений можно вывести следующие утверждения.

Утверждение 7. Если предикат P не содержит элементарных дизъюнкций первого класса, то оператор подстановки действует сужающее.

Доказательство. В этом случае

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = \underset{j}{\wedge}(B_j \vee C_j) \wedge D, \qquad (20)$$

а

$$P_1 = \underset{j}{\wedge} C_j \wedge D.$$

Так как $\underset{j}{\wedge}(B_j \vee C_j) \wedge D = (\underset{j}{\wedge} B_j \underset{j}{\wedge} B_j C_k \underset{j}{\wedge} C_j) \wedge D$, то, очевидно, выполняется соотношение (2).

Следствие. Если в дополнение к указанному в утверждении условию предикат P не содержит сомножителей третьей группы, то оператор подстановки действует также сужающе.

Утверждение 8. Если предикат P содержит элементарные дизъюнкции первого класса, но не содержит таковых второго класса, то оператор подстановки действует расширяюще.

Доказательство. В этом случае

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = A \wedge D, \qquad (21)$$

а следовательно, $P_1 = D$.

Очевидно, P и P_1 связаны соотношением (3).

Следствие. Если в дополнение к указанному в утверждении условию предикат P не содержит сомножителей третьей группы, то оператор подстановки действует также расширяюще.

Утверждение 9. Если предикат P содержит сомножители первого и второго класса, то оператор подстановки действует смещающе.

Доказательство. В этом случае предикат P представлен формулой (18), предикат P_1 представлен формулой (19) и они не связаны, очевидно, ни одним из соотношений (2), (3).

Следствие. Если в дополнение к указанному в утверждении условию предикат P не содержит сомножителей третьей группы, то оператор подстановки действует смещающе.

Приведем примеры, иллюстрирующие приведенные утверждения.

Пример 7. Пусть $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{a_{12}} \vee x_2^{a_{21}} \vee$ $\vee x_3^{a_{31}}) \wedge (x_2^{a_{22}} \vee x_3^{a_{32}}) \wedge (x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{33}})$. Тогда

$a_{11}(P) = (x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{31}}) \wedge (x_2^{a_{22}} \vee x_3^{a_{32}}) \wedge (x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{33}}) = P_1$. Очевидно, $P_1 \supset P$, т.е. оператор $a_{11}(P)$ действует сужающе.

Пример 8. Пусть $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_2^{a_{21}}) \wedge$ $\wedge (x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{31}}) \wedge (x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{22}})$. Тогда

$a_{11}(P) = (x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{31}}) \wedge (x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{22}}) = P_1$. Очевидно, $P \supset P_1$, т.е оператор $a_{11}(P)$ действует расширяюще.

Пример 9. $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{31}})(x_1^{a_{22}} \vee$ $\vee x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{32}})(x_2^{a_{22}} \vee x_3^{a_{33}})$.

Тогда $a_{11}(P) = x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{31}}(x_2^{a_{22}} \vee x_3^{a_{33}}) = P_1$. Очевидно, не выполняется (2), (3) т.е. оператор $a_{11}(P)$ действует смещающе.

3. Применение подстановочных операций к конъкюнции дизъюнктивных нормальных форм

Рассмотрим действие оператора подстановки на конъюнкцию предикатов $Q = P_1 \wedge P_2$, где P_1 и P_2 – предикаты, представленные в виде ДНФ.

Пусть множества переменных, на которых определены предикаты P_1 и P_2, не пересекаются. Тогда

$$a_{i_l k}(Q) = a_{i_l j}(P_1(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n}) \wedge P_2(x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_n})) = \\ = P_2 \wedge a_{i_l k}(P_1).$$

Очевидно, оператор подстановки a_{i_l} действует на предикат Q так же, как и на предикат P_1:

если $a(P_1) \supset P_1$, то $a(Q) = a(P_1) \wedge P_2 \supset P_1 \wedge P_2$;

если $a(P_1) \subset P_1$, то $a(Q) = a(P_1) \wedge P_2 \subset P_1 \wedge P_2$.

