УДК 519.7

ОБ АЛГЕБРЕ ПРЕДИКАТОВ

М. Ф. Бондаренко[1], Н. П. Кругликова[2], И. А. Лещинская[3], Н. Е. Русакова[4], Ю. П. Шабанов-Кушнаренко[5]

[1-5] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В статье рассматривается алгебра логических элементов, называемая алгеброй логики. Обобщение этой алгебры приводит к понятию алгебры Буля. Рассматривается алгебра конечных предикатов как частный случай алгебры Буля. В алгебре конечных предикатов вводится понятие скобочной формы, которое рекомендуется для практического применения в качестве средства экономного представления конечных отношений.

АЛГЕБРА ЛОГИКИ, АЛГЕБРА БУЛЯ, АЛГЕБРА ПРЕДИКАТОВ, СКОБОЧНАЯ ФОРМА

Введение

Аксиомам алгебры Буля удовлетворяют некоторые математические структуры, имеющие большое значение для теории интеллекта. К таким структурам относятся, например, алгебра логики, алгебра множеств, алгебра конечных предикатов. Обобщив алгебру логики, можно получить алгебру Буля. Разновидностью алгебры Буля является алгебра конечных предикатов. Целью статьи является введение в алгебре конечных предикатов понятия скобочной формы предиката, которую можно получить, применяя всюду, где только это возможно, операцию группировки предикатов узнавания предмета.

1. Алгебра логики

Рассмотрим множество $\Sigma = \{0,1\}$, состоящее из элементов 0 и 1, называемых *логическими*. Введем *логические переменные* $\xi, \eta \in \Sigma$. На множестве Σ определяем *логические операции дизъюнкции* $\xi \vee \eta$, *конъюнкции* $\xi \wedge \eta = \xi \cdot \eta = \xi\eta$ и *отрицания* $\neg\xi = \bar{\xi}$ следующими равенствами: $0 \vee 0 = 0$, $0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1$; $0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0$, $1 \wedge 1 = 1$; $\neg 0 = 1, \neg 1 = 0$. Система, состоящая из множества Σ и заданных на нем операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$, называется *алгеброй логики*. Множество Σ играет роль *носителя* алгебры логики, а логические операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ — роль ее *базисных операций*.

Мы определили алгебру логики *конструктивно*, задав ее базисные операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ на носителе Σ *прямым определением*. Теперь введем эту же алгебру еще и *абстрактно косвенным определением,* задав ее базисные операции их свойствами с помощью перечисленных ниже *аксиом*, называемых *законами логики*. Свойства операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$ записываем в виде равенств, связывающих логические переменные ξ, η, ζ. Имеется в виду, что каждое равенство должно выполняться при любых $\xi, \eta, \zeta \in \Sigma$.

Формулируем *законы идемпотентности*

$$\xi \vee \xi = \xi,\ \xi \wedge \xi = \xi;$$

коммутативности

$$\xi \vee \eta = \eta \vee \xi,\ \xi \wedge \eta = \eta \wedge \xi;$$

ассоциативности

$$(\xi \vee \eta) \vee \zeta = \xi \vee (\eta \vee \zeta),\ (\xi \wedge \eta) \wedge \zeta = \xi \wedge (\eta \wedge \zeta);$$

дистрибутивности

$$(\xi \vee \eta)\zeta = \xi\zeta \vee \eta\zeta,\ \xi\eta \vee \zeta = (\xi \vee \zeta)(\eta \vee \zeta);$$

элиминации

$$\xi \vee \xi\eta = \xi,\ \xi(\xi \vee \eta) = \xi;$$

свертывания

$$\xi \vee \eta\bar{\eta} = \xi,\ \xi(\eta \vee \bar{\eta}) = \xi;$$

двойного отрицания

$$\bar{\bar{\xi}} = \xi;$$

де Моргана

$$\overline{\xi \vee \eta} = \bar{\xi}\bar{\eta},\ \overline{\xi\eta} = \bar{\xi} \vee \bar{\eta};$$

