
ТЕОРИЯ РЕШЕТЧАТЫХ ФИЛЬТРОВ И ТЕХНИКА ИХ АДАПТИВНОЙ НАСТРОЙКИ

УДК 621.396.965:621.391.26

АДАПТИВНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ. ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ РЕШЕТЧАТЫХ СТРУКТУР

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ, Д.С. РАЧКОВ, А.В. СЕМЕНЯКА, В.П. РЯБУХА, Д.В. АТАМАНСКИЙ

Рассматриваются роль и место решетчатых фильтров (РФ) в системах первичной пространственно-временной обработки сигналов, современное состояние теории РФ и техники их адаптивной настройки. В первой части разрабатывается унифицированная методика синтеза многоступенчатых фильтров с заданными матричными импульсными характеристиками на основе их факторизованных представлений различного вида. Выводятся обобщенный алгоритм и обобщенная факторизация Левинсона – теоретические основы решетчатых структур. Обсуждаются физический смысл и свойства параметров обеляющих и обращающих РФ при различном уровне априорной информации о специфике корреляционной матрицы входных воздействий, особенности и взаимосвязи “двумерных” и “многомерных” РФ.

Ключевые слова: пространственно-временная обработка, корреляционная матрица (КМ), обеляющие (обращающие) фильтры, факторизация Левинсона, априорная информация о структуре КМ, адаптация.

ВВЕДЕНИЕ

Адаптивные решетчатые фильтры (АРФ) – эффективное средство решения широкого круга задач адаптивной пространственно-временной обработки сигналов в радиотехнических системах различного назначения. Их достоинства обусловлены рациональной организацией процедур оценивания корреляционных матриц (КМ) и формирования различных функций от них, предусматриваемых алгоритмами адаптивной обработки как гауссовых, так и негауссовых воздействий. Эти функции формируются не по явным, а по факторизованным (в виде произведения слабозаполненных матриц-сомножителей специального вида) представлениям оценочных КМ или матриц, обратных им. Сомножители этих представлений, оцениваемые на этапе адаптации, определяют структуру, а их число – количество ступеней фильтра.

Основные преимущества такой организации обработки порождены несколькими причинами. Наиболее важной из них является существенно лучшая обусловленность сомножителей, чем обратной матрицы в целом, число обусловленности которой равно произведению чисел обусловленности этих сомножителей. Практически важны также простота и “однородность” сомножителей, упрощающие структуру фильтра и наращивание его порядка. Многоступенчатое построение может оказаться и более экономичным по затратам памяти, поскольку общее число параметров, определяющих сомножители, может быть заметно меньше числа различных элементов их произведения.

Такая организация реализует “фундаментальную идею численного анализа больших систем” [1] и используется не только в АРФ, однако именно на их основе часто удается обеспечить

более высокую эффективность адаптивной обработки, чем на основе многоступенчатых фильтров с другой структурой сомножителей (ступеней). Их дополнительные достоинства связаны с простотой учета и использования возможной априорной информации о специфике структуры КМ для повышения эффективности обработки.

Первые решетчатые фильтры (РФ) были разработаны Д.П. Бергом для спектрального анализа методом максимальной энтропии (МЭ) стационарных временных рядов (дискретных случайных процессов с теплицевыми КМ) [2, 3]. В них реализовывался “быстрый” алгоритм Н. Левинсона обращения симметричных теплицевых матриц [4] на основе **одновременного** отыскания их верхне – нижнего и нижне – верхнего треугольных разложений, что обеспечивало важные практические преимущества по сравнению с их отдельным отысканием. В течение ряда последующих лет область их использования ограничивалась системами только с такими КМ при решении задач распознавания речи, геофизики, радиоастрономии и др. Она стала расширяться после того, как этот алгоритм был обобщен в [5] на класс нетеплицевых КМ, имеющих “малый теплицев ранг смешения” [6–9]. Практически одновременно и независимо был получен “обобщенный алгоритм Левинсона (ОАЛ)”, решавший ту же задачу, что и классический алгоритм Левинсона, но для произвольных действительных и комплексных КМ [10–12]. На его основе синтезированы универсальные АРФ для решения широкого круга задач временной, пространственной и пространственно-временной обработки [13–20].

К настоящему времени АРФ посвящено большое число работ отечественных и зарубежных специалистов [21–29 и др.], они включены в

справочники [31] и учебные пособия [32], проверены в математических, полунатурных и натуральных экспериментах [21–25, 34–36 и др.], реализованы на современной элементной базе [12]. Тем самым имеются все необходимые предпосылки для того, чтобы практически реализовать предсказываемые теорией и экспериментами достоинства **АРФ** в системах временной, пространственной и пространственно-временной обработки сигналов РЛС различного класса и назначения.

Цель данной статьи – ознакомить специалистов с современным состоянием теории и техники **АРФ** и способствовать тем самым их более широкому внедрению в практику. В ней обобщаются и дополняются результаты исследований [10–22], совместно с **В.Я. Ширманом** начатых редактором данного выпуска более 30 лет назад в **ВИРТА ПВО** им. Л.А. Говорова (г. Харьков) на кафедре радиолокации, руководимой **Я.Д. Ширманом**, и затем продолженных им совместно с адъюнктами и соискателями этой кафедры, с коллегами из ряда заказывающих и разрабатывающих предприятий Украины, России и Белоруссии, с сотрудниками и аспирантами Харьковского национального университета радиоэлектроники.

Статья разбита на две части. Приводимая ниже **первая** часть посвящена теории решетчатых структур многоступенчатых обеслаивающих и обрабатывающих фильтров – составных элементов различных систем обработки гауссовых сигналов. Она содержит введение, 4 раздела и Заключение и организована следующим образом.

В разд. 1 приводятся примеры известных задач первичной пространственно-временной обработки, показываются роль и место **АРФ** в их решении.

В разд. 2 рассматриваются многоступенчатые фильтры, построенные по факторизованным представлениям треугольных матричных импульсных характеристик (**МИХ**), множителями которых выступают слабозаполненные треугольные матрицы метода Гаусса решения систем линейных уравнений. Показываются их недостатки, связанные со сложностью учета возможной специфики структуры **КМ** входных воздействий.

В разд. 3 выводится обобщенный алгоритм Левинсона (**ОАЛ**) и вытекающая из него обобщенная факторизация Левинсона (**ОФЛ**) – теоретическая основа универсальных многоступенчатых решетчатых фильтров (**РФ**). Обсуждаются физический смысл и свойства параметров образующих его “элементарных” **РФ** (**ЭРФ**), при которых он выполняет функции обеслаивающего или обрабатывающего фильтров. Устанавливаются связи между параметрами этих фильтров при наличии специфики структуры **КМ** входных воздействий (персимметрии, теплицевости, конечности порядка аппроксимирующего процесса авторегрессии и др.). Рассматриваются решетчатые обеслаивающие фильтры с ленточными треугольными **МИХ**

и обрабатывающие **РФ** на их основе с ленточными эрмитовыми **МИХ**.

В разд. 4 выводится обобщенный блочный алгоритм Левинсона (**БАЛ**) и вытекающая из него блочная факторизация Левинсона (**БФЛ**), лежащие в основе двумерных и многомерных **РФ**. Устанавливаются смысл и свойства матричных параметров двумерных обеслаивающих и обрабатывающих **РФ** и их связь с параметрами “одномерных” **РФ**, обосновываются рациональные варианты практической реализации.

В Заключении формулируются выводы по результатам первой части статьи и анонсируется содержание ее **второй** части.

1. ЗАДАЧИ ПЕРВИЧНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЛС И МЕСТО АРФ В ИХ РЕШЕНИИ

Класс задач, которые могут решаться **АРФ**, чрезвычайно широк. В этой, а также ряде других статей данного сборника основное внимание уделяется решению на их основе актуальных задач первичной пространственно-временной обработки сигналов в многоканальных РЛС. Ниже приводятся некоторые примеры таких задач.

А. Начнем с классической задачи обнаружения гауссова сигнала $\mathbf{s} = \{s_\ell\}_{\ell=1}^M \sim CN(\mathbf{0}, \Phi_s)$ с нулевым средним и **КМ** $\Phi_s = \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}^*$ на фоне гауссовой помехи $\mathbf{y} = \{y_\ell\}_{\ell=1}^M \sim CN(\mathbf{0}, \Phi)$ в M -мерном гауссовом векторе аддитивной смеси

$$\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^M = \mathbf{y} + \gamma \cdot \mathbf{s} \sim CN(\mathbf{0}, \Phi_\gamma), \quad \gamma = 0, 1 \quad (1)$$

с плотностью распределения [37]

$$CN(\mathbf{0}, \Phi_\gamma) \Rightarrow p_\gamma(\mathbf{u}) = \pi^{-M} \cdot |\Phi_\gamma|^{-1} \cdot \exp\{-\mathbf{u}^* \cdot \Phi_\gamma^{-1} \cdot \mathbf{u}\}, \quad \gamma = 0, 1, \quad (2)$$

полностью определяющей эрмитовой положительно определенной (**э.п.о.**) **КМ**

$$\Phi_\gamma = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*} = \begin{cases} \Phi_0 = \Phi = \overline{\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^*}, & \gamma = 0, \\ \Phi_1 = \Phi_0 + \Phi_s, & \gamma = 1. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь и ниже черта сверху и звездочка – символы статистического усреднения и эрмитового сопряжения (комплексного сопряжения и транспонирования) соответственно, $|A|$ – детерминант (определитель) матрицы **A**.

Элементами входящих в (1) M -мерных векторов выступают комплексные амплитуды соответствующих выходных сигналов M пространственных (временных, пространственно-временных) каналов приема РЛС.

На рис. 1 показаны варианты формирователей оптимальной предпороговой статистики (**ППС**) [31, 38–40]

$$\begin{aligned} \xi_0(\mathbf{u}) &= \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p} = \\ &= q_0 - q_1 = \mathbf{v}_0^* \cdot \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1^* \cdot \mathbf{v}_1, \end{aligned} \quad (4)$$

по результатам сравнения которой с порогом должно приниматься решение о наличии ($\gamma=1$) или отсутствии ($\gamma=0$) сигнала в принимаемой смеси (1). Здесь

$$\mathbf{L} = \Psi_0 - \Psi_1 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^*, \Psi_\gamma = \Phi_\gamma^{-1} \quad (\gamma \in 0,1) \quad (5)$$

– эрмитова “решающая [39]” $M \times M$ матрица оптимальной обработки, равная разности матриц Ψ_γ , обратных КМ (3) при справедливости гипотез $\gamma=0$ и $\gamma=1$ соответственно, $\mathbf{R} = \{\mathbf{r}_\ell\}_{\ell=1}^v$ – матрица – “корень” из нее, образованная $v = \text{rank}(\mathbf{L})$ M -мерными столбцами \mathbf{r}_ℓ , число которых равно рангу $v \in 1, M$ матрицы \mathbf{L} ,

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}^* \cdot \mathbf{u}, \quad q_\gamma = \mathbf{u}^* \cdot \Psi_\gamma \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}_\gamma = \{v_\ell^{(\gamma)}\}_{\ell=1}^M = \mathbf{H}_\gamma \cdot \mathbf{u}, \quad (6)$$

$$\mathbf{H}_\gamma^* \cdot \mathbf{H}_\gamma = \Psi_\gamma, \quad \gamma \in 0,1.$$

На этапе линейной обработки входной вектор в схемах рис. 1, а, б преобразуется в фильтрах с матричными импульсными характеристиками (МИХ) \mathbf{L} и Ψ_γ , а в схемах рис. 1, в, г – с МИХ, равными их “корням” \mathbf{R} и \mathbf{H}_γ , $\gamma \in 0,1$.