Предположим, что предикаты P_1 и P_2 имеют общие переменные $x_{k_1}, x_{k_2}, ...$. Рассмотрим действие оператора подстановки $a_{k_l m}(Q)$.

Утверждение 10. Если оператор подстановки $a_{k_l m}$ является сужающим для предикатов P_1 и P_2, то он является также сужающим и для их конъюнкции – предиката $Q = P_1 \wedge P_2$.

Доказательство.

$$a_{k_l m}(Q) = a_{k_l m}(P_1) \wedge a_{k_l m}(P_2) \supset P_1 \wedge P_2,$$

т.к. $a_{k_l m}(P_1) \supset P_1 \wedge a_{k_l m}(P_2) \supset P_2$.

Пример 10. $P_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{11}} x_2^{a_{23}} x_3^{a_{31}} \vee \ \ \vee x_3^{a_{32}}$, $P_2 = x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}} x_4^{a_{42}} \vee x_4^{a_{41}}$. Оператор a_{21} является сужающим для предикатов P_1, P_2 и Q: $a_{21}(Q) = x_3^{a_{32}} \vee x_4^{a_{41}}$.

Утверждение 11. Если оператор подстановки $a_{k_l m}$ является расщиряющим для предикатов P_1 и P_2, то он является также расширяющим и для их конъюнкции – предиката $Q = P_1 \wedge P_2$.

Доказательство.

$$a_{k_l m}(Q) = a_{k_l m}(P_1) \wedge \ \wedge a_{k_l m}(P_2) \subset P_1 \wedge P_2,$$

т.к. $a_{k_l m}(P_1) \subset P_1 \wedge \ \wedge a_{k_l m}(P_2) \subset P_2$.

Пример 11.

$$P_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{31}}, \ P_2 = x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{33}} x_4^{a_{41}}.$$

Оператор a_{21} является расширяющим для предикатов P_1, P_2 и Q:

$$a_{21}(Q) = (x_1^{a_{11}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{12}} x_3^{a_{31}}) \wedge (x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{33}} x_4^{a_{41}}).$$

Но так как $Q = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} x_4^{a_{41}}$, то $a_{21}(Q) \supset P_1 \wedge P_2$.

Утверждение 12. Если оператор подстановки $a_{k_l m}$ является смещающим для предикатов P_1 и P_2, то на предикат $Q = P_1 \wedge P_2$ он может действовать любым образом.

Докажем утверждение путем приведения примеров.

Пример 12. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21} \vee x_2^{a22}x_3^{a31}$,

$P_2 = x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_2^{a22}$, $a_{21}(P_1) = x_1^{a11}$, $a_{21}(P_2) = x_3^{a33}$;

$P_1 \wedge P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_2^{a22}x_3^{a31}$, $a_{21}(Q) = x_1^{a11}x_3^{a33}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{21} является смещающим.

Пример 13. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a31} \vee x_2^{a22}x_3^{a33} \vee$

$\vee x_3^{a32}$, $P_2 = x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_2^{a22}x_4^{a41} \vee x_3^{a32}x_4^{a41}$.

Тогда $P_1 \wedge P_2 = x_2^{a22}x_3^{a33}x_4^{a41} \vee x_2^{a22}x_3^{a32}x_4^{a41}$,

$a_{21}(P_1) = x_1^{a11}x_3^{a31} \vee x_3^{a32}$, $a_{21}(P_2) = x_3^{a33} \vee x_3^{a32}x_4^{a41}$,

то есть этот оператор является смещающим для предикатов P_1 и P_2. $a_{21}(Q) = x_3^{a32}x_4^{a41}$. В данном случае для предиката Q оператор a_{21} является сужающим.

Пример 14. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a31} \vee x_2^{a22}x_3^{a31} \vee$

$\vee x_3^{a33}$, $P_2 = x_2^{a21}x_3^{a31}x_4^{a42} \vee x_2^{a22}x_3^{a32} \vee x_3^{a33}$.