исключенного третьего

$$\xi \vee \bar{\xi} = 1;$$

противоречия

$$\xi\bar{\xi} = 0;$$

сохранения нуля и единицы

$$\xi \wedge 0 = 0,\ \xi \vee 1 = 1;$$

исключения нуля и единицы

$$\xi \vee 0 = \xi,\ \xi \wedge 1 = \xi.$$

Логические операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ подчиняются законам логики. Чтобы удостовериться в этом, достаточно проверить, что все эти законы превращаются в равенства для каждого из восьми возможных наборов значений переменных $\xi, \eta, \zeta \in \Sigma$. Эту проверку легко осуществить практически. К примеру, берем набор $\xi = 1, \eta = 0, \zeta = 1$ и убеждаемся, что он обращает в равенство второй закон дистрибутивности $\xi\eta \vee \zeta = (\xi \vee \zeta)(\eta \vee \zeta)$:

$$1 \cdot 0 = 1 = 0 \vee 1 = 1,\ (1 \vee 1)(0 \vee 1) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Вместе с тем, свойства операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$, выраженные законами логики, однозначно определяют эти операции. Действительно, из законов $P \vee 1 = 1$, $P \vee 0 = P$ выводим

$$0 \vee 0 = 0,\ 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1;$$

из законов $P \wedge 0 = 0$, $P \wedge 1 = P$ выводим

$$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \text{ , } 1 \wedge 1 = 1 \text{;}$$

из законов $P \vee \bar{P} = 1$, $P\bar{P} = 0$, $\overline{P \vee Q} = \bar{P}\bar{Q}$, $\overline{PQ} = \bar{P} \vee \bar{Q}$, $\bar{\bar{P}} = P$, $P \vee Q = Q \vee P$, $PQ = QP$ выводим

$$\bar{0} = \overline{P\bar{P}} = \bar{P} \vee \bar{\bar{P}} = \bar{P} \vee P = P \vee \bar{P} = 1 \text{ ,}$$

$$\bar{1} = \overline{P \vee \bar{P}} = \bar{P}\bar{\bar{P}} = \bar{P}P = P\bar{P} = 0 \text{ .}$$

Мы фактически построили аксиоматическую теорию алгебры логики. Как видим, она имеет единственную *модель*, совпадающую с алгеброй логики. Следовательно, эта теория *непротиворечива* и *содержательно полна*. Итак, мы получили полноценное *абстрактное определение понятия алгебры логики*.

Далее, опишем на языке алгебры предикатов *аксиоматическую теорию алгебры логики*. Вводим четыре *исходных предиката* этой теории $\Sigma(\xi)$, ДИЗ(ξ, η, ζ), КОН(ξ, η, ζ), ОТР(ξ, η) . Переменные ξ, η, ζ определяем на произвольно выбираемом универсуме U . Предикат $\Sigma(\xi) = \xi^0 \vee \xi^1$ формально выражает *понятие логического элемента*. Если $\Sigma(\xi) = 1$, то ξ есть логический элемент, если $\Sigma(\xi) = 0$, то ξ не есть логический элемент. Предикату $\Sigma(\xi)$ соответствует множество $\Sigma = \{0,1\}$, где 0 и 1 – *имена логических элементов*. Предикаты ДИЗ(ξ, η, ζ) , КОН(ξ, η, ζ) и ОТР(ξ, η) формально выражают понятия дизъюнкции $\xi \vee \eta = \zeta$, конъюнкции $\xi \wedge \eta = \zeta$ и отрицания $\neg\xi = \eta$ логических элементов. Следующие три аксиомы формально выражают тот факт, что отношения ДИЗ(ξ, η, ζ) , КОН(ξ, η, ζ) и ОТР(ξ, η) являются функциями:

$$\forall \xi, \eta \in \Sigma \; \exists! \zeta \in \Sigma \text{КОН}(\xi, \eta, \zeta);$$

$$\forall \xi, \eta \in \Sigma \; \exists! \zeta \in \Sigma \text{ДИЗ}(\xi, \eta, \zeta);$$

$$\forall \xi \in \Sigma \; \exists! \eta \in \Sigma \text{ОТР}(\xi, \eta).$$

Способ перехода к формальной записи остальных законов продемонстрируем на примере первого закона ассоциативности. Соотношение $(\xi \vee \eta) \vee \zeta = \xi \vee (\eta \vee \zeta)$ выражается высказыванием:

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in \Sigma \; ((\xi \vee \eta) \vee \zeta = \xi \vee (\eta \vee \zeta)).$$

Это – сокращенная запись. Переход к полной записи приводит к следующей формулировке этого закона:

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in \Sigma \; \exists \; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Sigma \; (\text{ДИЗ}(\xi, \eta, \alpha) \wedge$$
$$\wedge \text{ДИЗ}(\alpha, \zeta, \beta) \wedge \text{ДИЗ}(\eta, \zeta, \gamma) \wedge \text{ДИЗ}(\xi, \gamma, \delta) \wedge D(\beta, \delta)) \text{ .}$$

Здесь D – предикат равенства на универсуме $U \times U$; $\alpha = \xi \vee \eta$, $\beta = \alpha \vee \zeta$, $\gamma = \eta \vee \zeta$, $\delta = \xi \vee \gamma$.

Наконец, запишем на языке отношений и на языке алгебры предикатов *модель теории алгебры логики*:

$$\Sigma = \{0,1\}, \text{ ДИЗ} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\},$$
$$\text{КОН} = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\},$$
$$\text{ОТР} = \{(0, 1), (1, 0)\};$$
$$\Sigma(\xi) = \xi^0 \vee \xi^1 ,$$
$$\text{ДИЗ}(\xi, \eta, \zeta) = \xi^0\eta^0\zeta^0 \vee \xi^0\eta^1\zeta^1 \vee \xi^1\eta^0\zeta^1 \vee \xi^1\eta^1\zeta^1 ,$$
$$\text{КОН}(\xi, \eta, \zeta) = \xi^0\eta^0\zeta^0 \vee \xi^0\eta^1\zeta^0 \vee \xi^1\eta^0\zeta^0 \vee \xi^1\eta^1\zeta^1 ,$$
$$\text{ОТР}(\xi, \eta) = \xi^0\eta^1 \vee \xi^1\eta^0 .$$

Для теории алгебры логики пустой и одноэлементный универсумы не годятся, т.к. эта теория обращается в противоречие. Таким образом, универсум U должен содержать, по крайней мере, два элемента.

2. Алгебра Буля

Понятие алгебры логики можно обобщить. В результате такого обобщения получаем алгебру Буля. Множество $\Sigma = \{0,1\}$ пополняем элементами произвольным образом. В результате получаем множество M . По определению $\Sigma \subseteq M$, так что любое множество M содержит элементы 0 и 1. Элементы множества M называются *булевыми*. Множество M играет роль *носителя алгебры Буля*. Вводим *булевы переменные* $P, Q, R \in M$ и *булевы операции* $\vee$, $\wedge$, $\neg$ над элементами множества M , удовлетворяющие законам логики: $P \vee P = P$, $P \wedge P = P$; $P \vee Q = Q \vee P$, $P \wedge Q = Q \wedge P$; $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$, $(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$; $(P \vee Q) R = P R \vee Q R$, $PQ \vee R = (P \vee R)(Q \vee R)$; $P \vee PQ = Q$, $P(P \vee Q) = P$; $P \vee Q\bar{Q} = P$, $P(Q \vee \bar{Q}) = P$; $\bar{\bar{P}} = P$; $\overline{P \vee Q} = \bar{P}\bar{Q}$, $\overline{PQ} = \bar{P} \vee \bar{Q}$; $P \vee \bar{P} = 1$, $P \bar{P} = 0$; $P \wedge 0 = 0$, $P \vee 1 = 1$; $P \vee 0 = P$, $P \wedge 1 = P$.

Система, состоящая из множества M и заданных на нем булевых операций $\vee$, $\wedge$, $\neg$, которые удовлетворяют законам логики, называется *алгеброй Буля*. Булевы операции $\vee$, $\wedge$, $\neg$ выполняют в алгебре Буля роль *базисных операций*. Если принять $M = \Sigma$, то алгебра Буля превращается в ее частный случай – алгебру логики. Алгебра логики является *подалгеброй* алгебры Буля с минимальным числом элементов в ее носителе M . Исходная система аксиом алгебры Буля избыточна. Известна [1] более экономная система аксиом алгебры Буля, состоящая всего из семи аксиом: $P \vee P = P$, $P \vee Q = Q \vee P$, $(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$, $(P \vee Q) R = \; = P R \vee Q R$, $P \vee Q\bar{Q} = P$, $\bar{\bar{P}} = P$, $\overline{P \vee Q} = \bar{P}\bar{Q}$. В этой системе элементы 0 и 1 явно не введены. Но их можно ввести прямым определением: $P \wedge \bar{P} = 0$ и $P \vee \bar{P} = 1$, где P – произвольно выбранный элемент множества M . Если операции $\vee$ и $\wedge$ уже определены, то отрицание $Q = \bar{P}$ определяется однозначно: оно удовлетворяет следующей системе уравнений: $P \vee Q = 1$ и $P \wedge Q = 0$.