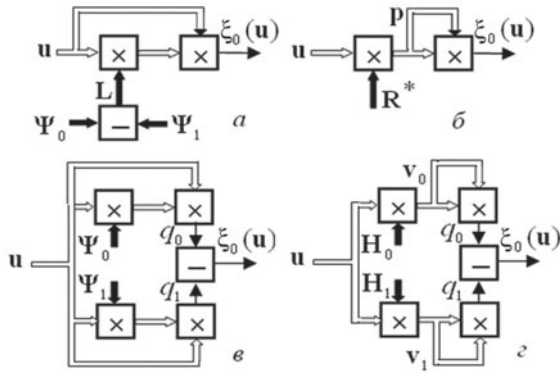


Рис. 1. Структуры и параметры формирователей оптимальных ППС гауссовых сигналов на фоне гауссовых помех

Оптимальная ППС (4) допускает также представление в виде

$$\xi_0(\mathbf{u}) = \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{p},$$

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{F}_\Psi \cdot \mathbf{A} = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{F}_\mathbf{H} \cdot \mathbf{A}, \quad (7a)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I}_v + \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}_\Psi = \mathbf{I}_v + \mathbf{F}_\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{F}_\mathbf{H},$$

где \mathbf{I}_v – единичная $v \times v$ матрица, $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_\ell\}_{\ell=1}^v$ – матрица – “корень” матрицы $\Phi_s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^*$, образованная $v = \text{rank}(\Phi_s)$ M -мерными столбцами \mathbf{f}_ℓ , число которых равно рангу $v \in 1, M$ матрицы Φ_s ,

$$\mathbf{F}_\Psi = \Psi \cdot \mathbf{F}, \quad \mathbf{F}_\mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{F}, \quad (7b)$$

$$\mathbf{w} = \Psi \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$$

– результаты преобразования матрицы $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_\ell\}_{\ell=1}^v$ и входного вектора \mathbf{u} в фильтрах с $M \times M$ МИХ Ψ и \mathbf{H} :

$$\Psi = \{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^M = \Phi^{-1}, \quad \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \Psi. \quad (7b)$$

В частности, для когерентного сигнала

$$\mathbf{s} = \beta \cdot \mathbf{x}(\alpha), \quad \beta \sim CN(0, h) \quad (8)$$

с (пространственной, временной, пространственно-временной) частотой α и относительной

(по отношению к шумам каналов приема) интенсивностью h матрица \mathbf{F} содержит единственный столбец

$$\mathbf{F} = \mathbf{f}(\alpha) = \sqrt{h} \cdot \mathbf{x}(\alpha), \quad (9)$$

а матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{A} (7) преобразуются в действительные скаляры. Оптимальная ППС (4) преобразуется при этом к виду

$$\xi_0(\mathbf{u}) = |p|^2,$$

$$p = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}(\alpha) = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{x}_\mathbf{H}(\alpha) = \mathbf{u}^* \cdot \mathbf{r}(\alpha), \quad (10)$$

$$\mathbf{x}_\mathbf{H}(\alpha) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}(\alpha), \quad \mathbf{r}(\alpha) = \Psi \cdot \mathbf{x}(\alpha),$$

$$\mathbf{w} = \Psi \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u},$$

и может формироваться схемами рис. 2 [31, 40].

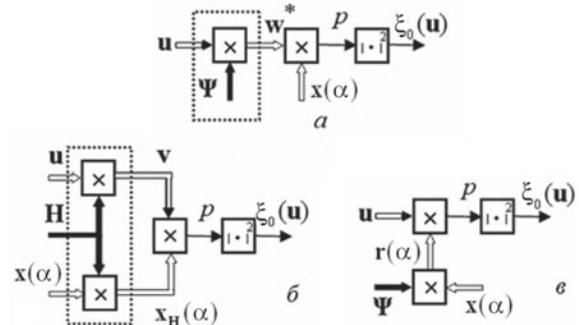


Рис. 2. Структуры и параметры формирователей оптимальных ППС гауссовых когерентных сигналов на фоне гауссовых помех

Для некогерентного сигнала с пропорциональной единичной матрицей

$$\mathbf{F} = \sqrt{h} \cdot \mathbf{I}_M \quad (11)$$

M -мерный выходной вектор $\mathbf{p}^* = \{p_\ell\}_{\ell=1}^M$ (7) линейного тракта преобразуется к виду

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{u}^* \cdot \Psi \cdot \mathbf{A} = \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{A} = \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}, \quad (12)$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^* = \mathbf{Q}^{-1}, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{I}_M + h \cdot \Psi,$$

и может поэтому формироваться схемами, показанными на рис. 3.

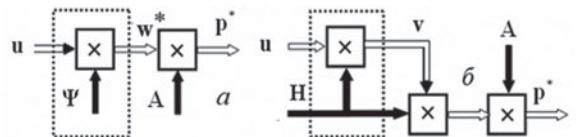


Рис. 3. Структуры и параметры линейного тракта оптимальных обнаружителей гауссовых некогерентных сигналов на фоне гауссовых помех

Для “слабых” ($\mathbf{Q} \approx \mathbf{I}_M$) и “сильных” ($\mathbf{Q} \approx h \cdot \Psi$) некогерентных сигналов оптимальные ППС пропорциональны скалярам

$$\xi_0(\mathbf{u}) \approx \mathbf{w}^* \cdot \mathbf{w} \quad \text{и} \quad \xi_0(\mathbf{u}) \approx \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{v}, \quad (13)$$

которые формируются в схемах рис. 4.

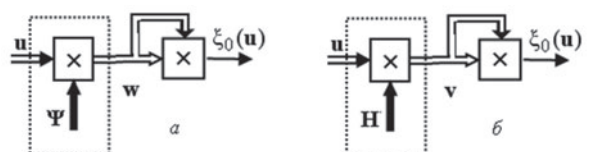


Рис. 4. Оптимальные ППС “слабых” (а) и “сильных” (б) некогерентных сигналов

Б. Рассмотрим теперь спектральные функции (**СФ**) некоторых “сверхразрешающих” методов **спектрального оценивания** случайных процессов различной природы [31, 41–43].

Примерами могут служить **СФ** метода “минимальной дисперсии” (**МД**) Кейпона

$$S_1(\alpha) = M \cdot (x^*(\alpha) \cdot w(\alpha))^{-1} = M \cdot (v^*(\alpha) \cdot v(\alpha))^{-1}, \quad (14a)$$

СФ метода линейного предсказания $S_{\text{ЛП}}(\alpha) = \omega_{mm} \cdot (w_m(\alpha))^{-2}$, при $m = M$ переходящая в **СФ** метода “максимальной энтропии” (**МЭ**) Берга

$$S_2(\alpha) = \omega_{MM} \cdot |w_M(\alpha)|^{-2} = |v_M(\alpha)|^{-2}, \quad (14б)$$

СФ метода “теплового шума (**ТШ**)”

$$S_3(\alpha) = (w^*(\alpha) \cdot w(\alpha))^{-1}, \quad (14в)$$

СФ метода Борджотти-Лагунаса (**БЛ**)

$$S_4(\alpha) = (x^*(\alpha) \cdot w(\alpha)) / (w^*(\alpha) \cdot w(\alpha)). \quad (14г)$$

Здесь

$$\begin{aligned} w(\alpha) &= \{w_m(\alpha)\}_{m=1}^M = \Psi \cdot x(\alpha), \\ v(\alpha) &= \{v_m(\alpha)\}_{m=1}^M = \mathbf{H} \cdot x(\alpha) \end{aligned} \quad (15)$$

– результаты преобразования “вектора поиска” $x^*(\alpha)$ в фильтрах с **МИХ** $\Psi = \Phi^{-1}$ и \mathbf{H} соответственно.

Построенные по (14), (15) формирователи **СФ** (14) показаны на рис. 5.

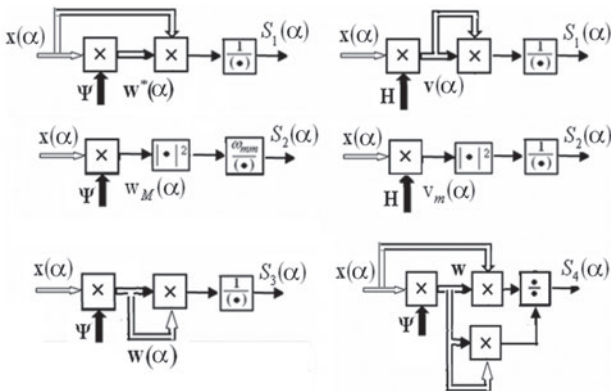


Рис. 5. Формирователи “сверхразрешающих” **СФ** (14)

В. Приведенные примеры, естественно, далеко не исчерпывают всего многообразия систем пространственно-временной обработки сигналов. В то же время в них, как и в приведенных примерах, важнейшим составным элементом являются **обращающие** фильтры с **МИХ** $\Psi = \{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^M = \Phi^{-1}$ или **обеляющие** фильтры с **МИХ**, пропорциональной “корню” \mathbf{H} из нее (7в). Смысл этих терминов более подробно раскрывается ниже, здесь мы отметим только, что именно для выполнения функций этих фильтров в реальных условиях априорного незнания **КМ** входных воздействий разрабатывались рассматриваемые далее **АРФ**, в этих условиях имеющие важные практические преимущества по сравнению с **обращающими** (обеляющими) фильтрами другой структуры.

2. ОБЕЛЯЮЩИЕ И ОБРАЩАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ

2.1. Определение и основные свойства обеляющих и обращающих фильтров

А. Фильтр с $N \times N$ матричной импульсной характеристикой (**МИХ**) $\mathbf{T} = \{t_{ij}\}_{i,j=1}^N$ называется **обеляющим** (whitening) фильтром N -мерного случайного вектора $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ с нулевым средним и корреляционной матрицей (**КМ**)

$$\Phi = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^N = \overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*}, \quad (16a)$$

если N -мерный вектор $\mathbf{v} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}$ на его выходе (рис. 6) имеет **КМ**

$$\Phi_v = \overline{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}^*} = \mathbf{T} \cdot \Phi \cdot \mathbf{T}^* = \mathbf{I}_N, \quad (16б)$$

равную $N \times N$ единичной матрице \mathbf{I}_N – **КМ** N -мерного вектора белого шума.

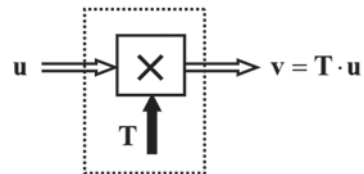


Рис. 6. Обеляющий фильтр

Из (16б) следует, что

$$\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} = \Psi = \{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^N = \Phi^{-1}, \quad (17)$$

т.е. **МИХ** \mathbf{T} обеляющего фильтра вектора $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ представляет собой “корень” [8] матрицы Ψ , обратной его **КМ** Φ .

Б. Фильтр с $N \times N$ **МИХ** $\mathbf{G} = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^N$ называется **обращающим** (inverse) фильтром случайного вектора $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ с нулевым средним и **КМ** (16а), если **КМ** N -мерного вектора $\mathbf{r} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{u}$ на его выходе

$$\Phi_r = \mathbf{G} \cdot \Phi \cdot \mathbf{G}^* = \Psi = \Phi^{-1} \quad (18)$$

обратна **КМ** вектора на входе.

Очевидно, что в силу (16), (17) условию (18) удовлетворяют фильтры с **МИХ**

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{T} = \Psi = \Phi^{-1}. \quad (19)$$

Отсюда следует, что **обращающий** фильтр может быть образован последовательным соединением обеляющего фильтра с **МИХ** \mathbf{T} и фильтра с **МИХ** \mathbf{T}^* (рис. 7).