Тогда $Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a31}x_4^{a42} \vee x_3^{a33}$.

$a_{21}(P_1) = x_1^{a11}x_3^{a31} \vee x_3^{a33}$, $a_{21}(P_2) = x_3^{a31}x_4^{a42} \vee x_3^{a33}$,

то есть этот оператор является смещающим для предикатов P_1 и P_2. $a_{21}(Q) = x_1^{a11}x_3^{a31}x_4^{a42} \vee x_3^{a33}$. В данном случае для предиката Q оператор a_{21} является расширяющим.

Утверждение 13. Если оператор подстановки $a_{k_l m}$ является сужающим для предиката P_1 и расширяющим для предиката P_2, то на предикат $Q = P_1 \wedge P_2$ он может действовать любым образом.

Докажем утверждение путем приведения примеров.

Пример 15. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_3^{a31}$,

$P_2 = x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_4^{a42}$. $Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a33}x_4^{a42} \vee$

$\vee x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_3^{a31}x_4^{a42}$, $a_{21}(Q) = x_1^{a11}x_3^{a33}x_4^{a42} \vee \; \vee x_3^{a31}x_4^{a42}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{21} является смещающим.

Пример 16. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_3^{a32}$,

$P_2 = x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_4^{a42}$.

Тогда $Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a33}x_4^{a42} \vee x_3^{a32}x_4^{a42}$.

$a_{21}(Q) = x_1^{a11}x_3^{a33}x_4^{a42} \vee x_3^{a32}x_4^{a42}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{21} является расширяющим.

Утверждение 14. Если оператор подстановки $a_{k_l m}$ является сужающим для предиката P_1 и смещающим для предиката P_2, то на предикат $Q = P_1 \wedge P_2$ он может действовать любым образом.

Доказательство проведем аналогично предыдущим утверждениям.

Пример 17. $P_1 = x_1^{a12}x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_1^{a13}x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_3^{a32}$,

$P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a32} \vee x_1^{a12}x_2^{a22}x_3^{a33}$. $Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a32}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{11} является расширяющим.

Пример 18. $P_1 = x_1^{a12}x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_1^{a13}x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_3^{a32}$,

$P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a32} \vee x_1^{a12}x_2^{a22}x_3^{a32} \vee x_2^{a23}$.

$Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a32} \vee x_1^{a12}x_2^{a22}x_3^{a32} \vee x_2^{a23}x_3^{a32}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{11} является смещающим.

Утверждение 15. Если оператор подстановки $a_{k_l m}$ является расширяющим для предиката P_1 и смещающим для предиката P_2, то на предикат $Q = P_1 \wedge P_2$ он может действовать любым образом.

Приведем примеры, иллюстрирующие доказательство утверждения.

Пример 19. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a33} \vee x_1^{a12}x_2^{a21}x_3^{a33} \; \vee x_2^{a22}x_3^{a33}$,

$P_2 = x_1^{a11}x_2^{a22} \vee x_1^{a12}x_2^{a23}$. $Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a22}x_3^{a33}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{11} является расширяющим.

Пример 20. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a21}x_3^{a32} \vee x_1^{a12}x_2^{a21}x_3^{a32} \vee$

$\vee x_2^{a23}x_3^{a33} \vee x_2^{a21}x_3^{a31}$, $P_2 = x_1^{a11}x_2^{a22} \vee x_1^{a12}x_2^{a23} \vee \; \vee x_2^{a21}$.

$Q = P_1P_2 = x_1^{a12}x_2^{a23}x_3^{a33} \vee x_2^{a21}x_3^{a31}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{11} является сужающим.

Пример 21. $P_1 = x_1^{a11}x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_1^{a12}x_2^{a22}x_3^{a31} \vee$

$\vee x_2^{a23} \vee x_3^{a32}$, $P_2 = x_1^{a11}x_2^{a22}x_3^{a31} \vee x_1^{a12}x_2^{a23}x_3^{a32} \vee \; \vee x_2^{a23}x_3^{a31}$.