Все законы в исходной аксиоматической системе алгебры Буля – парные, они называются *двойствен-*

ными друг другу. Каждый закон в паре превращается в двойственный ему после замены в нем 0 на 1, 1 на 0, $\vee$ на $\wedge$ и $\wedge$ на $\vee$. Исключение представляет закон двойного отрицания, который двойствен самому себе, т.е. *самодвойствен*. Второй закон в каждой паре выводится из первого и из закона двойного отрицания. Выведем, к примеру, второй закон де Моргана $\overline{PQ} = \bar{P} \vee \bar{Q}$ из первого $\overline{P \vee Q} = \bar{P}\bar{Q}$ и из закона двойного отрицания $\bar{\bar{P}} = P$:

$$\overline{PQ} = \overline{\bar{\bar{P}}\bar{\bar{Q}}} = \overline{\left(\bar{P}\right)\left(\bar{Q}\right)} = \bar{\bar{\bar{P} \vee \bar{Q}}} = \bar{P} \vee \bar{Q}.$$

Первый закон элиминации $P \vee PQ = Q$ следует из законов $P \wedge 1 = P$, $(P \vee Q)R = P\,R \vee Q\,R$, $P \vee Q = Q \vee P$, $P \vee 1 = 1$:

$$P \vee PQ = P \wedge 1 \vee PQ = P(1 \vee Q) = P(Q \vee 1) = P \wedge 1 = P.$$

Можно доказать, что и законы $P \wedge 0 = 0$, $P \vee 0 = P$ исходной системы алгебры Буля выводятся из ее экономной системы, так что обе аксиоматические системы логически равносильны. Вторая система аксиом несократима. Оказывается, что алгебры Буля существуют не для любых носителей M. Можно доказать, что в роли носителя алгебры Буля годятся лишь такие множества M, мощность $|M|$ которых выражается формулой:

$$|M| = 2^{|N|},$$

где N – какое-нибудь непустое множество.

3. Алгебра предикатов

Разновидностью булевой алгебры является *алгебра конечных предикатов*, описываемая ниже. Пусть $A_1, A_2, ..., A_m$ – какие-нибудь непустые конечные множества. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$, заданные на этих множествах, называются *предметными*. Значения предметных переменных называются *предметами*. Множество $U = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ всех предметов называется *универсумом*. Предикатом P типа $\tau = (x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m)$ называется любая функция $P(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \xi$, отображающая декартово произведение $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ множеств A_1, $A_2, ..., A_m$ в множество Σ. Будем говорить, что предикаты P типа τ *заданы* на множестве A. Формируем множество M_τ всех предикатов типа τ. Любая булева алгебра, у которой в роли множества M выступает множество M_τ, называется *алгеброй конечных предикатов* типа τ. В роли базисных операций в алгебре конечных предикатов выступают операции дизъюнкции $P \vee Q$, конъюнкции $P \wedge Q$ предикатов $P, Q \in M_\tau$ и отрицания $\neg P$ предиката $P \in M_\tau$, которые определяются следующими равенствами:

$$(P \vee Q)(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \vee Q(x_1, x_2, \ldots, x_m);$$
$$(P \wedge Q)(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= P(x_1, x_2, \ldots, x_m) \wedge Q(x_1, x_2, \ldots, x_m);$$
$$(\neg P)(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \neg(P(x_1, x_2, \ldots, x_m)).$$

Имеется ввиду, что эти равенства справедливы при любых $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m$. Непосредственной проверкой можно доказать, что алгебра конечных предикатов любого типа τ удовлетворяет всем аксиомам булевой алгебры. В роли элементов $0, 1 \in M_\tau$ в булевой алгебре конечных предикатов используются тождественно ложный и тождественно истинный предикаты, определяемые следующим образом:

$$0(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0,$$
$$1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 1$$

при любых $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots, x_m \in A_m$.