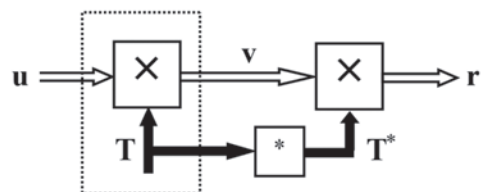


Рис. 7. Обращающий фильтр

2.2. Обеляющие фильтры с треугольными МИХ и обращающие фильтры на их основе

А. Формулы (16), (17) не определяют однозначно структуру и параметры “корней” матрицы Ψ (18) и, тем самым, структуру и параметры обеляющих и обращающих фильтров, которые в связи с этим могут быть различными. В роли такого корня может выступать, например, квадратная $N \times N$ матрица

$$\mathbf{Q} = \Lambda^{-1/2} \cdot \mathbf{Z}^*, \quad \mathbf{Q}^* \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{\Psi} = \mathbf{Z} \cdot \Lambda^{-1} \cdot \mathbf{Z}^*,$$

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{Z} \cdot \Lambda \cdot \mathbf{Z}^*,$$

в которой $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i\}_{i=1}^M$ – диагональная $N \times N$ матрица положительных ($\lambda_i > 0$) собственных чисел **КМ** Φ , \mathbf{Z} – унитарная ($\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}^* \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{I}_N$) $N \times N$ матрица ее собственных векторов.

Б. Хорошо известны также **треугольные корни** – сомножители верхне-нижнего или нижне-верхнего разложений **Холецкого** матрицы Ψ :

$$\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} = \mathbf{\Psi} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* \quad (20)$$

Здесь $\mathbf{H} = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^N$ и $\mathbf{N} = \{n_{ij}\}_{i,j=1}^N$ ($n_{ij} = h_{ij} = 0, j > i$) – **нижние треугольные** матрицы – сомножители матрицы Ψ (рис. 8) с действительными положительными диагональными элементами, существующие у эрмитовых положительно определенных (**э.п.о.**) матриц, в том числе **КМ** и обратных им.



Рис. 8. Треугольные верхне-нижнее и нижне-верхнее разложения эрмитовой положительно определенной матрицы Ψ

В. **Обеляющий** фильтр с **нижней** треугольной **МИХ** $\mathbf{T} = \mathbf{H} = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^N$ (рис. 6) преобразует входной вектор $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ с **КМ** (16а) в выходной вектор

$$\mathbf{p} = \{p_\ell\}_{\ell=1}^N = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}, \quad \overline{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}^*} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{H}^* = \mathbf{I}_N, \quad (21a)$$

m -я ($m \in 1, N$) компонента которого

$$p_m = \mathbf{b}_m^* \cdot \mathbf{u}^{(m)}(1) = b_m^{(m)} \cdot u_m + \sum_{\ell=1}^{m-1} b_\ell^{(m)} \cdot u_\ell, \quad (21b)$$

$$\mathbf{b}_m^* = \{b_i^{(m)}\}_{i=1}^m, \quad b_i^{(m)} = h_{mi}, \quad \mathbf{u}^{(m)}(\ell) = \{u_i\}_{i=\ell}^{m+\ell-1}$$

может рассматриваться как результат (ошибка) линейного предсказания взвешенной с весом $b_m^{(m)} = h_{mm}$ m -й компоненты u_m вектора \mathbf{u} линейной комбинацией (взвешенной суммой) его **предшествующих** компонент u_ℓ ($\ell \in 1, m-1$) с весами $b_\ell^{(m)} = h_{m\ell}$ – **первыми** $m-1$ элементами m -й строки матрицы \mathbf{H} .

В силу равенств $\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{p}^*} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{H}^* = \mathbf{H}^{-1}$, вытекающих из (16), (20), (21а),

$$u_\ell \cdot p_m^* = 0, \quad \ell < m, \quad (22)$$

т.е. ошибка p_m предсказания m -й компоненты u_m входного вектора некоррелирована со всеми $m-1$ **предшествующими** (предсказываемыми) компонентами. Поэтому ее мощность $\overline{|p_m|^2} = 1$ минимальна по сравнению с мощностью $\overline{|\xi_m|^2}$ линейной комбинации $\xi_m = \mathbf{k}_m^* \cdot \mathbf{u}^{(m)}$ **первых** m компонент вектора \mathbf{u} с любым m -мерным вектором весов $\mathbf{k}_m^* = \{k_\ell\}_{\ell=1}^m \neq \mathbf{b}_m^*$ с m -й компонентой $k_m = b_m^{(m)} \neq 0$.

Г. **Обеляющий** фильтр с **верхней** треугольной **МИХ** $\mathbf{T} = \mathbf{N}^* = \{n_{ji}^*\}_{i,j=1}^N$ (рис. 6) преобразует входной вектор $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ с **КМ** (16а) в выходной вектор

$$\mathbf{q} = \{q_\ell\}_{\ell=1}^N = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{u}, \quad \overline{\mathbf{q} \cdot \mathbf{q}^*} = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{I}_N, \quad (23a)$$

$(N+1-m)$ -я компонента которого

$$q_v = \mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{u}^{(m)}(v) = a_1^{(m)} \cdot u_v + \sum_{\ell=v+1}^N a_{\ell-v+1}^{(m)} \cdot u_\ell, \quad (23b)$$

$$\mathbf{a}_m^* = \{a_i^{(m)}\}_{i=1}^m, \quad a_i^{(m)} = n_{N+i-m,v}^*, \quad v = N+1-m$$

может рассматриваться как ошибка линейного предсказания взвешенной с весом $a_1^{(m)} = n_{Nv}^*$ v -й компоненты u_v вектора \mathbf{u} линейной комбинацией (взвешенной суммой) его $m-1$ **последующих** компонент u_ℓ с весами $a_{\ell-v+1}^{(m)}$ ($\ell \in v+1, N$) – **последними** $m-1$ элементами v -й строки матрицы $\mathbf{N}^* = \{n_{ji}^*\}_{i,j=1}^N$.

В силу равенств $\overline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}^*} = \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{N}^*)^{-1}$, вытекающих из (16), (20), (23а),

$$u_\ell \cdot q_v^* = 0, \quad \ell > v = N+1-m, \quad (24)$$

т.е. ошибка предсказания v -й компоненты u_v входного вектора некоррелирована со всеми его **последующими** (предсказываемыми) компонентами. Поэтому ее мощность $\overline{|q_v|^2} = 1$ минимальна по сравнению с мощностью $\overline{|\varepsilon_v|^2}$ линейной комбинации $\varepsilon_v = \mathbf{k}_m^* \cdot \mathbf{u}^{(m)}(v)$ **последних** m компонент вектора \mathbf{u} с любым m -мерным вектором весов $\mathbf{k}_m^* = \{k_\ell\}_{\ell=1}^m \neq \mathbf{a}_m^*$ с первой компонентой $k_1 = a_1^{(m)} \neq 0$.

Д. **Обрачающий** фильтр с **эрмитовой МИХ** Ψ (20) (рис. 7) преобразует входной вектор $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ с **КМ** (16а) в выходной вектор

$$\mathbf{r} = \{r_\ell\}_{\ell=1}^N = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{u}, \quad \overline{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}^*} = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{\Phi} \cdot \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi}, \quad (25a)$$

m -я ($m \in 1, N$) компонента которого

$$r_m = \mathbf{\Psi}_m^* \cdot \mathbf{u} = \omega_{mm} \cdot u_m + \sum_{\substack{\ell=1, \\ \ell \neq m}}^N \omega_{m\ell} \cdot u_\ell, \quad (25b)$$

$$\mathbf{\Psi}_m^* = \{\omega_{m\ell}\}_{\ell=1}^N, \quad m \in 1, N$$

может рассматриваться как ошибка линейного предсказания взвешенной с весом ω_{mm} m -й компоненты u_m входного вектора линейной комбинацией (взвешенной суммой) **всех** остальных его

компонент u_ℓ ($\ell \in 1, m-1; \ell \in m+1, N$) с весами — **недиагональными** элементами m -й строки Ψ_m^* матрицы Ψ (20).

В силу равенств $\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}^* = \Phi \cdot \Psi = \mathbf{I}_N$, вытекающих из (16), (20), (25a),

$$\overline{u_\ell \cdot r_m^*} = 0, \quad \ell \neq m, \quad \ell, m \in 1, N, \quad (26)$$

т.е. ошибка предсказания m -й компоненты u_m некоррелирована со всеми остальными (предсказываемыми) компонентами. Поэтому ее мощность $|\overline{r_m}|^2 = \omega_{mm}$ минимальна по сравнению с мощностью $|\overline{r_m}|^2$ линейной комбинации $c_m = \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{u}$ всех компонент вектора \mathbf{u} с любым N -мерным вектором весов $\mathbf{k}^* = \{k_\ell\}_{\ell=1}^N \neq \Psi_m^*$ с m -й компонентой $k_m = \omega_{mm} \neq 0$.

2.3. Факторизованные МИХ и многоступенчатые обеляющие и обращающие фильтры на их основе

Как отмечалось выше, практически наиболее интересны обеляющие или обращающие фильтры, построенные по тому или иному **факторизованному** представлению нужной МИХ \mathbf{A} — в виде **произведения** $\mathbf{A} = \prod_{i=1}^m \mathbf{B}_i$ слабозаполненных (с большим числом нулевых элементов) матриц \mathbf{B}_i различной структуры. Существование такого представления означает возможность построить фильтр с МИХ \mathbf{A} в виде m -каскадного (m -ступенчатого) фильтра с МИХ i -й ступени, равной \mathbf{B}_i , $i \in 1, m$.

В вычислительной математике используются различные виды сомножителей факторизованных представлений матриц, порождающие многоступенчатые фильтры различной структуры, в общем случае неравноценные по тем или иным показателям. Ниже приводятся примеры соответствующих многоступенчатых обеляющих и обращающих фильтров.

А. На рис. 9 показаны фильтры с **нижней** \mathbf{H} и **верхней** \mathbf{H}^* треугольными МИХ

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{H}_4 \cdot \mathbf{H}_3 \cdot \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{H}_1, \\ \mathbf{H}^* &= \mathbf{H}_1^* \cdot \mathbf{H}_2^* \cdot \mathbf{H}_3^* \cdot \mathbf{H}_4^*, \end{aligned} \quad (27)$$

треугольные слабозаполненные сомножители которых являются матрицами исключения **метода Гаусса** решения систем линейных уравнений [1, 8, 44–47] и в рассматриваемом примере ($N = 4$) имеют вид:

$$\mathbf{H}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} & 0 \\ 0 & 0 & h_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad (28a)$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & h_{32} & 1 & 0 \\ 0 & h_{42} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 \\ h_{21} & 1 & 0 & 0 \\ h_{31} & 0 & 1 & 0 \\ h_{41} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (28б)$$

Эти фильтры строятся из набора показанных в штриховой рамке “элементарных (двухвходных) весовых сумматоров” (ЭВС), число которых в каждой последующей ступени на единицу меньше, чем в предыдущей.

