

СРАВНЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ В ПРОИЗВОЛЬНЫХ И ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ ФАР*)

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ, Д.В. АТАМАНСКИЙ, И.Г. КИРИЛЛОВ, В.И. ЗАРИЦКИЙ

В широком классе ФАР с центральной симметрией пространственного расположения попарно идентичных элементов (модулей) корреляционная матрица (КМ) собственных шумов и внешних излучений на выходах каналов приема может быть не только эрмитовой, но и персимметричной (симметричной относительно побочной диагонали). По сравнению с эрмитовой КМ общего вида персимметричная КМ определяется примерно вдвое меньшим числом параметров, подлежащих оцениванию в процессе адаптации. В статье количественно оценивается выигрыш в эффективности адаптивной обработки в таких ФАР при переходе от оценок максимального правдоподобия (МП оценок) эрмитовых КМ общего вида к МП оценкам персимметричных КМ.

Ключевые слова: центральная симметрия, персимметрия, корреляционная матрица, оценка максимального правдоподобия, Уишарта распределение, критерии сравнения, объем обучающей выборки.

ВВЕДЕНИЕ

Для широкого класса ФАР характерна центральная симметрия пространственного расположения попарно идентичных элементов (модулей). В таких ФАР $M \times M$ корреляционная матрица (КМ) $\Phi = \{\varphi_{ij}\}_{i,j=1}^M$ собственных шумов и внешних излучений на выходах M каналов приема может быть не только эрмитовой, но и персимметричной (симметричной относительно второй (побочной) диагонали). Аналогичной структурой могут обладать и КМ междупериодных флюктуаций пассивных помех на выходах временных каналов приема систем СДЦ импульсных РЛС [1, 2, 4, 8].

Цель статьи – количественно оценить выигрыш в эффективности решения ряда задач адаптивной обработки, который теоретически может быть получен в центрально-симметричных (ЦС) системах приема при переходе от оценок максимального правдоподобия (МП оценок) КМ общего вида к МП оценкам персимметричных КМ.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть задана выборка объема K

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_i\}_{i=1}^K, \quad \mathbf{y}_i = \{y_m^{(i)}\}_{m=1}^M \sim CN(0, \Phi),$$

$$\overline{\mathbf{y}_i} = 0, \quad \overline{\mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_j^*} = \Phi \cdot \delta_{ij}, \quad i, j \in 1, K \quad (1)$$

гауссовых (нормальных) взаимно независимых ($\delta_{ij} = 0, i \neq j; \delta_{ii} = 1$) M -мерных векторов $\mathbf{y}_i, i \in 1, K$ комплексных амплитуд выходных колебаний M пространственных (временных) каналов приема в K моментов времени с нулевым средним значением и одинаковой КМ Φ . Здесь и далее черта сверху и (*) – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения соответственно.

МП оценка КМ общего вида равна [1–4, 7]

$$\hat{\Phi} = K^{-1} \cdot \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}^* = \sum_{i=1}^K \mathbf{y}_i \cdot \mathbf{y}_i^* \quad (2)$$

Совместная плотность определяющих элементов эрмитовой матрицы \mathbf{A} описывается комплексным распределением Уишарта [3, 7]

$$p(\mathbf{A}) = J^{-1}(\Phi) \cdot |\mathbf{A}|^{K-M} \exp\{-tr(\Phi^{-1} \cdot \mathbf{A})\}, \quad K \geq M,$$

$$J(\Phi) = \pi^{\frac{M(M-1)}{2}} \cdot |\Phi|^K \cdot \prod_{i=1}^M \Gamma(K+1-i). \quad (2a)$$

Здесь $|\mathbf{C}|$ и $tr(\mathbf{C})$ – детерминант и след матрицы \mathbf{C} , $\Gamma(x)$ – гамма функция [12].

МП оценка эрмитовой персимметричной КМ [1, 2, 8]

$$\hat{\Phi}_{\Pi} = K^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Pi}, \quad \mathbf{A}_{\Pi} = 1/2 \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{A}^{\sim} \cdot \mathbf{\Pi}), \quad (3)$$

где $\mathbf{\Pi}$ – $M \times M$ ортогональная матрица перестановок с единицами на побочной диагонали; (\sim) – символ комплексного сопряжения.