Тогда $Q = P_1P_2 = x_1^{a11}x_2^{a22}x_3^{a31} \vee \; \vee x_1^{a12}x_2^{a23}x_3^{a32} \vee x_2^{a23}x_3^{a31}$.

В данном случае для предиката Q оператор a_{11} является смещающим.

4. Условия существования сужающих и расширяющих подстановочных операций

Утверждение 16. Пусть предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ представлен в виде ДНФ. Для того чтобы существовал сужающий оператор подстановки по переменной x_i, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение a_{ij} из области допустимых значений (ОДЗ) переменной x_i, что при разбиении слагаемых предиката P, соответствующему этому значению, элементарные конъюнкции из первой группы отсутствовали бы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует такое значение a_{ij}, что выполняется условие, сформулированное в утверждении. Тогда, из утверждения 1 следует, что оператор подстановки $a_{ij}(P)$ действует сужающе, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть существует сужающий оператор подстановки для предиката P. Обозначим его $a_{ij}(P)$. Предположим, что предикат P содержит слагаемые вида

$$x_i^{a_{ij}} \wedge \bigwedge_{\substack{q\in\{1,\dots,n\} \\ n\neq q \\ g\in\{1,\dots,n\}}}, \qquad (22)$$

т.е. слагаемое из первой группы. Тогда, из утверждений 2 и 3, приведенных ранее, следует, что условие

$P_1 \supset P$ не выполняется, то есть оператор действует не сужающе, что противоречит условию утверждения. Следовательно, наше предположение не верно, а значит, слагаемые типа (22) отсутствуют.

Приведем пример. Пусть

$$P(x_1,x_2,x_3) = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee$$
$$\vee x_1^{a_{13}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{23}}.$$

Найдём операторы подстановки по переменным x_1 и x_3, действующие сужающе при условии, что ОДЗ каждой переменной состоит из трёх значений. Итак, для переменной x_1 отсутствует узнавание $x_1^{a_{11}}$, значит, оператор $a_{11}(P)$ действует сужающе:

$$a_{11}(P) = x_3^{a_{32}} x_2^{a_{23}} = P_1 \to P_1 \supset P .$$

Для переменной x_3 не существует сужающего оператора подстановки, так как все узнавания данной переменной представлены в данном предикате.

Утверждение 17. Пусть предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ представлен в виде КНФ. Для того чтобы существовал сужающий оператор подстановки по переменной x_i, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение a_{ij} из ОДЗ переменной x_i, что при разбиении сомножителей предиката P, соответствующего этому значению, элементарные дизъюнкции первого типа отсутствовали бы.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть существует такое значение a_{ij}, что выполняется условие, сформулированное в утверждении. Тогда, из утверждения 7, приведенного ранее, следует, что оператор подстановки $a_{ij}(P)$ действует сужающе, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть существует сужающий оператор подстановки для предиката P; обозначим его $a_{ij}(P)$. Предположим, что сомножители первого типа при разбиении, соответствующем значению a_{ij}, присутствуют, т.е. предикат P содержит элементарные дизъюнкции вида

$$x_i^{a_{ij}} \vee \bigvee_{\substack{q\in\{1,...,n\} \\ n\neq q \\ g\in\{1,...,n\}}} \qquad (23)$$

Тогда, из утверждений 8 и 9, приведенных ранее, следует, что условие $P_1 \supset P$ не выполняется, то есть оператор действует не сужающе, что противоречит условию утверждения. Следовательно, наше предположение неверно, а значит, слагаемые типа (23) отсутствуют.