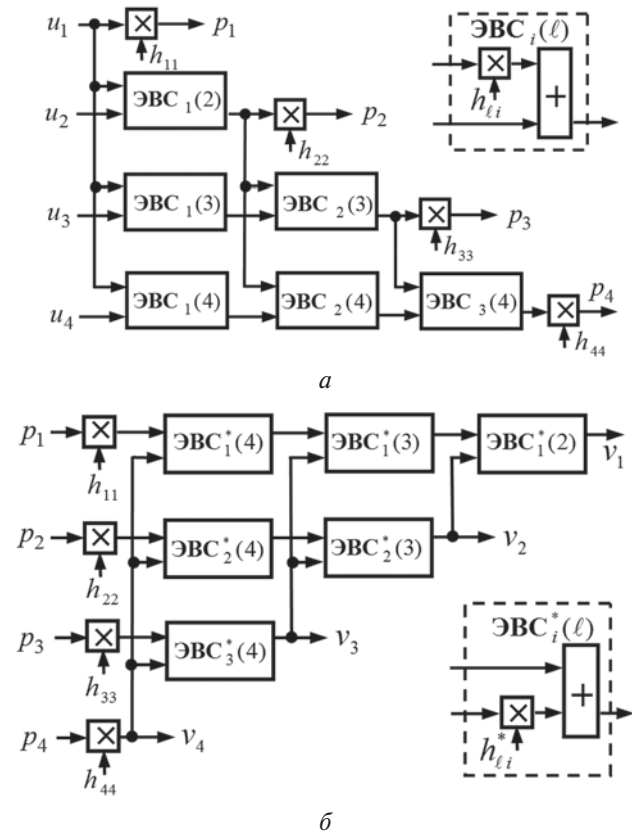


Рис. 9. Фильтры с нижней (а) и верхней (б) треугольными МИХ (27)

При выборе весов $h_{\ell m}$ ($\ell \in m+1, N$) m -й ($m \in 1, N-1$) ступени ЭВС из условия декорреляции выходного сигнала с сигналом на управляемом (взвешиваемом) входе, и весов h_{mm} — из условия нормирования к единичной мощности сигнала на его m -м ($m \in 1, N$) выходе фильтр рис. 9, а становится многоступенчатым аналогом обеляющего фильтра рис. 6 с **нижней** треугольной МИХ \mathbf{H} (27). Его m -я ($m \in 2, N$) компонента p_m может при этом рассматриваться как результат оптимального (по критерию уровня дисперсии ошибки) предсказания (компенсации) процесса на его m -м входе (в m -м канале приема) взвешенной суммой процессов его $m-1$ **предшествующих** входов, играющих роль последовательно **возрастающего** с ростом m числа вспомогательных (компенсационных) каналов приема.

Объединение фильтров рис. 9, а и 9, б образует многоступенчатый аналог **обращающего** фильтра (рис. 7). При этом m -я компонента r_m ($m \in 1, N$) вектора \mathbf{r} (25а) на его выходе является результатом оптимального (по критерию уровня дисперсии ошибки) предсказания (компенсации) процесса на его m -м входе (в m -м канале приема) взвешенной суммой процессов всех $N-1$ **остальных** входов, играющих роль вспомогательных каналов приема.

Б. На рис. 10 показаны фильтры с верхней и нижней треугольными МИХ

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^* &= \mathbf{N}_4^* \cdot \mathbf{N}_3^* \cdot \mathbf{N}_2^* \cdot \mathbf{N}_1^*, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{N}_3 \cdot \mathbf{N}_4. \end{aligned} \quad (29)$$

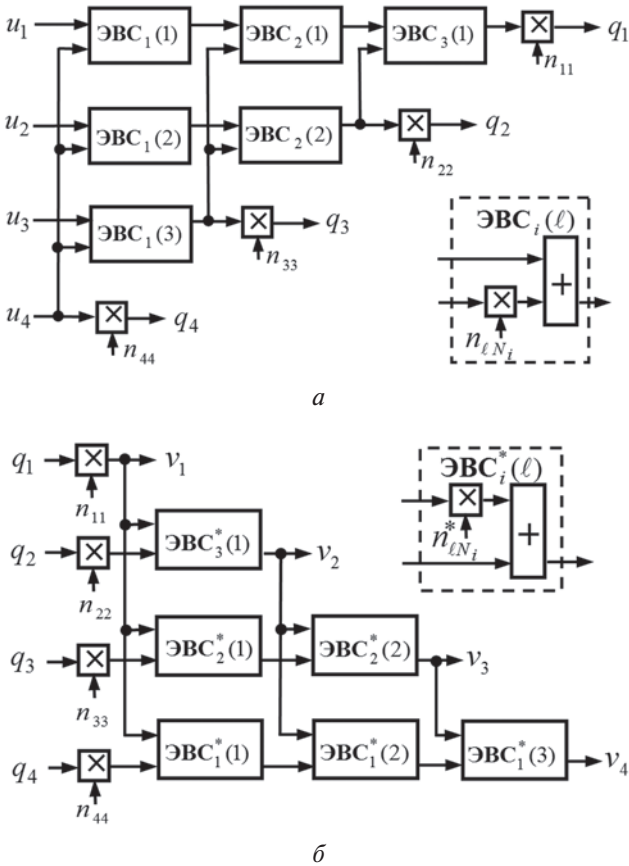


Рис. 10. Фильтры с верхней (а) и нижней (б) треугольными МИХ (29)

В этом примере ($N=4$) треугольные слабозаполненные сомножители МИХ (29) имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_4^* &= \begin{bmatrix} n_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_3^* = \begin{bmatrix} 1 & n_{12} & 0 & 0 \\ 0 & n_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_2^* &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & n_{13} & 0 \\ 0 & 1 & n_{23} & 0 \\ 0 & 0 & n_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & n_{14} \\ 0 & 1 & 0 & n_{24} \\ 0 & 0 & 1 & n_{34} \\ 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (30)$$

Как и фильтры рис. 9, фильтры рис. 10 строятся из набора ЭВС, показанных в штриховой рамке. Если при этом их веса выполняют те же функции, что и веса ЭВС фильтров рис. 9, а, фильтр рис. 10, а становится многоступенчатым аналогом обеляющего фильтра рис. б с верхней треугольной МИХ \mathbf{N}^* (29). Его m -я ($m \in 1, N-1$) компонента q_m может при этом рассматриваться как результат оптимального (по критерию уровня дисперсии ошибки) предсказания (компенсации) процесса на его m -м входе (в m -м канале приема)

взвешенной суммой процессов его $N-t$ последующих входов, играющих роль последовательно убывающего с ростом t числа вспомогательных (компенсационных) каналов приема.

Объединение фильтров рис. 10, а и 10, б образует в этом случае многоступенчатый аналог обрабатывающего фильтра (рис. 7) с теми же свойствами, что и обрабатывающий фильтр, полученный объединением фильтров рис. 9, а и 9, б.

В. Многоступенчатые фильтры вида рис. 9, 10, а также другие их разновидности с отличными от (27)–(30) сомножителями МИХ, рассматривались во многих работах [48–55 и др.]. Достоинства таких фильтров – повышенная численная устойчивость, однотипность составных элементов, простота наращивания. При этом они универсальны в том смысле, что пригодны для КМ произвольной структуры.

Эта универсальность имеет, однако, и оборотную сторону. В этих фильтрах сложно учесть и использовать для повышения эффективности обработки вполне возможную на практике специфику структуры исходной КМ (например, ее персимметрию или теплицевость), которая разрушается уже после первого шага (ступени) преобразований.

Эти недостатки ослаблены в решетчатых фильтрах (РФ), которым посвящена остальная часть статьи, развивающая и дополняющая [10, 11, 21–23].

3. РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ. СИНТЕЗ, ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ, СВОЙСТВА ПАРАМЕТРОВ

3.1. Базовые соотношения и определения

Произвольные нижняя треугольная $N \times N$ матрица \mathbf{H} и верхняя треугольная $N \times N$ матрица \mathbf{N}^* полностью определяются набором m -мерных ($m \in 1, N$) строк (см. (21б), (23б))

$$\mathbf{b}_m^* = \{b_i^{(m)}\}_{i=1}^m \quad \text{и} \quad \mathbf{a}_m^* = \{a_i^{(m)}\}_{i=1}^m, \quad m \in 1, N, \quad (31)$$

составленных из m первых элементов m -й строки матрицы \mathbf{H} и m последних элементов $v = (N+1-m)$ -й строки матрицы \mathbf{N}^* (остальные элементы этих строк равны нулю). С соответствующими N -мерными строками этих матриц строки (31) связаны равенствами

$$\mathbf{b}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^{(N)*}(1) = \mathbf{e}_m^{(N)*} \cdot \mathbf{H}, \quad m \in 1, N, \quad (32)$$

$$\mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^{(N)*}(v) = \mathbf{e}_v^{(N)*} \cdot \mathbf{N}^*, \quad v = N+1-m,$$

где

$$\mathbf{E}_k^{(M)}(\ell) = \left\{ \mathbf{e}_i^{(M)} \right\}_{i=\ell}^{k+\ell-1} = \sum_{i=1}^k \mathbf{e}_{i+\ell-1}^{(M)} \cdot \mathbf{e}_i^{(k)*} \quad (33)$$

– $M \times k$ матрица, составленная из $k \in 1, M$ смежных столбцов $\mathbf{e}_i^{(M)}$ единичной $M \times M$ матрицы

$$\mathbf{I}_M = \{ \mathbf{e}_i^{(M)} \}_{i=1}^M = \sum_{i=1}^M \mathbf{e}_i^{(M)} \cdot \mathbf{e}_i^{(M)*}, \quad \text{начиная с } \ell\text{-го.}$$

Для представляющих основной практический интерес случаев, когда матрицы \mathbf{H} и \mathbf{N}^* должны быть сомножителями разложений Холецкого (20), так что

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \Phi = \mathbf{H}^{-*}, \quad \mathbf{N}^* \cdot \Phi = \mathbf{N}^{-1}, \\ \mathbf{G}^{-*} = (\mathbf{G}^{-1})^* = (\mathbf{G}^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

для определяющих строк (31) справедливы равенства

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^{(N)*}(1) \cdot \Phi = \mathbf{e}_m^{(N)*} \cdot \mathbf{H}^{-*}, \quad m \in 1, N, \\ \mathbf{a}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^{(N)*}(v) \cdot \Phi = \mathbf{e}_v^{(N)*} \cdot \mathbf{N}^{-1}, \quad v = N + 1 - m. \end{aligned} \quad (35)$$

Умножая справа первое из них на $\mathbf{E}_m^{(N)}(1)$, а второе – на $\mathbf{E}_m^{(N)}(v)$, получим, что в этом случае они являются корнями систем уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^* \cdot \Phi^{(m)}(1) = (b_m^{(m)})^{-1} \cdot \mathbf{e}_m^{(m)*}, \quad m \in 1, N, \\ \mathbf{a}_m^* \cdot \Phi^{(m)*}(v) = (a_1^{(m)})^{-1} \cdot \mathbf{e}_1^{(m)*}, \quad v = N + 1 - m, \end{aligned} \quad (36)$$

и, следовательно, равны

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^* = (b_m^{(m)})^{-1} \cdot \Psi_m^{(m)*}(1), \quad m \in 1, N, \\ \mathbf{a}_m^* = (a_1^{(m)})^{-1} \cdot \Psi_1^{(m)*}(v), \quad v = N + 1 - m. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi^{(m)}(\ell) = \{\varphi_{ij}^{(m)}\}_{i,j=\ell}^{m+\ell-1} = \overline{\mathbf{u}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)*}(\ell)} = \\ = \mathbf{E}_m^{(N)*}(\ell) \cdot \Phi \cdot \mathbf{E}_m^{(N)}(\ell) \end{aligned} \quad (38)$$

– э.п.о. ℓ -я ($\ell \in 1, N + 1 - m$) главная $m \times m$ ($m \in 1, N$) подматрица исходной КМ (16а), т.е. КМ ℓ -го m -мерного подвектора

$$\mathbf{u}^{(m)}(\ell) = \{u_i^{(m)}\}_{i=\ell}^{m+\ell-1} = \mathbf{E}_m^{(N)*}(\ell) \cdot \mathbf{u} \quad (39)$$

исходного N -мерного вектора $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$, для которого строится обеляющий или обращающий фильтр;

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(m)*}(\ell) = \{\omega_{1i}^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = \mathbf{e}_1^{(m)*} \cdot \Psi^{(m)}(\ell), \\ \Psi_m^{(m)*}(\ell) = \{\omega_{mi}^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = \mathbf{e}_m^{(m)*} \cdot \Psi^{(m)}(\ell) \end{aligned} \quad (40а)$$

– первая и последняя (m -я) строки э.п.о. $m \times m$ матрицы

$$\begin{aligned} \Psi^{(m)}(\ell) = \{\omega_{ij}^{(m)}(\ell)\}_{i,j=\ell}^m = \left(\Phi^{(m)}(\ell)\right)^{-1} = \\ = \mathbf{H}^{(m)*}(\ell) \cdot \mathbf{H}^{(m)}(\ell) = \mathbf{N}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{N}^{(m)*}(\ell), \end{aligned} \quad (40б)$$

обратной (38), допускающая аналогичные (20) верхне-нижнее и нижне-верхнее разложения Холецкого.