Совместная плотность распределения определяющих элементов матрицы \mathbf{A}_{Π} равна [4]

$$p(\mathbf{A}_{\Pi}) = J_{\Pi}^{-1}(\Phi) \cdot |\mathbf{A}_{\Pi}|^{K - \frac{(M+1)}{2}} \exp\{-tr(\Phi^{-1} \cdot \mathbf{A}_{\Pi})\},$$

$$K \geq L = [(M+1)/2], \quad (3a)$$

$$J_{\Pi}(\Phi) = 2^{-r} \cdot \pi^{\frac{M(M-1)}{4}} \cdot |\Phi|^K \cdot \prod_{i=1}^M \Gamma(K + \frac{l-i}{2}),$$

$$r = L \cdot [M/2],$$

где $[x]$ – целая часть x .

От плотности (2a) она отличается увеличенным на $(M-1)/2$ числом степеней свободы. Это отличие и обеспечивает выигрыш в эффективности адаптивной обработки при переходе в ЦС системах от оценки (2) к оценке (3). Выигрыш зависит от решаемой задачи и используемых критериев эффективности, что иллюстрируется приведенными ниже примерами.

2. О ВЫИГРЫШАХ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ АДАПТИВНОЙ ОБРАБОТКИ

1. Рассмотрим вначале зависимость от объема выборки K относительного смещения

$$\Delta(\alpha) = \left(S(\alpha) - \overline{S(\alpha)} \right) / S(\alpha) = 1 - \overline{\hat{v}(\alpha)}, \quad (4)$$

$$\hat{v}(\alpha) = \hat{S}(\alpha) / S(\alpha)$$

*) Антенны. – М., 2000. – Вып. 1 (44). – С. 99–103.

случайной (оценочной) спектральной функции (СФ) метода “минимальной дисперсии” Кейпона [3]

$$\hat{S}(\alpha) = (\hat{q}(\alpha))^{-1}, \quad (5)$$

$$\hat{q}(\alpha) = \mathbf{x}^*(\alpha) \cdot \hat{\Psi} \cdot \mathbf{x}(\alpha), \quad \hat{\Psi} = (\hat{\Phi})^{-1}$$

от “истинной” СФ

$$S(\alpha) = (q(\alpha))^{-1}, \quad (6)$$

$$q(\alpha) = \mathbf{x}^*(\alpha) \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(\alpha), \quad \Psi = \Phi^{-1}.$$

Будем при этом полагать, что M -мерный неслучайный “вектор сканирования” $\mathbf{x}(\alpha) = \{x_i(\alpha)\}_{i=1}^M$, описывающий амплитудно-фазовое распределение по каналам приема сигнала точечного источника с направления, задающего аргумент α , удовлетворяет естественному для ЦС систем условию

$$\mathbf{x}(\alpha) = c \cdot \Pi \cdot \mathbf{x}^*(\alpha), \quad |c|^2 = 1. \quad (7)$$

В этом случае, как показано в [3, 4], нормированная случайная СФ $\hat{v}(\alpha)$ (4) имеет не зависящее от α распределение Эрланга [12] с плотностью

$$p(x) = K(Kx)^\delta \exp\{-K \cdot x\} / \Gamma(\delta + 1), \quad (8)$$

начальными моментами

$$\bar{v} = (\delta + 1) / K, \quad \bar{v}^2 = (\delta \cdot (\delta + 1)) / K^2, \quad (9)$$

и с параметрами формы

$$\delta = \delta_0 = K - M \geq 0 \quad \text{и} \quad \delta = \delta_\Pi = K - (M + 1) / 2 \quad (10)$$

для оценок (2) и (3) соответственно. Поэтому смещение $\Delta(\alpha) = \Delta$ этих оценок равно

$$\Delta = \Delta_0 = (M - 1) / K,$$

$$\Delta = \Delta_\Pi = (M - 1) / 2 \cdot K = \Delta_0 / 2. \quad (11)$$

Тем самым переход от (2) к (3) удваивает «быстродействие» метода Кейпона, если мерой его служит относительное смещение (4) оценочной СФ (5).

2. Для оценочной СФ $\hat{S}(\alpha)$ (5) введенная в [5] “интегральная среднеквадратическая ошибка”

$$\varepsilon = (\alpha_2 - \alpha_1)^{-1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\frac{S(\alpha) - \hat{S}(\alpha)}{S(\alpha)} \right)^2 d\alpha = 1 - 2\bar{v} + \bar{v}^2, \quad (12)$$

как следует из (9), (10), равна

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = \frac{1}{K} + \frac{(M - 1)(M - 2)}{K^2};$$

$$\varepsilon = \varepsilon_\Pi = \frac{1}{K} + \frac{(M - 1)(M - 3)}{4K^2}, \quad (13)$$

для оценок (2) и (3) соответственно.

Рассчитанные по (13) для набора значений $M = 10, 20, 30, 40$ зависимости $\varepsilon_0(K)$ и $\varepsilon_\Pi(K)$ показаны на рис. 1.