Любая булева алгебра, заданная на конечном носителе M, называется *конечной*. Важно то, что каждому варианту конечной булевой алгебры можно поставить во взаимно однозначное соответствие изоморфный ему вариант алгебры конечных предикатов. Это означает, что любая булева алгебра, скрытая в абстрактном определении конечной булевой алгебры, может быть сконструирована явно в виде конкретной алгебры конечных предикатов, пригодной для практического использования.

Канонической алгеброй предикатов над M_τ называется любая булева алгебра конечных предикатов над M_τ, базис элементов которой образован из предикатов 0, 1 и всех предикатов узнавания предмета

$$P_{i,\,a} = x_i^{\,a},$$

где $i = \overline{1,m}, a \in A_i$. Каноническую алгебру предикатов можно определить абстрактно для любого носителя M_τ, если к системе законов булевой алгебры добавить *закон истинности*

$$\bigvee_{a \in A_i} P_{i,a} = 1, \text{ где } i = \overline{1,m}$$

и *закон ложности*

$$P_{i,a_1} \wedge P_{i,a_2} = 0, \text{ если } a_1 \neq a_2;\ a_1, a_2 \in A_i,\ i = \overline{1,m}.$$

Дизъюнктивно-конъюнктивной алгеброй предикатов над M_τ называется такая алгебра предикатов над M_τ, базис операций которой образован из операций дизъюнкции и конъюнкции, а базис элементов – из предикатов 0,1 и всех предикатов узнавания предмета $x_i^{\,a}$, где $i = \overline{1,m}, a \in A_i$. При любом τ дизъюнктивно-конъюнктивная алгебра предикатов *полна*. Каждый предикат $P \in M_\tau$ в ней выражается формулой:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_m) =$$
$$= \bigvee_{(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in A} P(a_1, a_2, \ldots, a_m)\, x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}. \quad (1)$$

Произведения вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_m^{a_m}$ называются *конституэнтами единицы* предиката P. Формула, стоящая в правой части равенства (1), называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *СДНФ*) предиката P .

Рассмотрим пример СДНФ предиката. Пусть $A_1 = A_2 = A_3 = A = \{a, b, c\}$, $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, x_3 \in A_3$, предикат $P(x_1, x_2, x_3)$ задан табл.1.

Таблица 1

		x_2x_3								
		a a	*a b*	*a c*	*b a*	*b b*	*b c*	*c a*	*c b*	*c c*
x_1	*a*	0	1	1	0	1	0	0	0	0
	b	0	1	1	1	1	0	0	0	0
	c	0	0	0	0	1	0	0	0	1

СДНФ предиката P , заданного табл. 1, выражается формулой:

$$P(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^c \vee$$
$$\vee x_1{}^a x_2{}^b x_3{}^b \vee x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^c \vee x_1{}^b x_2{}^b x_3{}^a \vee \qquad (2)$$
$$\vee x_1{}^b x_2{}^b x_3{}^b \vee x_1{}^c x_2{}^b x_3{}^b \vee x_1{}^c x_2{}^c x_3{}^c .$$

СДНФ предиката ценна тем, что по ней легко отыскивается множество всех корней уравнения

$$P(x_1, x_2, ..., x_m) = 1 . \qquad (3)$$

Каждой конституэнте единицы $x_1{}^{a_1} x_2{}^{a_2} ... x_m{}^{a_m}$ предиката P соответствует свое решение $(a_1, a_2, ..., a_m)$, обращающее уравнение (3) в тождество

$$P(a_1, a_2, ..., a_m) = 1 .$$

Множество всех корней уравнения (3) называется *отношением* P , *соответствующим предикату* P . Предикату (2) соответствует отношение:

$$P = \{(a, a, b), (a, a, c), (a, b, b), (b, a, b), (b, a, c),$$
$$(b, b, a), (b, b, b), (c, b, b), (c, c, c)\}.$$