В (36), (37) учтено, что диагональные элементы матриц, обратных треугольным, обратны тем же диагональным элементам обращаемых матриц.

Из (36), (37) следует, что строки (31) и, тем самым, матрицы \mathbf{H} и \mathbf{N} в целом, можно в принципе получить, последовательно обращая главные подматрицы $\Phi^{(m)}(1)$ и $\Phi^{(m)}(N + 1 - m)$ всех порядков $m \in 1, N$. Но возможен и существенно

более рациональный способ решения этой задачи, базирующийся на “обобщенном алгоритме Левинсона” (ОАЛ) [11].

3.2. Обобщенный алгоритм Левинсона (ОАЛ)

А. В ОАЛ строки (31) и, тем самым, $N \times N$ матрицы \mathbf{H} и \mathbf{N}^* (20) в целом вычисляются по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^*(\ell) = \{b_i^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = \\ = s_m(\ell) \cdot \{(0, \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell + 1)) + \alpha_m(\ell) \cdot (\mathbf{a}_{m-1}^*(\ell), 0)\}, \\ m \in 2, N, \quad \ell \in 1, N + 1 - m, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m^*(\ell) = \{a_i^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = \\ = c_m(\ell) \cdot \{(\mathbf{a}_{m-1}^*(\ell), 0) + \beta_m(\ell) \cdot (0, \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell + 1))\} \end{aligned}$$

связывающим m -мерную последнюю строку

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^*(\ell) = \{b_i^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = \\ = \mathbf{e}_m^{(m)*} \cdot \mathbf{H}^{(m)}(\ell) = (b_m^{(m)}(\ell))^{-1} \cdot \Psi_m^{(m)*}(\ell) \end{aligned} \quad (42а)$$

нижней треугольной $m \times m$ матрицы $\mathbf{H}^{(m)}(\ell)$ и m -мерную первую строку

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_m^*(\ell) = \{a_i^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = \\ = \mathbf{e}_1^{(m)*} \cdot \mathbf{N}^{(m)*}(\ell) = (a_1^{(m)}(\ell))^{-1} \cdot \Psi_1^{(m)*}(\ell) \end{aligned} \quad (42б)$$

верхней треугольной $m \times m$ матрицы $\mathbf{N}^{(m)*}(\ell)$ в (40) с соответствующими $(m - 1)$ -мерными строками.

Запись $(0, \mathbf{Z}_{m-1}^*(\bullet))$ или $(\mathbf{Z}_{m-1}^*(\bullet), 0)$ здесь и далее обозначает m -мерную строку, состоящую из $(m - 1)$ -мерной строки $\mathbf{Z}_{m-1}^*(\bullet)$, дополненной нулем слева или справа соответственно.

Ниже мы получим определяющие рекурсии (41) как следствие более общего “блочного алгоритма Левинсона (БАЛ)”, который строго выводится в п. 4.1.

Из (42а, б) следуют равенства

$$(b_m^{(m)}(\ell))^2 = \omega_{mm}^{(m)}(\ell), \quad (a_1^{(m)}(\ell))^2 = \omega_{11}^{(m)}(\ell), \quad (42в)$$

что позволяет переписать их в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^*(\ell) = \{b_i^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = (\omega_{mm}^{(m)}(\ell))^{-1/2} \cdot \Psi_m^{(m)*}(\ell), \\ \mathbf{a}_m^*(\ell) = \{a_i^{(m)*}(\ell)\}_{i=1}^m = (\omega_{11}^{(m)}(\ell))^{-1/2} \cdot \Psi_1^{(m)*}(\ell). \end{aligned} \quad (42г)$$

При этом искомые строки (31), как следует из их сравнения (42) с (37), равны

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^* = \mathbf{b}_m^*(1), \quad \mathbf{a}_m^* = \mathbf{a}_m^*(v), \\ m \in 1, N, \quad v = N + 1 - m, \end{aligned} \quad (43)$$

что позволяет рекуррентно вычислить их по (41), “стартуя” с первого шага ($m = 1$, $\mathbf{e}_m^{(m)*} = \mathbf{e}_1^{(m)*} = 1$)

$$\Phi^{(m)}(\ell) = \varphi_{\ell\ell}, \quad \Psi^{(1)}(\ell) = \omega_{11}^{(1)}(\ell) = \varphi_{\ell\ell}^{-1}, \quad (44а)$$

для которого, в силу (42), (40),

$$\mathbf{b}_1^*(\ell) = b_1^{(1)}(\ell) = \mathbf{a}_1^*(\ell) = a_1^{(1)}(\ell) = \varphi_{\ell\ell}^{-1/2}, \quad \ell \in 1, N. \quad (44б)$$

При этом на каждом шаге рекурсии по $m \in 1, N$ могут быть получены m -мерные строки

(43), а также “заготовлены впрок” m -мерные строки $\mathbf{b}_m^*(\ell)$, $\ell \in 2, v$ и $\mathbf{a}_m^*(\ell)$, $\ell \in 1, v-1$, которые потребуются на последующих шагах. Необходимые для этого параметры $s_m(\ell)$, $c_m(\ell)$, $\alpha_m(\ell)$, $\beta_m(\ell)$, ($\ell \in 1, N+1-m$) m -го ($m \in 2, N$) шага в случае эрмитовой КМ (16а) должны быть численно равны

$$\alpha_m(\ell) = \frac{\omega_{m1}^{(m)}(\ell)}{(\omega_{11}^{(m)}(\ell) \cdot \omega_{mm}^{(m)}(\ell))^{1/2}} = \beta_m^*(\ell), \quad (45)$$

$$s_m(\ell) = (1 - |\alpha_m(\ell)|^2)^{-1/2} = c_m(\ell).$$

ОАЛ (41), (44) выполним до конца (до $m=N$) для “строго несингулярных” матриц, у которых отличны от нуля все главные миноры всех порядков:

$$\det \Phi^{(m)}(\ell) = |\Phi^{(m)}(\ell)| \neq 0, \quad (46a)$$

$$m \in 1, N; \ell \in 1, N+1-m.$$

Индикатором строгой несингулярности эрмитовой КМ с ненулевыми действительными диагональными элементами является справедливость неравенств

$$|\alpha_m(\ell)|^2 \neq 1, \quad m \in 2, N, \ell \in 1, N+1-m. \quad (46b)$$

Для э.п.о. КМ физически реальных процессов справедливы неравенства

$$|\alpha_m(\ell)|^2 < 1, \quad m \in 2, N, \ell \in 1, N+1-m. \quad (46b)$$

Если же $|\alpha_m(\ell)|^2 = 1$, то матрица $\Phi^{(m)}(\ell)$ вырождена, а ее ранг равен $m-1$.

Б. Из обобщенного алгоритма Левинсона (41), (44) вытекает специфическая “обобщенная факторизация Левинсона (ОФЛ)” $2 \cdot N \times N$ матрицы

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^* \end{bmatrix} \quad (47)$$

состоящей из $N \times N$ нижней (\mathbf{H}) и верхней (\mathbf{N}^*) треугольных матриц – сомножителей МИХ $\Psi = \Phi^{-1}$ (20) фильтров рис. 9, а и 10, а. Сомножители этой матрицы определяют структуру ступеней универсальных решетчатых фильтров ($\mathbf{P}\Phi$), на основе которых требующиеся функции матриц \mathbf{H} и \mathbf{N}^* , в частности, векторы (21а), (23а), (25а), вычисляются без явного определения этих матриц. Ниже выводится ОФЛ и синтезируются вытекающие из нее $\mathbf{P}\Phi$.

3.3. Обобщенная факторизация Левинсона и универсальные решетчатые фильтры

Искомую ОФЛ получим на основе ОАЛ в процессе пошагового преобразования входного вектора $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ в $2 \cdot N$ -мерный вектор $\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)^*$, N -мерными подвекторами которого являются векторы $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1}^N = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$ (21а) и $\mathbf{q} = \{q_i\}_{i=1}^N = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{u}$ (23а).

В силу (32), (43), (39) m -я ($m \in 1, N$) компонента $p_m = \mathbf{e}_m^{(N)*} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}$ вектора \mathbf{p} и $v = (N+1-m)$ -я компонента $q_v = \mathbf{e}_v^{(N)*} \cdot \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{u}$ вектора \mathbf{q} равны

$$p_m = \mathbf{b}_m^*(1) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(1), \quad q_v = \mathbf{a}_m^*(v) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(v), \quad m \in 1, N. \quad (48)$$

Введем набор скаляров m -го ($m \in 1, N$) шага

$$p_m(\ell) = \mathbf{b}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell), \quad q_m(\ell) = \mathbf{a}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell), \quad (49)$$

$$\ell \in 1, N+1-m,$$

включающий и искомые компоненты (48)

$$p_m = p_m(1), \quad q_v = q_m(v), \quad (50)$$

$$m \in 1, N, \quad v = N+1-m.$$

При $m=1$ в силу (44)

$$p_1(\ell) = q_1(\ell) = s_1(\ell) \cdot u_\ell, \quad (51a)$$

$$s_1(\ell) = b_1^{(1)}(\ell) = a_1^{(1)}(\ell) = \phi_{\ell\ell}^{-1/2}, \quad \ell \in 1, N,$$

или, в матричной записи,

$$\mathbf{z}_1 = \{\mathbf{z}_1(\ell)\}_{\ell=1}^N = \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{z}_1(\ell) = \begin{bmatrix} p_1(\ell) \\ q_1(\ell) \end{bmatrix}, \quad \ell \in 1, N, \quad (51b)$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{S}_1,$$

где

$$\mathbf{S}_1 = \text{diag}\{s_1(\ell)\}_{\ell=1}^N = \text{diag}\{\phi_{\ell\ell}^{-1/2}\}_{\ell=1}^N \quad (51b)$$

– диагональная матрица множителей первого шага,

$$\mathbf{V} = \mathbf{I}_N \otimes [1, 1]^T \quad (51g)$$

– $2 \cdot N \times N$ матрица “раздвоения” (\otimes – символ кронекеровского перемножения [8]).

Соответствующая (51) схема первого шага преобразования (первой ступени $\mathbf{P}\Phi$) показана на рис. 11.

