УДК 681.324

МОДЕЛЬ УЗЛА КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ С ПОВТОРНОЙ ПЕРЕДАЧЕЙ УТЕРЯННЫХ ПАКЕТОВ

П.Е. ПУСТОВОЙТОВ

Построена модель узла компьютерной сети основанная на математическом аппарате систем массового обслуживания и марковских цепей. Модель учитывает хранение копий переданных пакетов до момента получения подтверждения об удачной доставке, в противном случае они опять ставятся в очередь на обслуживание. Получены формулы расчета вероятностей состояний такой системы.

Ключевые слова: компьютерные сети, математическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие информационных технологий затрагивает многие отрасли народного хозяйства, а средством передачи информации являются разного рода компьютерные сети. Компьютерные сети могут использовать различную топологию, маршрутизацию, протоколы и технологии передачи данных. Такие типы соединений узлов сети как wi-fi и adsl могут иметь колеблющийся большой отклик и частые потери пакетов. В свою очередь, маршрутизатор продолжительное время хранит в памяти копии отосланных пакетов и, в случае ошибки передачи, может повторить пересылку. Информацию о том, что пакет данных передался удачно, маршрутизатор узнает, получив от узла-приемника служебный пакет, извещающий об удачной пересылке, тогда копия пакета из памяти удаляется, освобождая место для поступающих пакетов [1-2]. Очевидно, что в случае частых неудачных передач копии пакетов будут накапливаться, занимая память маршрутизатора, что может привести к ситуации, когда узел сети будет отказывать в приеме на обслуживание новых пакетов. Часто такие ситуации возникают при использовании торрентов и других распределенных систем. В свою очередь, увеличение памяти маршрутизатора снижает количество отказов, но, также, приводит к заметному постоянному снижению скорости работы аппарата по передаче пакетов [3].

1. АНАЛИЗ ЛИТЕРАТУРЫ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Таким образом, важной актуальной проблемой является анализ и оценка эффективности функционирования узла с учетом повторной передачи утерянных пакетов. Реальная возможность проведения такого анализа – построение адекватной математической модели узла компьютерной сети. Наибольшие результаты моделирования сетей были получены с использованием математического аппарата систем массового обслуживания и марковских цепей [4].

Рассмотрим модель узла компьютерной сети, на вход которого поступают пакеты из некоторого источника с интенсивностью λ_1. Прибывшие пакеты обслуживаются (передаются следующему узлу) с интенсивностью μ_1, а их копии помещаются в память маршрутизатора до подтверждения об успешной доставке; при этом пакет удаляется из памяти. Интенсивность удаления одного пакета из памяти в случае успешной передачи - μ_2. Если отправленный пакет не достигает адресата, то его резервная копия перемещается в общую очередь для повторной отправки. Пусть интенсивность появления ошибок передачи одного пакета равна λ_2. Память маршрутизатора может вместить в себя n пакетов, среди которых могут быть как копии уже переданных пакетов, ожидающих подтверждения, так и вновь прибывшие, выстроенные в очередь на обслуживание (передачу).

Примем, что интервалы в потоках событий, связанных с поступлением пакетов на вход узла, их передачей, появлением ошибок и удалением успешно переданных пакетов, распределены экспоненциально. Тогда для анализа системы может быть использован аппарат марковских процессов

Построим граф состояний и переходов описанной системы (рис. 1).

Здесь состоянию (i, j) соответствует ситуация, когда в системе хранятся i копий различных переданных пакетов, ожидающих подтверждения об успешной доставке адресату, и j новых прибывших пакетов от источника, ожидающих обслуживания (передачи).

Таким образом, целью работы является отыскание вероятностей пребывания описанной системы на множестве состояний, нахождение