Например, пусть $P(x_1,x_2,x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_2^{a_{21}} \vee \vee x_3^{a_{33}})(x_1^{a_{12}} \vee x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{31}}) \wedge (x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{32}})$. Найдём для переменной x_2 оператор подстановки, действующий сужающе. Так как предикат P не содержит узнаваний $x_2^{a_{22}}$ и $x_2^{a_{23}}$, то операторы $a_{22}(P)$ и $a_{23}(P)$ действуют сужающее. $a_{22}(P) = a_{23}(P) = = (x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{33}})(x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{31}})(x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{32}}) = P_1$. Очевидно, $P_1 \supset P$.

Пусть теперь $P(x_1,x_2,x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_1^{a_{12}})(x_1^{a_{12}} \vee \vee x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{33}})(x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{32}})$. Тогда, т.к. узнавание $x_1^{a_{13}}$ отсутствует, то оператор подстановки $a_{13}(P)$ действует сужающе. $a_{13}(P) = 0$, следовательно $P_1 \supset P$.

Утверждение 18. Пусть предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ представлен в виде ДНФ. Для того чтобы существовал расширяющий оператор подстановки по переменной x_i, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение a_{ij} из ОДЗ переменной x_i, что при разбиении слагаемых предиката P, соответствующего этому значению, слагаемые первого класса присутствовали бы, в то время как слагаемые третьего и четвёртого классов отсутствовали бы.

Доказательство этого и ниже приведенных утверждений 19, 20 и 21 полностью аналогичны приведенным для утверждений 16 и 17.

Пример 22. Пусть

$$P(x_1,x_2,x_3) = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{13}} \vee x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}} .$$

Тогда $a_{22}(P) = a_{21}(P) = x_1^{a_{12}} x_3^{a_{31}} \vee x_1^{a_{13}} \vee x_1^{a_{11}} x_3^{a_{32}}) = P_1$, т.е. $P \supset P_1$, следовательно, операторы. $a_{22}(P)$ и $a_{21}(P)$ действуют расширяюще.

Утверждение 19. Пусть предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ представлен в виде КНФ. Для того чтобы существовал расширяющий оператор подстановки по переменной x_i, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение a_{ij} из ОДЗ переменной x_i, что при разбиении сомножителей предиката P, соответствующему значению, элементарные дизъюнкции первого типа присутствовали бы, а элементарные дизъюнкции второго типа отсутствовали бы.

Пример 23. $P(x_1,x_2,x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_2^{a_{21}} \vee x_3^{a_{31}}) \wedge$

$$\wedge (x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{32}}) \wedge (x_1^{a_{12}} \vee x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{32}}).$$

Тогда оператор подстановки $a_{21}(P)$ действует расширяюще, т.к. $a_{21}(P) = x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{32}}$ и, очевидно, $P \supset P_1$.

Утверждение 20. Пусть предикат $P(x_1,x_2,...,x_n)$ представлен в виде ДНФ. Для того чтобы существовал смещающий оператор подстановки по переменной x_i, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение a_{ij} из ОДЗ переменной x_i, что при разбиении слагаемых предиката P, соответствующему этому значению, слагаемые первого класса, а также третьего или четвёртого класса присутствовали бы.

Пример 24.

$$P(x_1,x_2,x_3) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{22}} x_3^{a_{33}} \vee x_3^{a_{31}} .$$

Тогда $a_{21}(P) = x_1^{a_{11}} x_3^{a_{33}} \vee \vee x_3^{a_{31}} = P_1$, и, очевидно, оператор действует смещающе.

Или пусть

$$P(x_1,x_2,x_3) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee x_3^{a_{13}} .$$

Тогда $a_{11}(P) = x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}}$ и очевидно, $a_{11}(P)$ также является смещающим оператором подстановки.

Утверждение 21. Пусть предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ представлен в виде КНФ. Для того чтобы существовал смещающий оператор подстановки по переменной x_i, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое значение a_{ij} из ОДЗ переменной x_i, что при разбиении сомножители предиката P, соответствующего этому значению, элементарные дизъюнкции первого и второго типа присутствовали бы.