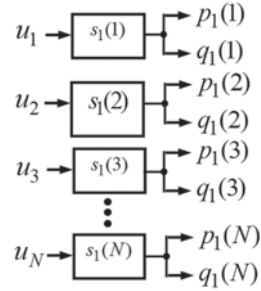


Рис. 11. Первый шаг ОФЛ (первая ступень $\mathbf{P}\Phi$)

“Стартуя” с (51) (схемы рис. 11) и используя ОАЛ (41), получим набор (49) и, тем самым, искомые компоненты (48), (50), на последующих шагах $m \in 2, N$:

$$p_m(\ell) = s_m(\ell) \cdot \{(\mathbf{0}, \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell+1)) + \alpha_m(\ell) \cdot (\mathbf{a}_{m-1}^*(\ell), \mathbf{0})\} \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell), \quad (52a)$$

$$q_m(\ell) = c_m(\ell) \cdot \{(\mathbf{a}_{m-1}^*(\ell), \mathbf{0}) + \beta_m(\ell) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell+1))\} \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell). \quad (52b)$$

Используя (49) и очевидные равенства

$$(\mathbf{0}, \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell+1)) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell) = p_{m-1}(\ell+1), \quad (53)$$

$$(\mathbf{a}_{m-1}^*(\ell), \mathbf{0}) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell) = q_{m-1}(\ell),$$

получим рекуррентные формулы преобразования скаляров $(m-1)$ -го шага в скаляры m -го шага, определяющие структуру m -й $(m \in 2, N)$ ступени **РФ**:

$$\begin{cases} p_m(\ell) = s_m(\ell) \cdot \tilde{p}_m(\ell), \\ \tilde{p}_m(\ell) = \{p_{m-1}(\ell+1) + \alpha_m(\ell) \cdot q_{m-1}(\ell)\}, \\ q_m(\ell) = c_m(\ell) \cdot \tilde{q}_m(\ell), \\ \tilde{q}_m(\ell) = \{q_{m-1}(\ell) + \beta_m(\ell) \cdot p_{m-1}(\ell+1)\}, \\ m \in 2, \ell \in 1, N+1-m. \end{cases} \quad (54a)$$

На рис. 12 показан ℓ -й $(\ell \in 1, N+1-m)$ двухвходовой весовой сумматор с перекрестными связями (элементарный решетчатый фильтр (**ЭРФ**)), объединяющий **ЭВС** фильтров рис. 9 и рис. 10 и реализующий соотношения (54а) в m -й ступени **РФ**.

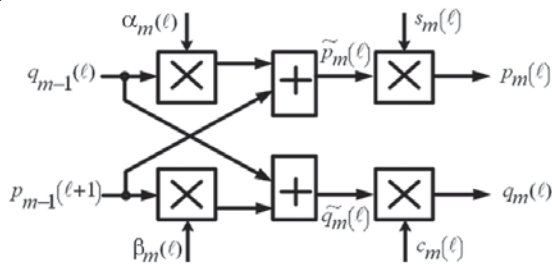


Рис. 12. ℓ -й **ЭРФ** m -й ступени **РФ**

МИХ $\mathfrak{E}_m(\ell)$ этого **ЭРФ**, очевидно, равна

$$\mathfrak{E}_m(\ell) = \mathbf{S}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathfrak{E}}_m(\ell), \quad \mathbf{S}_m(\ell) = \begin{Bmatrix} s_m(\ell) & 0 \\ 0 & c_m(\ell) \end{Bmatrix}, \quad (54b)$$

$$\tilde{\mathfrak{E}}_m(\ell) = \begin{Bmatrix} \alpha_m(\ell) & 1 \\ 1 & \beta_m(\ell) \end{Bmatrix},$$

а полная совокупность преобразований (54) N -мерного входного вектора – столбца в выходной $2N$ -мерный столбец с учетом начального шага (51) описывается факторизованной **МИХ**

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_N \cdot \mathbf{D}_{N-1} \cdots \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathfrak{E}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{E}_m = \text{diag} \{ \mathfrak{E}_m(\ell) \}_{\ell=1}^{N+1-m}, \quad (54b)$$

$$m \in 2, N,$$

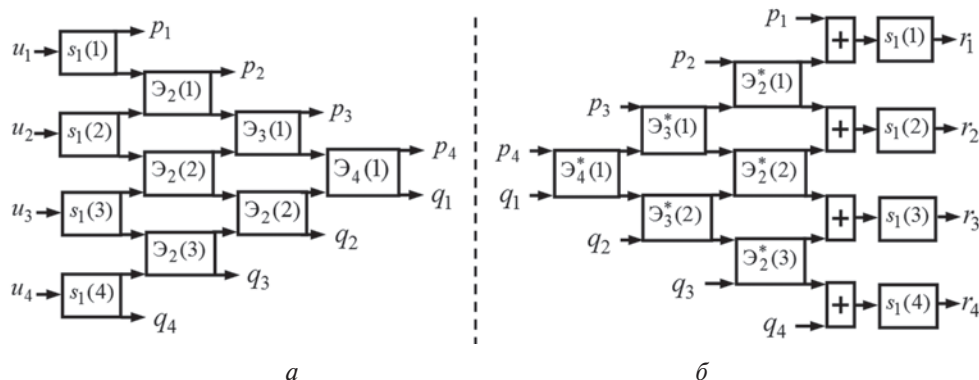


Рис. 13. Решетчатые фильтры с **МИХ** (54в) и **МИХ** (54г)

которая и представляет собой **ОФЛ** нижнее – верхних треугольных сомножителей матрицы, обратной **э.п.о.** матрице, в частности, **КМ**.

Такую **МИХ** имеет **РФ**, показанный на рис. 13, а. Для этого же случая $(N=4)$ на рис. 13, б показан **РФ** с 4×8 эрмитово сопряженной **МИХ**.

$$\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1^* = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}^* \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1^T \cdot \mathbf{D}_2^* \cdot \mathbf{D}_3^* \cdots \mathbf{D}_{N-1}^* \cdot \mathbf{D}_N^*. \quad (54г)$$

Первый **РФ** (а) строится из набора **ЭРФ** (рис. 12), число которых, как в фильтрах рис. 9, а и 10, а, уменьшается на единицу от ступени к ступени. При любых значениях его параметров он имеет $2 \cdot N \times N$ **МИХ** (47). Если при этом его параметры удовлетворяют равенствам (45), (51а), то эти матрицы являются соответствующими сомножителями матрицы $\Psi = \Phi^{-1}$ в (20), а **РФ** (рис. 13, а) с результирующей **МИХ** (47) объединяет в своем составе одновременно два обесвечивающих фильтра. Входной N -мерный вектор $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ с **КМ** (16а) преобразуется в нем в N -мерные векторы $\mathbf{p} = \{p_i\}_{i=1}^N$ (21а) и $\mathbf{q} = \{q_i\}_{i=1}^N$ (23а) со всеми присущими им свойствами (см. п. 2.2.В, Г).

Второй **РФ** (б) строится из “эрмитово сопряженных” **ЭРФ** (рис. 14) с **МИХ**

$$\mathfrak{E}_m^*(\ell) = \tilde{\mathfrak{E}}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{S}_m(\ell), \quad (54д)$$

число которых от ступени к ступени увеличивается на единицу.

Подключение его входов к соответствующим выходам обесвечивающего **РФ** рис. 13, а образует **РФ** с результирующей **МИХ**

$$\mathbf{W}_2 \cdot \mathbf{W}_1 = \mathbf{W}_1^* \cdot \mathbf{W}_1 = \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* = 2 \cdot \Psi, \quad (55)$$

то есть **обращающий** фильтр со свойствами п. 2.2.Д, условно показанный на рис. 15, а.

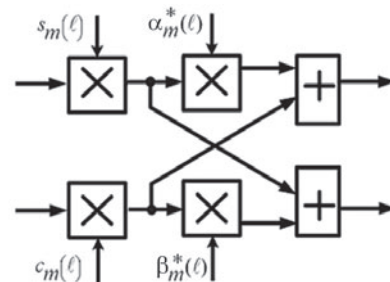


Рис. 14. “Эрмитово сопряженный” **ЭРФ**

Такое объединение остается обращающим фильтром (с МИХ Ψ), если соединять только \mathbf{p} (рис. 15, б) или только \mathbf{q} (рис. 15, в) выходы первого и входы второго РФ.

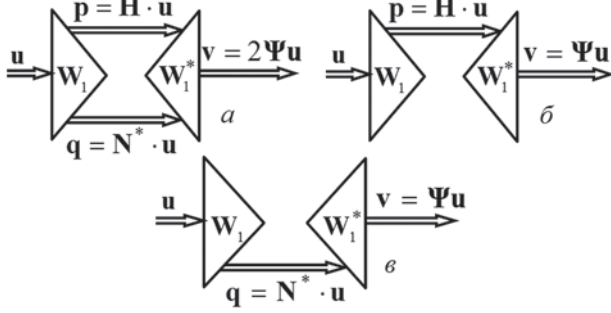


Рис. 15. Обращающие фильтры на основе РФ

Для краткости далее ЭРФ рис. 12, 14, РФ рис. 13, 15 и соответствующие им МИХ (54), (55) “по умолчанию” понимаются как синонимы – все, что касается ЭРФ и РФ, очевидным образом переносится на их МИХ, и наоборот.

3.4. Смысл и априорные свойства параметров ЭРФ обеляющих РФ

А. Обсудим физический смысл параметров ЭРФ, используя вытекающие из (42), (38) и (49) равенства

$$\mathbf{b}_m^*(\ell) \cdot \Phi^{(m)}(\ell) = p_m(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)*}(\ell) = (b_m^{(m)}(\ell))^{-1} \mathbf{e}_m^{(m)*}, \quad (56a)$$

$$\mathbf{a}_m^*(\ell) \cdot \Phi^{(m)}(\ell) = q_m(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)*}(\ell) = (a_1^{(m)}(\ell))^{-1} \mathbf{e}_1^{(m)*}. \quad (56b)$$

1. Умножим справа первое из них на $\mathbf{b}_m^*(\ell)$, а второе – на $\mathbf{a}_m^*(\ell)$. Учитывая (49), (54), получим

$$\begin{aligned} \overline{|p_m(\ell)|^2} &= s_m^2(\ell) \cdot \overline{|\tilde{p}_m(\ell)|^2} = 1, \\ \overline{|q_m(\ell)|^2} &= c_m^2(\ell) \cdot \overline{|\tilde{q}_m(\ell)|^2} = 1. \end{aligned} \quad (57a)$$

Отсюда следует, что параметры

$$s_m(\ell) = \left(\overline{|\tilde{p}_m(\ell)|^2} \right)^{-1/2}, \quad s_m(\ell) = \left(\overline{|\tilde{p}_m(\ell)|^2} \right)^{-1/2} \quad (57b)$$

имеют смысл коэффициентов усиления, нормирующих к единице мощность выходных сигналов ЭРФ.

2. Умножим справа равенства (56a) и (56b) на столбцы $(\mathbf{a}_{m-1}^*(\ell), 0)^*$ и $(0, \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell+1))^*$ соответственно. Используя (53), (49), получим

$$\begin{aligned} \overline{p_m(\ell) \cdot q_{m-1}^*(\ell)} &= \overline{\tilde{p}_m(\ell) \cdot q_{m-1}^*(\ell)} = 0, \\ \overline{q_m(\ell) \cdot p_{m-1}^*(\ell+1)} &= \overline{\tilde{q}_m(\ell) \cdot p_{m-1}^*(\ell+1)} = 0. \end{aligned} \quad (58)$$

Тем самым параметры $\alpha_m(\ell)$, $\beta_m(\ell)$ должны декоррелировать выходные процессы $p_m(\ell)$ и $q_m(\ell)$ ЭРФ с процессами $q_{m-1}(\ell)$ и $p_{m-1}(\ell+1)$ на соответствующих управляемых (взвешиваемых) входах. Как следует из (54), в условиях (57a) эти требования будут выполнены при

$$\alpha_m(\ell) = -\overline{p_{m-1}(\ell+1) \cdot q_{m-1}^*(\ell)}, \quad (59)$$

$$\beta_m(\ell) = -\overline{q_{m-1}(\ell) \cdot p_{m-1}^*(\ell+1)} = \alpha_m^*(\ell),$$

то есть при равенстве этих параметров (с точностью до знака) коэффициенту корреляции входных процессов каждого ЭРФ.