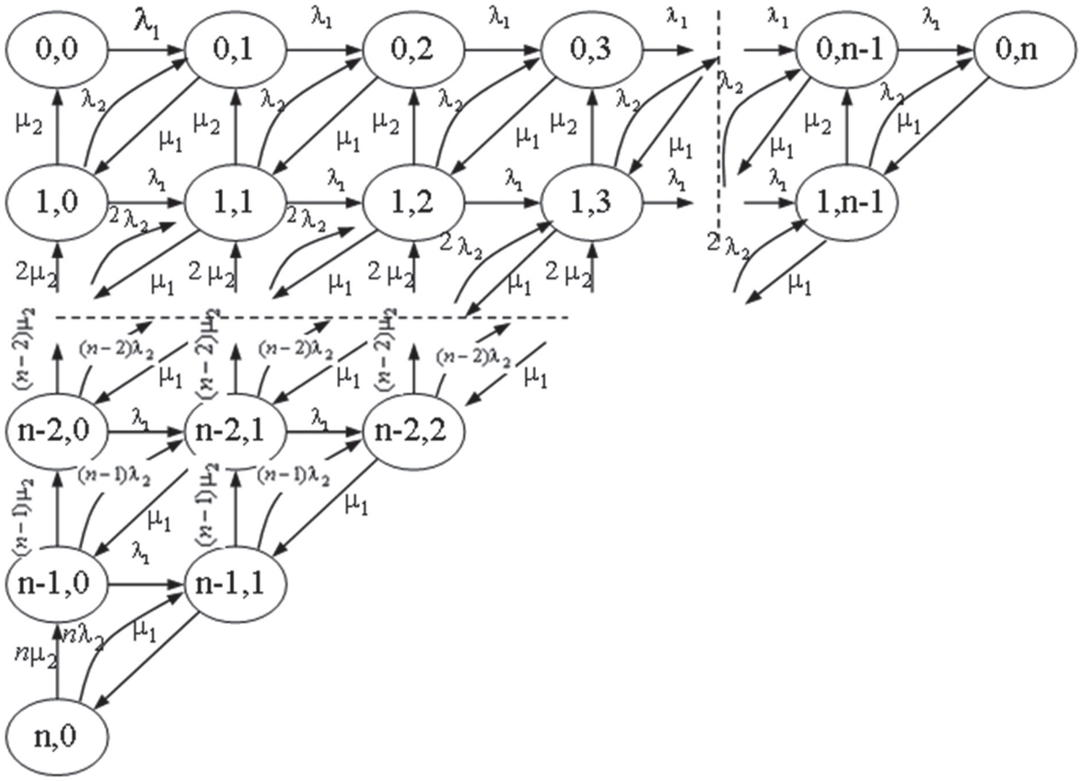

Рис. 1. Граф состояний и переходов системы передачи пакетов

вероятности отказа системы и вероятности инициирования сдерживающего пакета.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Разобьем множество состояний системы на подмножества следующим образом (рис. 2). В подмножество E_i попадут элементы, сумма индексов в которых равна i. Например, множество $E_0 = \{(0,0)\}$, $E_1 = \{(1,0), (0,1)\}$, $E_2 = \{(2,0), (1,1), (0,2)\}$.

Составим уравнения баланса для полученного графа:

$$\begin{cases} \mu_{10} P_1 - \lambda_{01} P_0 = 0, \\ \mu_{21} P_2 + \lambda_{01} P_0 - (\lambda_{12} + \mu_{10}) P_1 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,n} P_{n-1} - \mu_{n,n-1} P_n = 0. \end{cases} \tag{1}$$

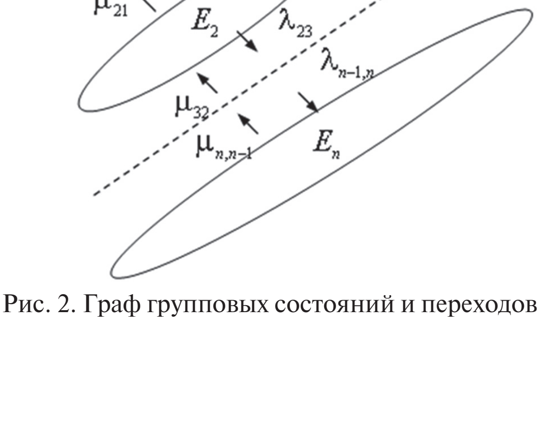

Рис. 2. Граф групповых состояний и переходов

Здесь P_k – вероятность пребывания системы в групповом состоянии k, $\mu_{k,k-1}$ интенсивность переходов из группового состояния k в групповое состояние $k-1$, $\lambda_{k,k+1}$ интенсивность переходов из группового состояния k в групповое состояние $k+1$, $k = 0,1,2,...,n$.

Введем $\hat{P}_{i,k-i}$ – условную вероятность пребывания в i-м состоянии k-го слоя, при условии нахождения в этом слое.

Тогда вероятности переходов между слоями равны

$$\lambda_{k,k+1} = \sum_{i=0}^{k} \lambda_1 \hat{P}_{i,k-i} = \lambda_1 \sum_{i=0}^{k} \hat{P}_{i,k-i} = \lambda, \tag{2}$$

$$\mu_{k,k-1} = \sum_{i=0}^{k} k\mu_2 \hat{P}_{i,k-i} = k\mu_2 \sum_{i=0}^{k} \hat{P}_{i,k-i} = k\mu_2 . \tag{3}$$

Перепишем уравнения баланса с учетом (2)-(3).