Видно, что при “больших” $K \gg M^2$ значения ε_0 и ε_Π практически совпадают (определя-

ются равными первыми слагаемыми в (13)), однако для доведения их до уровня $\varepsilon \leq -(10 \div 20)$ дБ объем выборки K в оценке (3) может быть примерно вдвое меньше, чем в оценке (2).

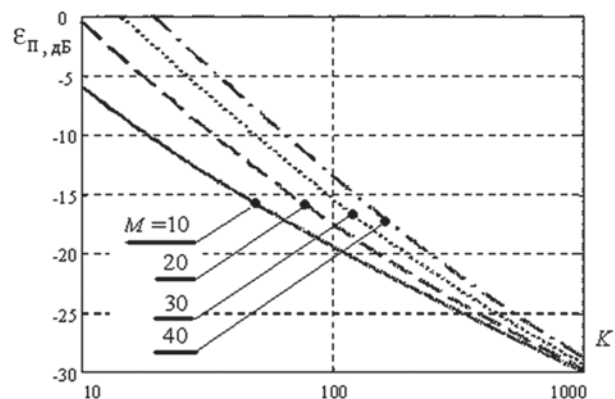
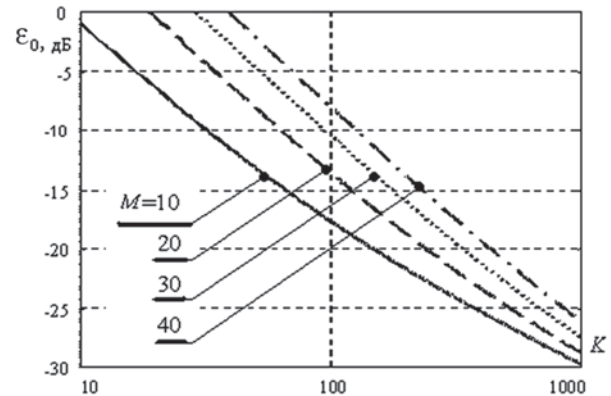


Рис. 1. Зависимость интегральной СКО от объема выборки

3. Широко использующийся для характеристики разрешающей способности спектрального анализа по критерию Рэлея нормированный случайный параметр

$$\mu(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2)}{\gamma(\alpha_1, \alpha_2)},$$

$$\hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\hat{S}(\alpha_1)}{\hat{S}(\alpha_2)}, \quad \gamma(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{S(\alpha_1)}{S(\alpha_2)} \quad (14)$$

СФ $\hat{S}(\alpha)$ (5) в условиях (7) имеет плотность [6]

$$p_\mu(x) = \frac{\Gamma(2\delta + 4)}{(\Gamma(\delta + 2))^2} (1 - |p|^2)^{\delta + 2} \times \frac{x^{\delta + 1} (1 + x)}{((1 + x)^2 - 4|p|^2 x)^{\delta + 2.5}}, \quad (15)$$

где неслучайный параметр ρ равен

$$\rho = \rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\mathbf{x}^*(\alpha_1) \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(\alpha_2)}{(q(\alpha_1) \cdot q(\alpha_2))^{1/2}}, \quad (16)$$

а в роли δ выступают значения δ_0 и δ_Π (10) для оценок (2) и (3) соответственно.

Как показано в [6], при любых значениях $|\rho| < 1$ ($\alpha_1 \neq \alpha_2$) и $\delta \geq 0$ точка $x_0 = 1$ является медианой плотности (15). Поэтому случайный па-

раметр $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}(\alpha_1, \alpha_2)$ не ниже своего “истинного” значения $\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2)$ с фиксированной вероятностью $P(\hat{\gamma} \geq \gamma) = 0.5$ при любых $\delta \geq 0$. В соответствии с (10) минимальное значение $K = K_{\min}$, обеспечивающее такую вероятность, для оценки (2) равно $K_{\min} = M$, что практически вдвое больше, чем значение $K_{\min} = (M + 1) / 2$, достаточное при переходе к (3).

4. В качестве последнего примера рассмотрим нормированную случайную величину [7]

$$\xi(\alpha) = \frac{|\mathbf{r}^*(\alpha) \cdot \mathbf{x}(\alpha)|^2}{q(\alpha) \cdot \mathbf{r}^*(\alpha) \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}(\alpha)}, \quad \mathbf{r}(\alpha) = \hat{\Psi} \cdot \mathbf{x}(\alpha), \quad (17)$$

имеющую смысл потерь в отношении сигнал/(помеха + шум) в адаптивном фильтре, максимизирующем отношение сигнал/(помеха + шум) (ОСПШ) для сигнала $\mathbf{x}(\alpha)$ из-за замены неизвестной КМ помехи Φ ее оценками $\hat{\Phi}$ того или иного вида.