3. В этом случае мощность его ненормированных выходных сигналов

$$\begin{aligned} \overline{|\tilde{p}_m(\ell)|^2} &= \overline{\tilde{p}_m(\ell) \cdot \{p_{m-1}^*(\ell+1) + q_{m-1}^*(\ell) \cdot \alpha_m^*(\ell)\}} = \\ &= \overline{\tilde{p}_m(\ell) \cdot p_{m-1}^*(\ell+1)} = 1 - |\alpha_m(\ell)|^2, \end{aligned} \quad (60a)$$

$$\begin{aligned} \overline{|\tilde{q}_m(\ell)|^2} &= \overline{\tilde{q}_m(\ell) \cdot \{q_{m-1}^*(\ell) + p_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \beta_m^*(\ell)\}} = \\ &= \overline{\tilde{q}_m(\ell) \cdot q_{m-1}^*(\ell)} = 1 - |\alpha_m(\ell)|^2. \end{aligned} \quad (60b)$$

Легко показать, что мощность (60) минимальна – при отличных от (59) параметрах ЭРФ, не обеспечивающих декорреляцию (58), она будет больше.

В условиях (60) равенства (57) выполняются нормирующими множителями

$$\begin{aligned} s_m(\ell) &= c_m(\ell) = \left(\overline{\tilde{p}_m \cdot p_{m-1}^*(\ell+1)} \right)^{-1/2} = \\ &= \left(\overline{\tilde{q}_m(\ell) \cdot q_{m-1}^*(\ell)} \right)^{-1/2} = \left(1 - |\alpha_m(\ell)|^2 \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (61)$$

4. Из последнего равенства в сочетании с (41), (42) следует, что (см. 45)

$$\alpha_m(\ell) = \frac{b_1^{(m)}(\ell)}{a_1^{(m)}(\ell)} = \frac{\omega_{m1}^{(m)}(\ell)}{\left(\omega_{11}^{(m)}(\ell) \cdot \omega_{mm}^{(m)}(\ell) \right)^{1/2}}, \quad (62a)$$

т.е. параметры $\alpha_m(\ell) = \beta_m^*(\ell)$ ЭРФ в обеляющем РФ представляют собой (обобщенные) частные коэффициенты корреляции (PARCOR). Ниже показывается, что для них справедливы также формулы

$$\begin{aligned} \alpha_m(\ell) &= -a_1^{(m-1)}(\ell) \cdot \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{f}_\ell = \beta_m^*(\ell), \\ \beta_m(\ell) &= -b_{m-1}^{(m-1)}(\ell+1) \cdot \mathbf{a}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{f}_{m+\ell-1} = \alpha_m^*(\ell), \end{aligned} \quad (62b)$$

где $\mathbf{f}_v = \{\varphi_{iv}\}_{i=1}^N = \Phi \cdot \mathbf{e}_v$ – v -й столбец матрицы Φ .

Входящие в (62b) величины могут быть определены по завершении $(m-1)$ -го шага ОАЛ (41), позволяя тем самым выполнить его следующий $(m$ -й) шаг.

5. Сопоставим КМ

$$\Phi_{\mathbf{z}_m(\ell)} = \mathbf{z}_m(\ell) \cdot \mathbf{z}_m^*(\ell)$$

выходного вектора ℓ -го ($\ell \in 1, N+1-m$) ЭРФ m -й ($m \in 2, N$) ступени РФ

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_m(\ell) &= \begin{bmatrix} q_m(\ell) \\ p_m(\ell) \end{bmatrix} = s_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{z}}_m(\ell), \\ \tilde{\mathbf{z}}_m(\ell) &= \begin{bmatrix} \tilde{q}_m(\ell) \\ \tilde{p}_m(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_m^*(\ell) \\ \alpha_m(\ell) & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{y}_m(\ell) \end{aligned}$$

с **КМ** $\Phi_{y_m(\ell)}$ вектора $y_m(\ell) = \begin{bmatrix} q_{m-1}(\ell) \\ p_{m-1}(\ell+1) \end{bmatrix}$ на его входах (рис. 12).

В силу (57), (59) **КМ** последнего равна

$$\Phi_{y_m(\ell)} = \overline{y_m(\ell) \cdot y_m^*(\ell)} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_m^*(\ell) \\ -\alpha_m(\ell) & 1 \end{bmatrix},$$

поэтому **КМ** выходного вектора **ЭРФ**

$$\Phi_{z_m(\ell)} = s_m^2(\ell) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha_m^*(\ell) \\ \alpha_m(\ell) & 1 \end{bmatrix} \cdot \Phi_{y_m(\ell)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha_m^*(\ell) \\ \alpha_m(\ell) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_m^*(\ell) \\ \alpha_m(\ell) & 1 \end{bmatrix}$$

пропорциональна матрице

$$\Psi_{y_m(\ell)} = \Phi_{y_m(\ell)}^{-1} = s_m^2(\ell) \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha_m^*(\ell) \\ \alpha_m(\ell) & 1 \end{bmatrix},$$

обратной **КМ** его входного вектора. Тем самым N -входовой **обеляющий РФ** (рис. 13, а) N -мерного случайного вектора $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$ с нулевым средним и **КМ** (16а) строится из набора нормированных двухвходовых **обращающих ЭРФ** (рис. 12) с параметрами (59), (61).

Б. Свойства (57)–(61) обычно кладутся в основу методов оценивания параметров **адаптивных** обеляющих и обращающих **РФ** (**АРФ**), предназначенных для работы в типичных для практики условиях априорной неизвестности **КМ** (16а). В этих условиях важную роль играет корректный учет возможной априорной информации о специфике ее структуры и свойствах входного процесса, позволяющий повысить эффективность, в частности, быстроедействие адаптивной обработки. Во многих ситуациях на основе **АРФ** эта задача может быть решена проще и эффективнее, чем с помощью адаптивных фильтров другой структуры, в том числе показанных на рис. 7, 8. Проиллюстрируем эти возможности на нескольких примерах, активно используемых при последующем изложении.

3.5. ОФЛ и обеляющие РФ случайных процессов со спецификой структуры КМ

А. Пусть эрмитова **КМ** (16) персимметрична (симметрична относительно побочной диагонали) [8], т.е.

$$\Phi = \Pi_N \cdot \Phi^T \cdot \Pi_N = \Pi_N \cdot \Phi^{\sim} \cdot \Pi_N, \quad (63)$$

$$\Pi_N = \Pi_N^T, \quad \Pi_N \cdot \Pi_N = \mathbf{I}_N.$$

Здесь $\Pi_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_{N+1-i}^*$ — симметричная ортогональная $N \times N$ матрица с единицами на побочной диагонали и нулями в остальных позициях, $(^T)$ и (\sim) — символы транспонирования и комплексного сопряжения соответственно. В этом случае [11, 22, 23]

$$s_1(\ell) = s_1(N_\ell), \quad \ell \in 1, N, \quad \alpha_m(\ell) = \alpha_m(N_m + 1 - \ell), \quad (64)$$

$$m \in 2, N; \quad \ell \in 1, N_m; \quad N_k = N + 1 - k.$$

Тем самым попарное равенство элементов, симметрично расположенных относительно побочной диагонали персимметричной **КМ** (63), порождает попарные равенства (64) параметров **ЭРФ** m -й ($m \in 1, N$) ступени, симметрично расположенных относительно “центрального” **ЭРФ** этой ступени.

Б. Пусть эрмитова **КМ** (16) не только персимметрична, но и **теплицева** (равны все элементы, лежащие на одной и той же диагонали) [8, 9]. Такая матрица полностью определяется своим первым столбцом (корреляционной последовательностью (**КП**))

$$\mathbf{f}_1 = \eta \cdot \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} = \{\rho_t\}_{t=0}^{N-1}, \quad \rho_0 = 1, \quad (65a)$$

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ji}^* = \eta \cdot \rho_{i-j}, \quad (i \in 1, N; j \in 1, i),$$

а ее главные $m \times m$ ($m \in 1, N$) подматрицы равны и персимметричны:

$$\Phi^{(m)}(\ell) = \Phi^{(m)}(1) = \Phi^{(m)} = \{\Phi_{ij}\}_{i,j=1}^m = \Pi_m \cdot \Phi^{(m)\sim} \cdot \Pi_m, \quad (65b)$$

$$m \in 1, N; \quad \ell \in 1, N + 1 - m.$$

В этих условиях

$$\Psi^{(m)}(\ell) = \Psi^{(m)} = (\Phi^{(m)})^{-1} = \Pi_m \cdot \Psi^{(m)\sim} \cdot \Pi_m, \quad (66a)$$

откуда, в силу (36), (37), (42) [11, 22, 23]

$$\mathbf{b}_m^*(\ell) = \mathbf{b}_m^*(1) = \mathbf{b}_m^* = \mathbf{a}_m^T \cdot \Pi_m,$$

$$\omega_{11}^{(m)}(\ell) = \omega_{mm}^{(m)}(\ell) = \omega_{11}^{(m)}, \quad m \in 1, N; \quad \ell \in 1, N + 1 - m,$$

и, в соответствии с (62), (63),

$$\alpha_m(\ell) = \alpha_m = \frac{\omega_{m1}^{(m)}}{\omega_{11}^{(m)}} = -a_1^{(m-1)} \cdot \mathbf{b}_{m-1}^* \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(2) \cdot \boldsymbol{\rho} = \beta_m^*(\ell), \quad (66b)$$

$$m \in 1, N; \quad \ell \in 1, N + 1 - m.$$

Тем самым равенство элементов m -й диагонали теплицевой **КМ** порождает равенство параметров всех **ЭРФ** m -й ($m \in 2, N$) ступени. Представления (54в), (54г) совпадают при этом с классической факторизацией **Н. Левинсона**, что объясняет их название (**ОФЛ**) для матриц общего вида.

В. Пусть теплицева **КМ** определяется гауссовой **КП** (65а) с элементами

$$\rho_t = r^{t^2} \cdot e^{j\omega_0 t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (67)$$

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_1 = r \cdot e^{j\omega_0}, \quad r < 1.$$

Процессы с такой **КМ** широко используются, в частности, в качестве моделей междупериодных флуктуаций пассивных помех в импульсных **РЛС** с постоянным интервалом зондирования [31, 33, 40]. В этом случае вся **КМ** определяется модулем r и фазой ω_0 только первого элемента ρ_1 **КП** (67). Этот же элемент определяет и параметры всех **ЭРФ**. Нетрудно показать [56], что в условиях (67)

$$\alpha_2 = -\rho_1, \quad \alpha_{m+1} = \alpha_2^m = \alpha_2 \cdot \alpha_2^{m-1} = \alpha_2 \cdot \alpha_m, \quad (68)$$

$$m \geq 2.$$

Из (68) следует, что гауссова **КП** (67) порождает экспоненциальную (по модулю) последовательность частных коэффициентов корреляции α_m .

Г. Процесс с **КП** (67) – “предельный” частный случай стационарного процесса **авторегрессии (АР)** порядка $p \rightarrow \infty$. В общем случае стационарных (с **теплицевой КМ**) процессов **АР** конечного порядка $p \geq 1$ элементы **КП** удовлетворяют рекуррентному соотношению [41, 42]

$$\rho_t = \sum_{i=1}^p \chi_i \rho_{t-i}, \quad t \geq 1,$$

или, в матричной записи,

$$\mathbf{E}_{m-1}^* \cdot \mathbf{p} = \mathbf{E}_{m-1}^* \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_p \cdot \mathbf{E}_p(1) \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad (69)$$

где $\boldsymbol{\chi} = \{\chi_i\}_{i=1}^p$ – p -мерный вектор коэффициентов процесса **АР** порядка $p \geq 1$.