$$\begin{cases} \mu_2 P_1 - \lambda_1 P_0 = 0, \\ 2\mu_2 P_2 + \lambda_1 P_0 - (\lambda_1 + \mu_2) P_1 = 0, \\ 3\mu_3 P_3 + \lambda_1 P_1 - (\lambda_1 + 2\mu_2) P_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 P_{n-1} - n\mu_2 P_n = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Введем $z_k = k\mu_2 P_k - \lambda_1 P_{k-1}$ и, выполнив подстановку z_k в (4), получим

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_2 - z_1 = 0, \\ z_3 - z_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ z_n = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Отсюда находим

$$z_k = k\mu_2 P_k - \lambda_1 P_{k-1} = 0\,. \qquad (6)$$

Используя (6), выразим вероятности состояний системы через P_0.

$$P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_0\,,$$

$$P_2 = \frac{\lambda_1}{2\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{2\mu_2}\frac{\lambda_1}{\mu_2} P_0 = \frac{\lambda_1^2}{2\mu_2^2} P_0\,,$$

$$P_3 = \frac{\lambda_1}{3\mu_2} P_2 = \frac{\lambda_1}{3\mu_2}\frac{\lambda_1}{2\mu_2}\frac{\lambda_1}{\mu_2} P_0 = \frac{\lambda_1^3}{3!\mu_2^3} P_0\,,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$P_k = \frac{\lambda_1}{k\mu_2} P_{k-1} = \frac{\lambda_1^k}{k!\mu_2^k} P_0\,, \quad k = 1,2,\ldots,n\,.$$

Введем $\rho = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}$. Из условия нормировки $\sum\limits_{i=0}^{n} P_i = 1$ получим

$$P_0 + \rho P_0 + \frac{\rho^2}{2!}P_0 + \frac{\rho^3}{3!}P_0 + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}P_0 = 1\,,$$

$$P_0\left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right) = 1\,.$$

Поскольку из физических соображений ясно, что $\lambda_1 < \mu_2$, то для достаточно большого n имеем

$$1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} \approx e^{\rho}\,.$$

Тогда

$$P_0 \approx e^{-\rho}\,.$$

При этом

$$P_k = \frac{e^{-\rho}\rho^k}{k!}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,. \qquad (7)$$

Таким образом, найдены вероятности групповых состояний системы. Отыщем теперь распределение вероятностей состояний внутри каждого слоя. Рассмотрим граф состояний и переходов для k слоя (рис. 3).

Составим уравнения баланса:

$$\begin{cases} \lambda_2 \hat{P}_{1,k-1} - \mu_1 \hat{P}_{0,k} = 0, \\ 2\lambda_2 \hat{P}_{2,k-2} + \mu_1 \hat{P}_{0,k} - \lambda_2 \hat{P}_{1,k-1} - \mu_1 \hat{P}_{1,k-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (i+1)\lambda_2 \hat{P}_{i+1,k-(i+1)} + \mu_1 \hat{P}_{i-1,k-(i-1)} - i\lambda_2 \hat{P}_{i,k-i} - \mu_1 \hat{P}_{i,k-i} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k\lambda_2 \hat{P}_{k,0} - \mu_1 \hat{P}_{k-1,1} = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Выполним подстановку переменных $Z_i = i\lambda_2 \hat{P}_{i,k-i} - \mu_1 \hat{P}_{i-1,k-(i-1)}$, которая систему (8) приводит к виду

$$\begin{cases} Z_1 = 0, \\ Z_2 - Z_1 = 0, \\ Z_3 - Z_2 = 0, \\ ----- \\ Z_k = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $Z_i = 0$, $i = 1,..,k$ и, следовательно, $i\lambda_2 \hat{P}_{i,k-i} - \mu_1 \hat{P}_{i-1,k-(i-1)} = 0$.

Тогда

$$\hat{P}_{1,k-1} = \frac{\mu_1}{\lambda_2}\hat{P}_{0,k},$$

$$\hat{P}_{2,k-2} = \frac{\mu_1}{2\lambda_2}\hat{P}_{1,k-1} = \frac{\mu_1}{2\lambda_2}\frac{\mu_1}{\lambda_2}\hat{P}_{0,k} = \frac{\mu_1^2}{2!\lambda_2^2}\hat{P}_{0,k}\,,$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$\hat{P}_{i,k-i} = \frac{\mu_1}{i\lambda_2}\hat{P}_{i-1,k-(i-1)} = \frac{\mu_1^i}{i!\lambda_2^i}\hat{P}_{0,k}\,, \quad i = 1,2,\ldots,k\,.$$