Как показано в [7, 8], величина $\xi(\alpha)$ имеет бета-распределение [12] с плотностью

$$p_{\xi}(x) = p(x, K) = \frac{(v+w-1)!}{(v-1)! (w-1)!} \cdot x^{v-1} \cdot (1-x)^{w-1}. \quad (18)$$

Параметры v и w этой плотности равны [3, 4]

$$v = v_0 = \delta_0 + 2, \quad w = w_0 = M - 1$$

для оценки (2) и выборки (1) объема K и

$$v = v_{\Pi} = v_0 / 2, \quad w = w_{\Pi} = w_0 / 2$$

для оценки (3) и выборки (1) “половинного” объема $K_1 = K / 2$. При таких условиях среднее значение потерь $\bar{\xi}(\alpha) = v/(v+w)$ для обеих оценок одинаково, но дисперсия $\sigma_{\xi}^2 = vw/((v+w)^2(v+w+1))$ при использовании оценки (3) оказывается вдвое больше.

Из-за отмеченного отличия дисперсий качество оценок (2), (3) более полно характеризуется “интегральным” критерием

$$P(K) = \int_{v_{\text{пор}}}^1 p(x, K) dx, \quad (19)$$

показывающим зависимость от объема выборки K вероятности того, что потери $\xi(\alpha)$ не превысят заданный уровень $v_{\text{пор}}$.

Эти зависимости для $M = 32$ показаны на рис. 2 для оценок (2) (кривые 1, 2, 3) и оценок (3) (кривые 4, 5, 6) при $v_{\text{пор}} = 0.5$ (−3дБ), 0.631 (−2дБ), 0.794 (−1дБ) соответственно.

Видно, что в условиях (7) оценка (3) практически “удваивает” быстродействие адаптивной обработки – при любых $v_{\text{пор}}$ уже по выборке “половинного” объема $K_1 = K / 2$ она обеспечивает примерно ту же вероятность $P(K)$, что и оценка (2) по выборке объема $K \geq M$. Несколько более высокая эффективность оценки (3) при “малых” $P(K) \leq 0.5$ и оценки (2) – при “больших” $P(K) > 0.5$ обусловлена равенством средних и отмеченным отличием дисперсий.

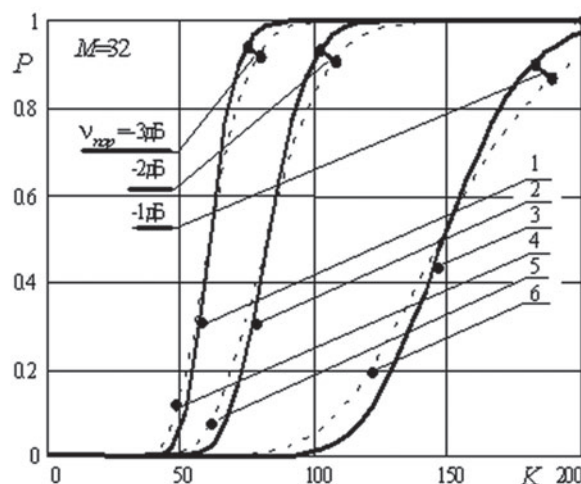


Рис. 2. Связь вероятности потерь с объемом выборки

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные резервы повышения эффективности адаптивной обработки в ЦС системах наиболее просто реализуются адаптивными решетчатыми фильтрами [9–11]. В этом случае переход от оценок (2) к оценкам (3) можно выполнить без увеличения, а в ряде случаев – и с уменьшением объема вычислений [2, 10, 11].

