О НОРМАЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ С ГАУССОВЫМИ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

УДК 621.396

ЗАМЕЧАНИЕ К СООБЩЕНИЮ «О СВОЙСТВЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЧАСТНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С ГАУССОВОЙ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ» *)

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ

Дан простой вывод формулы частных коэффициентов корреляции комплексного стационарного процесса с гауссовой автокорреляционной функцией – широко используемой модели случайных процессов различной физической природы.

Ключевые слова: стационарный процесс, гауссова АКФ, частный коэффициент корреляции, детерминант.

В работе [1] рассматривается круговой комплексный стационарный процесс с дискретным временем $\{x(K)\}$ и гауссовой автокорреляционной функцией (АКФ)

$$R_x(n) = \rho^{n^2} \cdot e^{j\cdot\omega_0\cdot n} \quad (1)$$

для коэффициентов **частной** корреляции [2, 3] которого $K_1, K_2, \ldots, K_i$ доказывается формула

$$K_i = (-\rho \cdot e^{j\cdot\omega_0})^i, \quad \forall i \in I^+. \quad (2)$$

Эта формула верна, однако ее доказательство в [1] представляется неоправданно сложным.

Можно предложить существенно более простое доказательство, базирующееся только на стандартном определении коэффициентов частной корреляции и специфике АКФ (1).

Действительно, для произвольной АКФ

$$K_i = (-1)^i \cdot \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{B}_i}, \quad (3)$$

где $\det \mathbf{C}$ – детерминант матрицы $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}_i = \{a_{pq}\}_{p,q=1}^{i}$ и $\mathbf{B}_i = \{b_{pq}\}_{p,q=1}^{i}$ – матрицы размера $i \times i$ с элементами

$$a_{pq} = \varphi_{p+1,\,q}, \qquad b_{pq} = \varphi_{pq},$$

определяемыми элементами $(i+1)\times(i+1)$ теплицевой корреляционной матрицы

$$\mathbf{\Phi}_{i+1} = \{\varphi_{pq}\}_{p,q=1}^{i+1}, \quad \varphi_{pq} = R_x(p-q),$$

порождаемой исходной АКФ $R_x(n)$.

Для рассматриваемой АКФ (1)

$$\varphi_{pq} = b_{pq} = \rho^{(p-q)^2} \cdot e^{j\cdot\omega_0\cdot(p-q)},$$

$$a_{pq} = \rho^{(p-q+1)^2} \cdot e^{j\cdot\omega_0\cdot(p-q+1)} = \rho^{2\cdot p} \cdot \rho \cdot e^{j\cdot\omega_0} \cdot b_{pq} \cdot \rho^{-2\cdot q}$$

и, следовательно,

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{D}_i \cdot \left(\rho \cdot e^{j\cdot\omega_0} \cdot \mathbf{B}_i\right) \cdot \mathbf{D}_i^{-1}$$

где $\mathbf{D}_i = diag\{d_p\}_{p=1}^{i}$ – диагональная матрица с элементами $d_p = \rho^{2\cdot p}$ на главной диагонали.

В связи с этим

$$\det \mathbf{A}_i = \det\left(\mathbf{D}_i \cdot \mathbf{D}_i^{-1}\right) \cdot \det\left(\rho \cdot e^{j\cdot\omega_0} \cdot \mathbf{B}_i\right) = \left(\rho \cdot e^{j\cdot\omega_0}\right)^i \cdot \det \mathbf{B}_i$$

что в сочетании с (3) завершает доказательство (2).

Примечание. Из отзыва рецензента автору стала известна работа [4], в которой дано более простое, чем в [1], доказательство равенства (2) в условиях (1). Это доказательство также представляется неоправданно сложным, поскольку опирается на ряд технических и физических понятий (решетчатые фильтры, дискретные линии передачи, обратное рассеяние и т.п.), в которых для решения поставленной в [1] задачи, как показывает наше доказательство, нет необходимости. Физическая интерпретация [4] равенства (2), расширяя рамки [1], представляет самостоятельный интерес, хотя и не является единственной (см., например, [5]).

Автор благодарен анонимному рецензенту, указавшему ему на работу [4].

Ответ авторов

За время, истекшее с момента опубликования нашего письма [1], оно привлекло внимание многих коллег, предложивших различные интерпретации и объяснения свойства, доказанного в сообщении.

Доказательство, предлагаемое Леховицким, основанное на простом сдвиге столбцов теплицевой матрицы специального вида, безусловно, отличается краткостью и имеет свои достоинства.

В своем ответе нам хотелось бы воспользоваться данной возможностью, чтобы вновь привлечь внимание к существенным рекуррентным особенностям задачи, кратко отмеченным в оригинальном доказательстве.

В частности, уравнении (А2) работы [1] гласит, что инвертированная решетка, связывающая коэффициенты частной корреляции с последовательностями АКФ, в рассматриваемом случае вырождается в элементарную рекурсию,

*) ТИИЭР т. 77 , №12, декабрь 1989.

соответствующую рекурсии Кайзера, описываемой уравнениями (5), (5а) работы [6] и развитой затем в работе [7]. Из нее вытекает удобный метод генерирования равномерно распределенных отсчетов гауссовых функций.

Литература

[1] *G. Jacovitti* and *C. Scarano*, "On a property of the PARCOR coefficients of stationary processes having Gaussian-shaped ACF", Proc. IEEE, vol. 75, no. 7, pp. 960-961, July 1987. *Джаковитти Дж., Скарано Дж.* // ТИИЭР. – 1987. – т.75. – №7.

[2] *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. – М.: Физматгиз, 1963.

[3] *Крамер Г.* Математические методы статистики. – М.: Мир, 1976.

[4] *A. E. Yagle*, "On geometric sequences of reflection coefficients and Gaussian autocorrelations," Proc. IEEE, vol. 76, no. 10, pp.1372-1374, Oct. 1988.

[5] *Д.И. Леховицкий, М.И. Табачников, С.И. Шипицын.* Выбор порядка линейного фильтра предсказания для стационарных случайных процессов с гауссовской корреляционной функцией. Радиотехника, 1990, №4, с.44 – 48.

[6] *J. F. Kaiser*, "On a fast generation of equally spaced values of the Gaussian function A exp (-at * t)," IEEE Trans. Acoust, Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 10, Oct. 1987.

[7] *D. L. Jones* and *T. W. Parks*, "On computing spaced samples of a complex Gaussian function," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 10, Oct. 1987.

Поступила в редколлегию 22.09.2011

Леховицкий Давид Исаакович, фото и сведения об авторе см. на с. 404.

УДК 621.396

Зауваження до повідомлення "Про властивості коефіцієнтів частинної кореляціії стаціонарних процесів з гаусовою функцією" / Д.І. Леховицький // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2011. Том 10. № 4. – С. 448-449.

Надане просте виведення формули частинних коефіцієнтів кореляції комплексного стаціонарного процесу з гаусовою автокореляційною функцією – моделі випадкових процесів різноманітної фізичної природи, що широко використовується на практиці.

Ключові слова: стаціонарний процес, гаусова АКФ, частинний коефіцієнт кореляції, детермінант.

Бібліогр.: 7 найм.

UDC 621.396

Comments on the report "On a property of the PARCOR coefficients of stationary processes having Gaussian-shaped ACF" / D.I. Lekhovytskiy // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. – P. 448-449.

The paper gives the simple derivation of the formula for partial correlation coefficients of a complex stationary process with Gaussian autocorrelation function, which is a widely used model of random processes of various physical nature.

Keywords: stationary process, Gaussian ACF, partial correlation coefficient, determinant.

Ref: 7 items.