Пример 25. Пусть $P(x_1, x_2, x_3) = (x_1^{a_{11}} \vee x_2^{a_{21}} \vee$

$$\vee x_3^{a_{31}}) \wedge (x_1^{a_{11}} \vee x_3^{a_{32}})(x_1^{a_{12}} \vee x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{32}}).$$

Тогда оператор подстановки $a_{11}(P)$ действует смещающе, т.к. $a_{11}(P) = x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{23}} \vee x_3^{a_{32}}$.

5. Применение последовательности сужающих и расширяющих подстановочных операций к одному предикату

Для построения последовательности сужающих (расширяющих, смещающих) операторов для предиката P необходимо последовательно находить переменные, по которым такие операторы существуют, и действовать одним из них на предикат P. Из утверждений 16-21 следует способ нахождения сужающих операторов. Например, $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee \quad \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{32}} \vee x_1^{a_{12}} x_2^{a_{23}}$. Если область допустимых значений каждой переменной состоит из трех значений, то по переменной x_1 существует сужающий оператор a_{13}. Тогда $a_{13}(P) = x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{32}}$. Заметим, что если для исходного предиката не существовало сужающего оператора по переменной x_2, то для полученного такой оператор существует: $a_{23}(P) = 0$.

Очевидно, последовательное применение сужающих (расширяющих) операторов приводит либо к нулю (единице), либо к предикату P_k, для которого на k-м шаге не найдется ни одного сужающего (расширяющего) оператора.

Правомерен вопрос: когда для данного предиката P существует последовательность сужающих (расширяющих) операторов, поочередное действие которых приводит к нулю (единице).

Утверждение 22. Для того чтобы для предиката P, представленного в виде ДНФ, существовала последовательность сужающих операторов подстановки, сводящих данный предикат к нулю, необходимо и достаточно, чтобы предикат P нельзя было представить в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = P_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \vee P_2(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}), \tag{24}$$

где $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ – переменные, по которым не существует сужающих операторов подстановки.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, существует последовательность сужающих операторов $a_{l_1 j_1}, a_{l_2 j_2}, ..., a_{l_n j_n}$ такая, что $a_{l_n j_n}(a_{l_{n-1} j_{n-1}}(...(a_{l_1 j_1}(P)))) = 0$. Пусть также предикат P можно представить в виде (22). Очевидно, применяя операторы $a_{l_1 j_1}, a_{l_2 j_2}, ..., a_{l_n j_n}$ к предикату P, изменяться будет лишь слагаемое, представленное предикатом P_1 в то время, как P_2 останется без изменения. Следовательно, на определенном шаге не найдется ни одного сужающего оператора подстановки, а значит, допущение неверно, и предикат P не может быть представлен в виде (22).

Достаточность. Пусть предикат P не может быть представлен в виде (22). Это означает, что хоть одно узнавание каждой из переменных, по которым первоначально не существует сужающих операторов, присутствуют в одной элементарной конъюнкции с переменными, для которых такие операторы существуют. Таким образом, при действии ими на предикат соответствующие слагаемые обратятся в нуль, и, следовательно, появятся новые сужающие операторы.

Например, пусть $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{21}} x_3^{a_{33}} \vee \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{23}} x_3^{a_{32}}$. По переменной x_2 нет сужающих операторов, но узнавание $x_2^{a_{21}}$ находится в одной элементарной конъюнкции с переменной x_2, по которой существуют сужающие операторы a_{12} и a_{13}. Итак, $a_{12}(P) = P_1 = x_2^{a_{22}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{23}} x_3^{a_{32}}$. Тогда $a_{21}(P_1) = 0$.

Пусть $P(x_1, x_2, x_3) = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}} \vee x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{23}} x_3^{a_{33}}$. Тогда P можно представить в виде (22), где $P_1 = x_1^{a_{12}} x_2^{a_{21}}$, $P_2 = x_2^{a_{21}} x_3^{a_{31}} \vee x_2^{a_{22}} x_3^{a_{32}} \vee x_2^{a_{23}} x_3^{a_{33}}$, значит, не существует последовательности операторов, сводящих данный предикат к нулю.