Литература

- [1] Nitzberg R. Application of maximum likelihood estimation of persymmetric covariance matrices to adaptive processing. // IEEE Trans. Aerosp. And Electr. Syst. – 1980. – V.16. – № 1. – P.124–127.
- [2] Зарицкий В.И., Кокин В.Н., Леховицкий Д.И., Саламатин В.В. Рекуррентные алгоритмы адаптивной обработки при центральной симметрии пространственно-временных каналов приема. // Изв. Вузов. Радиофизика. – 1985. – №7. – С. 863–871.
- [3] Кейпон Дж., Гудмен Н. Распределение вероятности оценок пространственно-временного спектра. // ТИИЭР. – 1970. – №11. – С. 82–84.
- [4] Леховицкий Д.И. К теории адаптивной обработки сигналов в системах с центральной симметрией каналов приема. // Радиотехника. – Харьков. – 1996. – №100. – С. 140–158.
- [5] Friedlander B., Porat B. A General Lower Bound for Parametric Spectrum Estimation // IEEE Trans. – 1984. – V. ASSP-32. – №4. – P. 728.
- [6] Леховицкий Д.И., Флексер П.М. Статистический анализ разрешающей способности квазигармонического спектрального оценивания методом Кейпона. // Сборник докладов МНТК «Современная радиолокация». Вып.1. – Киев. – 1994. – С. 66–71.
- [7] Read I.S., Mallet J.D., Brennan L.E. Rapid convergence rates in adaptive arrays. // IEEE Trans. Aerosp. Electr. Syst. – 1974. – V. 10. – № 6. – P. 853-863.
- [8] Кошевой В.М., Радионов В.В. Эффективность адаптивных фильтров с центральной симметрией приемных каналов. // Радиотехника и электроника. – 1994. – №11. – С. 1779–1788.
- [9] Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных. // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – №8. – С. 54–97.

- [10] Леховицкий Д.И. Обобщенный алгоритм Левинсона и универсальные решетчатые фильтры. // Изв. Вузов. Радиофизика. – 1992. – Т. 35. – № 9–10. – С. 790–808.
- [11] Леховицкий Д.И., Милованов С.В., Раков И.Д., Свердлов Б.Г. Универсальные адаптивные решетчатые фильтры. Адаптация при заданном корне из оценочной корреляционной матрицы. // Изв. Вузов. Радиофизика. – 1992. – Т. 35. – № 11–12. – С. 969–991.
- [12] Хастингс Н., Пиккок Дж. Справочник по статистическим распределениям. – М.: Статистика, 1980.

Поступила в редколлегию 7.11.2011

Леховицкий Давид Исаакович, фото и сведения об авторе см. на с. 404.

Атаманский Дмитрий Владимирович, фото и сведения об авторе см. на с. 404.



Кириллов Игорь Германович, кандидат технических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры Харьковского университета Воздушных Сил им. Ивана Кожедуба. Область научных интересов – цифровые системы обработки сигналов в радиотехнических системах различного назначения.

Зарицкий Валерий Иванович, фото и сведения об авторе см. на с. 427.

УДК 621.391.01

Порівняння ефективності адаптивної обробки у довільних і центрально – симетричних ФАР / Д.І. Леховицький, Д.В. Атаманський, І.Г. Кириллов, В.І. Зарицький // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. – 2011. Том 10. № 4. – С. 437-440.

У широкому класі ФАР із центральною симетрією просторового розташування попарно ідентичних елементів (модулів) кореляційна матриця (КМ) власних шумів і зовнішніх випромінювань на виходах каналів приймання може бути не тільки ермітовою, але й персиметричною (симетричною щодо побічної діагоналі). У порівнянні з ермітовою КМ загального виду персиметрична КМ визначається приблизно вдвічі меншим числом параметрів, що підлягають оцінюванню в процесі адаптації. У статті кількісно оцінюється вигравш в ефективності адаптивної обробки в таких ФАР при переході від оцінок максимальної правдоподібності (МП оцінок) ермітових КМ загального виду до МП оцінок персиметричних КМ.

Ключові слова: центральна симетрія, персиметрія, кореляційна матриця, оцінка максимальної правдоподібності, Уишарта розподіл, критерії порівняння, обсяг навчаючої вибірки.

Л. 2. Бібліогр.: 12 найм.

UDC 621.391.01

Comparison of effectiveness of adaptive processing in arbitrary and central-symmetrical phased antenna arrays / D.I. Lekhovytskyi, D.V. Atamanskiy, I.G. Kirillov, V.I. Zaritskiy // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. – P. 437-440.

For a wide range of PAs with the central symmetry of the spatial arrangement of pairwise identical elements (modules) covariance matrix (CM) of self-noise and external emission at the outputs of receiving chains may be not only Hermitian, but also persymmetrical (symmetrical with respect to a secondary diagonal). Compared to an Hermitian CM of general form, a persymmetrical CM is defined by roughly half as a number of parameters that are to be estimated in the process of adaptation. The paper gives the results of the quantitative assessment of the gain in adaptive processing efficiency for such PAs at a transition from maximum likelihood (ML) estimation of Hermitian CMs of general form to ML estimation of persymmetrical CMs.

Keywords: central symmetry, persymmetry, covariance matrix, maximum likelihood estimate, Wishart distribution, comparison criteria, training sample size.

Fig. 2. Ref: 12 items.