4. Скобочная форма предиката

Все решения уравнения (3) можно записать в более компактном виде, если воспользоваться *скобочной формой предиката* P . Ее можно получить, применяя всюду, где только это возможно. Операцию группировки предикатов узнавания предмета:

$$\Phi x_i^{\sigma_1} \vee \Phi x_i^{\sigma_2} \vee \ ... \ \vee \Phi x_i^{\sigma_r} =$$
$$= \Phi(x_i^{\sigma_1} \vee x_i^{\sigma_2} \vee \ ... \ \vee x_i^{\sigma_r}). \qquad (4)$$

Эту операцию используем при любом $i = \overline{1,m}$. Символом Φ обозначен общий множитель всех дизъюнктивных членов, стоящих в левой части равенства (4). Индекс r обозначает число всех дизъюнктивных членов в формуле предиката P , в которых встречается множитель Φ . Рассмотрим пример применения операции (4). Берем $i = 1$ и множитель $\Phi = x_2{}^a x_3{}^b$. Выбираем из формулы (2) все подходящие дизъюнктивные члены. Полученную формулу подвергаем операции (4):

$$x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^b = (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a x_3{}^b .$$

Затем переходим к другому возможному множителю $\Phi = x_2{}^a x_3{}^c$:

$$x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^c \vee x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^c = (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a x_3{}^c .$$

Остается множитель $\Phi = x_2{}^b x_3{}^b$:

$$x_1{}^a x_2{}^b x_3{}^b \vee x_1{}^b x_2{}^b x_3{}^b \vee x_1{}^c x_2{}^b x_3{}^b = (x_1{}^a \vee x_1{}^b \vee x_1{}^c) x_2{}^b x_3{}^b .$$

Переходим к $i = 2$. При $\Phi = x_1{}^a x_3{}^b$, имеем:

$$x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^a x_2{}^b x_3{}^b = x_1{}^a (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b .$$

При $\Phi = x_1{}^b x_3{}^b$:

$$x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^b x_2{}^b x_3{}^b = x_1{}^b (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b .$$

Переходим к $i = 3$. При $\Phi = x_1{}^a x_2{}^a$, имеем:

$$x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^a x_2{}^a x_3{}^c = x_1{}^a x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c).$$

При $\Phi = x_1{}^b x_2{}^a$:

$$x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^b \vee x_1{}^b x_2{}^a x_3{}^c = x_1{}^b x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c).$$

При $\Phi = x_1{}^b x_2{}^b$:

$$x_1{}^b x_2{}^b x_3{}^a \vee x_1{}^b x_2{}^b x_3{}^b = x_1{}^b x_2{}^b (x_3{}^a \vee x_3{}^b).$$

Заменяя в формуле (2) использованные дизъюнктивные члены вновь полученными, приходим к следующей формуле предиката P :

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a x_3{}^b \vee (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a x_3{}^c \vee$$
$$\vee (x_1{}^a \vee x_1{}^b \vee x_1{}^c) x_2{}^b x_3{}^b \vee x_1{}^a (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b \vee$$
$$\vee x_1{}^b (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b \vee x_1{}^a x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c) \vee$$
$$\vee x_1{}^b x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c) \vee x_1{}^b x_2{}^b (x_3{}^a \vee x_3{}^b) \vee x_1{}^c x_2{}^c x_3{}^c .$$

Процесс группировки еще не закончен. Принимая $i = 3$ и $\Phi = (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a$, получаем:

$$(x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a x_3{}^b \vee (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a x_3{}^c =$$
$$= (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c).$$

Точно так же при $i = 1$ и $\Phi = (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b$ имеем:

$$x_1{}^a (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b \vee x_1{}^b (x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b =$$
$$= (x_1{}^a \vee x_1{}^b)(x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b .$$

Кроме того, при $i = 2$ и $\Phi = x_1{}^b (x_3{}^b \vee x_3{}^c)$ находим:

$$x_1{}^a x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c) \vee x_1{}^b x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c) =$$
$$= (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c).$$

Окончательно получаем следующую скобочную форму предиката P

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1{}^a \vee x_1{}^b) x_2{}^a (x_3{}^b \vee x_3{}^c) \vee (x_1{}^a \vee x_1{}^b \vee$$
$$\vee x_1{}^c) x_2{}^b x_3{}^b \vee (x_1{}^a \vee x_1{}^b)(x_2{}^a \vee x_2{}^b) x_3{}^b \vee \qquad (5)$$
$$\vee x_1{}^b x_2{}^b (x_3{}^a \vee x_3{}^b) \vee x_1{}^c x_2{}^c x_3{}^c$$

Формула (5) состоит из пяти дизъюнктивных членов, называемых *простыми импликантами*. Каждая из них представляет собой наибольшее декартово произведение, включенное в отношение P. Дизъюнкция всех простых импликант предиката P соответствует множеству всех решений уравнения (3).