Утверждение 23. Для того чтобы для предиката P, представленного в виде КНФ, существовала последовательность сужающих операторов подстановки, сводящих данный предикат к нулю, необходимо и достаточно, чтобы предикат P нельзя было представить в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = P_1(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge \wedge P_2(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}), \tag{25}$$

где $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ – переменные, по которым существуют сужающие операторы подстановки.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, существует последовательность сужающих операторов $a_{l_1 j_1}, a_{l_2 j_2}, ..., a_{l_n j_n}$ такая, что $a_{l_n j_n}(a_{l_{n-1} j_{n-1}}(...(a_{l_1 j_1}(P)))) = 0$. Пусть также предикат P нельзя представить в виде (23), т.е. все элементарные дизъюнкции содержат переменные, для которых не существует сужающих операторов. Очевидно, в этом случае при действии сужающих операторов по переменным, кроме $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$, эти переменные останутся без изменения. Таким образом, действие последовательности сужающих операторов не приводит к нулю, а значит, предположение неверно.

Достаточность. Пусть предикат P может быть представлен в виде (23). Это означает, что действуя последовательно сужающими операторами на предикат P, второй сомножитель в (23) обратится в нуль, тем самым обращая в нуль весь предикат, что и требовалось доказать.

Утверждение 24. Для того чтобы для предиката P, представленного в виде ДНФ, существовала последовательность расширяющих операторов подстановки, сводящих данный предикат к единице, необходимо и достаточно, чтобы предикат P нельзя было представить в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = P_1(x_1, x_2, ..., x_n) \vee \vee P_2(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}), \quad (26)$$

где $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ – переменные, по которым существуют расширяющие операторы подстановки.

Утверждение 25. Для того чтобы для предиката P, представленного в виде КНФ, существовала последовательность расширяющих операторов подстановки, сводящих данный предикат к единице, необходимо и достаточно, чтобы предикат P можно было представить в виде

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = P_1(x_1, x_2, ..., x_n) \wedge \wedge P_2(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}), \quad (27)$$

где $x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k}$ – переменные, по которым не существует расширяющих операторов подстановки.

Доказательство утверждений 18 и 19 аналогично доказательству утверждений 16 и 17.

Выводы

Таким образом, в статье введено определение операции подстановки, а также исследованы результаты ее действия на предикат, представленный в виде дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной формы. Введены также определения сужающих, расширяющих и смещающих операторов, а также исследованы условия их существования. При этом найдены необходимые и достаточные условия существования различных операций, введенных в алгебре подстановочных операций, и построения последовательности таких операций для получения специальных видов предикатов.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* Теория интеллекта. Математические средства [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Харьков, – 1984. – 144 с. 2. *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* Теория интеллекта. Технические средства средства [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Харьков, – 1986. – 176 с. 3. *Шабанов-Кушнаренко, Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы средства [Текст] / Ю.П. Шабанов-Кушнаренко. – Харьков, – 1987. – 210 с.

Поступила в редколлегию 9.11.2011

УДК 519.7

Застосування підстановчих операцій до предикатів, що представлені формулами алгебри предикатів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, Д.Е. Ситніков, П.Е. Ситнікова, А.І. Коваленко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2012. – № 1 (78). – С. 3-11.

Отримано залежності між вихідними предикатами, що мають різноманітні форми, та предикатами, отриманими у результаті дій підстановчих операцій.

Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Application of substitution operations to predicates represented with the help of finite predicates algebra / M.F. Bondarenko, U.P. Shabanov-Kushnarenko, D.E. Sitnikov, P.E. Sitnikova, A.I. Kovalenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2012. – № 1 (78). – P. 3-11.

Dependencies between original predicates in various forms and predicates obtained as a result of the application of substitution operations have been obtained.

Ref.: 3 items.