Введем $\alpha = \dfrac{\mu_1}{\lambda_2}$. Из условия нормировки $\sum\limits_{i=0}^{k}\hat{P}_{i,k-i} = 1$ получим

$$\hat{P}_{0,k} + \frac{\alpha}{1!}\hat{P}_{0,k} + \frac{\alpha^2}{2!}\hat{P}_{0,k} + \frac{\alpha^3}{3!}\hat{P}_{0,k} + \ldots + \frac{\alpha^k}{k!}\hat{P}_{0,k} = 1,$$

$$\hat{P}_{0,k}\left(1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots + \frac{\alpha^k}{k!}\right) = 1.$$

Аналогично предыдущему, имеем

$$\hat{P}_{0,k} = e^{-\alpha}.$$

При этом

$$\hat{P}_{i,k-i} = \frac{e^{-\alpha}\alpha^i}{i!}\,, \quad i = 1,2\,\ldots,k\,.$$

Таким образом, найдена условная вероятность пребывания системы в состоянии $(i, k-i)$ при условии нахождения в k слое. Тогда безусловная вероятность нахождения системы в состоянии (i, j) равна

$$P_{i,j} = P_{(i+j)} \times \hat{P}_{i,j} = \frac{\rho^{i+j}\alpha^i}{(i+j)!i!}e^{-(\rho+\alpha)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, было получено соотношение для расчета вероятностей пребывания системы на множестве состояний.

Тогда вероятность отказа

$$P_{\text{отк}} = \sum_{i+j=n} P_{i,j} = \frac{\rho^n}{n!}e^{-(\rho+\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha^i}{i!} = \frac{\rho^n}{n!}e^{-\rho}$$

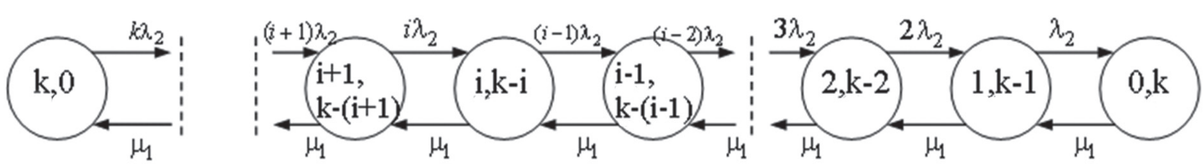

Рис. 3. Граф состояний и переходов для k -го слоя

равна вероятности пребывания в n слое, а вероятность выброса маршрутизатором сдерживающего пакета [3] равна вероятности пребывания системы в групповом состоянии, номер которого вычисляется как наименьшее целое, которое больше чем $\lceil 0.8 * n \rceil$.

Полезно было бы ввести критерий, определяющий среднее число переданных пакетов в единицу времени

$$\eta = m(\lambda_1, n)(1 - P_{\text{отк}}(\lambda_1, \mu_2, n)),$$

где $m(\lambda_1, n)$ – условное среднее число пакетов, которые узел потенциально готов передать при условии отсутствия отказа.

Литература.

[1] *Куроуз Дж.* Компьютерные сети / Дж. Куроуз, К. Росс. – СПб.: Питер, 2004. – 765 с.

[2] *Столлингс В.* Современные компьютерные сети / В.Столлингс. – СПб.: Питер, 2003. – 783 с.

[3] *Таненбаум Э.* Компьютерные сети / Э. Таненбаум – СПб.: Питер, 2003. – 992 с.

[4] *Кемени Дж.* Конечные цепи Маркова: Пер. с англ. / Дж. Кемени, Дж. Снелл. –М.: Наука, 1970. –271 с.

Поступила в редколлегию 16.02.2012

Пустовойтов Павел Евгеньевич, канд. техн. наук, доцент кафедры систем информации Национального технического университета «Харьковский политехнический институт». Область научных интересов: компьютерные сети, математическое моделирование.

УДК 681.324

Модель вузла комп'ютерної мережі із повторною передачею втрачених пакетів / П.Є. Пустовойтов // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2012. Том 11. № 1. – С. 87–90.

Побудовано модель вузла комп'ютерної мережі, яка заснована на математичному апараті систем масового обслуговування й марківських цепів. Модель ураховує зберігання копій переданих пакетів до моменту одержання підтвердження про вдалу доставку, а якщо ні, то вони знову ставляться в чергу на обслуговування. Отримані формули розрахунків ймовірностей станів такої системи.

Ключові слова: комп'ютерні мережі, математичне моделювання.

Іл. 03. Бібліогр.: 04 найм.

UDC 681.324

A model of a network node with retransmission of lost packets / P.E. Pustovoitov // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. – 2012. Vol. 11. № 1. – P. 87–90.

A network node model based on the mathematical tools of queuing systems and Markov chains is developed. The model takes into account the storage of sent packages copies until the moment of successful delivery confirmation reception; otherwise they are again enqueued on service. Formulas to estimate the probabilities of system states are obtained.

Keywords: computer networks, mathematical modelling.

Fig. 03. Ref.: 04 items.