Простые импликанты предиката P можно наглядно изобразить графически на таблице предиката. Каждой простой импликанте в m-мерном предметном пространстве соответствует свое нерасширяемое декартово произведение, включенное в отношение P. В табл. 2 в качестве примера представлены все простые импликанты, фигурирующие в формуле (5).

Таблица 2

x_1 \ x_2x_3	$a\,a$	$a\,b$	$a\,c$	$b\,a$	$b\,b$	$b\,c$	$c\,a$	$c\,b$	$c\,c$
a	0	1	1	0	1	0	0	0	0
b	0	1	1	1	1	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0	0	1

1 3 4 2 5

$P(x_1, x_2, x_3)$

Говорят, что каждая простая импликанта предиката P накрывает своими единицами единицы предиката P. Система простых импликант предиката P называется *полной*, если единицами всех простых импликант этой системы накрываются все единицы предиката P. Система всех простых импликант 1 – 5, представленная в табл. 2, полна. Она даже избыточна, т. к. система остается полной после исключения из нее импликанты 3.

Система простых импликант предиката P называется *несократимой,* если она полна и исключение любой импликанты из системы приводит к ее неполноте. Пример несократимой системы простых импликант для предиката (2) приведен в табл. 3.

Таблица 3

x_1 \ x_2x_3	$a\,a$	$a\,b$	$a\,c$	$b\,a$	$b\,b$	$b\,c$	$c\,a$	$c\,b$	$c\,c$
a	0	1	1	0	1	0	0	0	0
b	0	1	1	1	1	0	0	0	0
c	0	0	0	0	1	0	0	0	1

$P(x_1, x_2, x_3)$

Несократимой системе простых импликант предиката P соответствует тупиковая скобочная форма предиката P. В нашем примере существует единственная тупиковая скобочная форма

$$P(x_1, x_2, x_3) = (x_1^a \vee x_1^b) x_2^a (x_3^b \vee x_3^c) \vee (x_1^a \vee x_1^b \vee x_1^c) x_2^b x_3^b \vee x_1^b x_2^b (x_3^a \vee x_3^b) \vee x_1^c x_2^c x_3^c . \qquad (6)$$

Выводы

Тупиковых форм у предиката P может быть много. Выбирая из них форму с наименьшим числом вхождений предикатов узнавания предмета, получаем минимальную скобочную форму предиката P, которая может быть использована в качестве экономного представления всех решений уравнения (3). Следующим шагом может быть описание на языке алгебры конечных предикатов процесс минимизации формул алгебры булевых функций. Делается это с той целью, чтобы начать разработку теории реляционных сетей, решающих уравнения алгебры булевых функций.

Список литературы: 1. *Бондаренко, М.Ф.* Теория интеллекта [Текст] / М. Ф. Бондаренко, Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. – Х.: Изд-во «СМИТ», 2007. – 576 с.

Поступила в редколлегию 11.05.2010.

УДК 519.7

Про алгебру предикатів / М.Ф. Бондаренко, Н.П. Круглікова, І.О. Лещинська, Н.Є. Русакова, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2010. – № 3 (74). – С. 3–7.

У статті розглядається алгебра логіки, яка зводиться до алгебри Буля. Вводиться поняття скобочної форми в алгебрі скінчених предикатів.

Бібліогр.: 1 найм.

UDC 519.7

About algebra of predicates / M.F. Bondarenko, N.P. Kruglikova, I.O. Leshchynska, N.E. Rusakova, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2010. – № 3 (74). – P. 3–7.

Boolean algebra which is taken to algebra Bulja is examined in the article. A concept is entered will accomplish an eye form in algebra of eventual predicates.

Ref.: 1 items.