В соответствии с (66б), (32), в этом случае

$$\begin{aligned} \alpha_m &= -a_1^{(m-1)} \cdot \mathbf{b}_{m-1}^* \cdot \mathbf{E}_{m-1}^* \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_p(1) \cdot \boldsymbol{\chi} = \\ &= -a_1^{(m-1)} \cdot \mathbf{e}_{m-1}^{(N)*} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{E}_p(1) \cdot \boldsymbol{\chi}, \end{aligned}$$

откуда, используя (34), получим, что

$$\alpha_m = -a_1^{(m-1)} \cdot \mathbf{h}_{m-1}^*(p) \cdot \boldsymbol{\chi}, \quad (70)$$

где $\mathbf{h}_{m-1}^*(p) = \mathbf{e}_{m-1}^{(N)*} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}_p(1)$ – строка из p первых элементов $(m-1)$ -й строки **верхней** треугольной $N \times N$ матрицы \mathbf{H}^* . Поэтому при $N \geq m > p+1$ она равна p -мерной нулевой строке, так что

$$\alpha_m = \beta_m = 0, \quad s_m = c_m = 1, \quad N \geq m > p+1, \quad (71)$$

а строки \mathbf{b}_m^* и \mathbf{a}_m^* в силу **ОАЛ** (41) в условиях (66б) **теплицевой КМ** равны

$$\mathbf{b}_m^* = (0, \mathbf{b}_{m-1}^*), \quad \mathbf{a}_m^* = (\mathbf{a}_{m-1}^*, 0), \quad N \geq m > p+1. \quad (72)$$

Определяемые ими матрицы $\mathbf{H} = \mathbf{H}_b$ и $\mathbf{N}^* = \mathbf{N}_b^*$ в этом случае являются ленточными (*band*) нижней и верхней треугольными матрицами соответственно с шириной ленты $zz = p+1$, а матрица

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \mathbf{H}_b^* \cdot \mathbf{H}_b = \mathbf{N}_b \cdot \mathbf{N}_b^* = \boldsymbol{\Psi}_b \quad (73)$$

– эрмитовой ленточной с шириной ленты $2 \cdot zz - 1 = 2 \cdot p + 1$ (рис. 16), что хорошо известно из теории стационарных дискретных процессов **АР**.



Рис. 16. Ленточные треугольные **верхне-нижнее** и **нижне-верхнее** разложения матрицы $\boldsymbol{\Psi}_b$

В условиях (71), (72) **МИХ** \mathbf{W}_1 (54в) ($\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1^*$ (54г)) содержат только $m = p+1$ первых (последних) “значащих” (изменяющих значения входных величин) сомножителей, а **РФ** (рис. 13) – только $m = p+1$ ступеней. Пример $N = 8$ – входового **РФ** для процессов **АР** порядка $p = 2$ показан на рис. 17, а.

Во взаимном соответствии этих **МИХ** и схем **РФ** (рис. 17) легко убедиться, проследивая количество и расположение компонент входного вектора **РФ**, “участвующих в формировании” соответствующей компоненты выходного вектора.

Так, в **РФ** (рис. 17, а) первая (p_1) и вторая (p_2) компоненты (p -компоненты) выходного вектора формируются соответственно первой (u_1) и парой (u_1, u_2) компонент входного вектора, а компоненты p_k ($k \in 3, N$), начиная с третьей, образованы комбинацией k -й (u_k) и двух “предшествующих” компонент u_{k-2}, u_{k-1} входного вектора, что и должно быть при нижней треугольной ленточной **МИХ** \mathbf{H} с шириной ленты $zz = 3$ в (21а). Точно так же компоненты q_k ($k \in 1, N-2$) выходного вектора (q -компоненты), кроме двух последних, образованы комбинацией только k -й (u_k) и двух “последующих” компонент u_{k+1}, u_{k+2} входного вектора, что и должно быть при верхней треугольной ленточной **МИХ** \mathbf{N}^* с шириной ленты $zz = 3$ в (23а).

Таким же способом легко убедиться, что объединение (рис. 18) “укороченных” **РФ** (рис. 17) порождает **обращающий** фильтр с эрмитовой ленточной **МИХ** $\boldsymbol{\Psi}_b$ (73), в данном примере – процесса **АР** порядка $p = 2$ с шириной ленты $2 \cdot zz - 1 = 2 \cdot p + 1 = 5$.

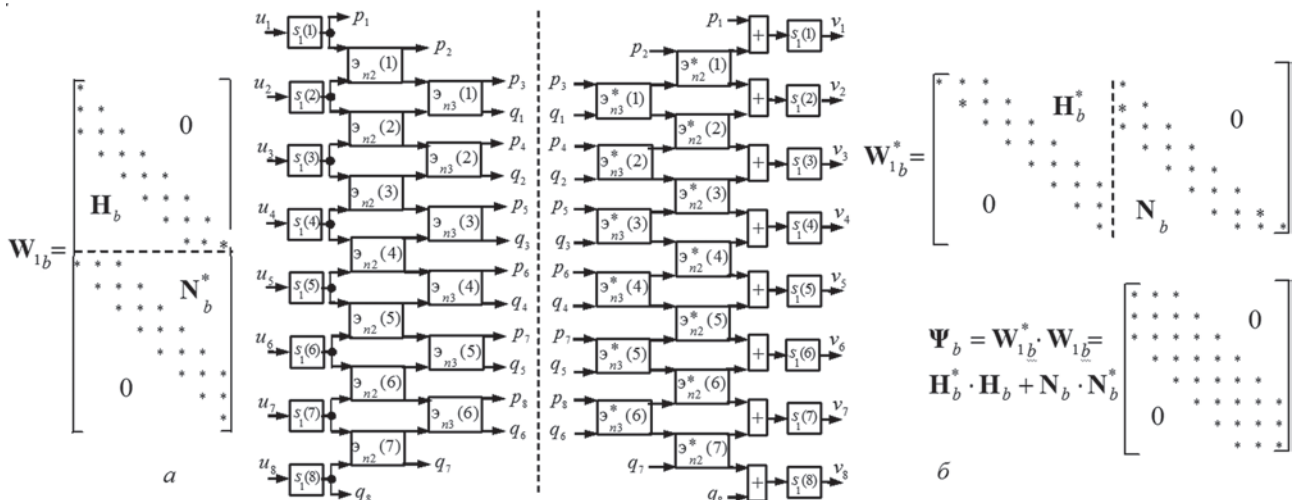


Рис. 17. Решетчатые фильтры с ленточными **МИХ**

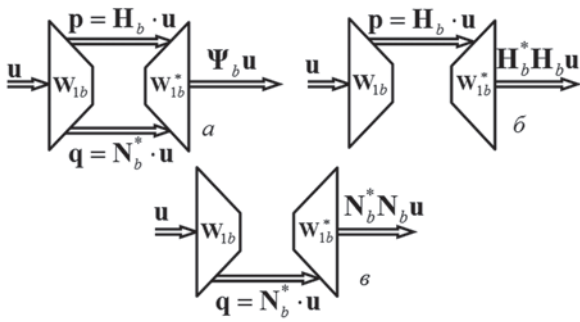


Рис. 18. Фильтры с эрмитовыми ленточными РФ

Подобный показанному на рис. 17, a zz -ступенчатый РФ не обелит точно стационарный (с теплицевой КМ) процесс АР порядка $p > zz - 1$ или произвольный нестационарный процесс (с КМ общего вида), поэтому в соответствующих условиях он может рассматриваться как **квазиобеляющий**. По этой же причине РФ рис. 18, в этих условиях не способные в точности обратить КМ, называются **квазиобращающими**. В силу практической важности ниже они рассматриваются более подробно.

3.6. Решетчатые фильтры с ленточными МИХ

А. Ленточные структуры треугольных МИХ “укороченных” РФ (рис. 17) и эрмитовых МИХ их объединений (рис. 18) не зависят от численных значений сомножителей ОФЛ (54в) или, что эквивалентно, нормирующих множителей $s_1(\ell)$ первой ступени и параметров ЭРФ последующих ступеней РФ (рис. 13, a , 17, a). Заданием параметров ЭРФ

$$\alpha_m(\ell) = \beta_m^*(\ell) = 0, \quad s_m(\ell) = c_m(\ell) = 1, \quad (74)$$

$$m > zz, \quad zz < N, \quad \ell \in 1, N + 1 - m,$$

независимо от их значений при $m \leq zz$ обеспечиваются ленточность с шириной ленты zz треугольных блоков МИХ этих РФ и эрмитовых с шириной $2 \cdot zz - 1$ ленты МИХ их объединений рис. 18, поскольку в этом случае (см. (41))

$$\mathbf{b}_{zz+t}^*(\ell) = \{0, \mathbf{b}_{zz+t-1}^*(\ell + 1)\},$$

$$\mathbf{a}_{zz+t}^*(\ell) = \{\mathbf{a}_{zz+t-1}^*(\ell), 0\}, \quad (75)$$

$$t \in 1, N - zz; \quad \ell \in 1, N + 1 - zz - t.$$

Следствиями (75), вытекающими из определений (48), являются равенства

$$p_{zz+t}(1) = \mathbf{b}_{zz}^*(t+1) \cdot \mathbf{u}^{(zz)}(t+1),$$

$$q_{zz+t}(v_{zz} - t) = \mathbf{a}_{zz}^*(v_{zz} - t) \cdot \mathbf{u}^{(zz)}(v_{zz} - t), \quad (76)$$

$$v_{zz} = N + 1 - zz$$

для ошибок $p_{zz+t}(1)$ и $q_{zz+t}(v_{zz} - t)$ предсказания компонент u_{zz+t} и $u_{v_{zz}-t}$ входного вектора $\mathbf{u} = \{u_\ell\}_{\ell=1}^N$, которые в условиях (74), (75), как видно из (76), формируются линейной комбинацией не $zz + t - 1$ его предыдущих и последующих компонент, а фиксированным числом $zz - 1$ этих компонент.

Если при этом для строк $\mathbf{b}_m^*(\ell)$, $\mathbf{a}_m^*(\ell)$ ($m \in 1, zz; \ell \in 1, N + 1 - m$) дополнительно справедливы равенства (42) или, что эквивалентно, параметры ЭРФ этих ступеней РФ (рис. 17) совпадают с (57)–(63), то эрмитова ленточная с шириной ленты $2 \cdot zz - 1$ МИХ РФ рис. 18 соответствует оптимальной (максимально энтропийной) аппроксимации Дима – Гохберга [57] исходного нестационарного процесса (с КМ общего вида) нестационарным (с переменными во времени параметрами) процессом АР $(zz - 1)$ -го порядка – так называемым time-varying autoregressive (TVAR) процессом, введенным Ю.И. Абрамовичем [58–60]. Такая оптимальность эквивалентна тому, что дисперсии $\overline{p_{zz+t}(1)}^2$ и $\overline{q_{zz+t}(v_{zz} - t)}^2$ ошибок предсказания (76) минимальны по сравнению с дисперсиями $|\xi|^2$ и $|\varepsilon|^2$ ошибок $\xi = \mathbf{k}_{zz}^* \cdot \mathbf{u}^{(zz)}(t+1)$ и $\varepsilon = \mathbf{g}_{zz} \cdot \mathbf{u}^{(zz)}(v_{zz} - t)$ линейных комбинаций при любых zz -мерных весовых векторах $\mathbf{k}_{zz}^* = \{k_\ell\}_{\ell=1}^{zz} \neq \mathbf{b}_{zz}^*(t+1)$ и $\mathbf{g}_{zz} = \{g_\ell\}_{\ell=1}^{zz} \neq \mathbf{a}_{zz}^*(v_{zz} - t)$ с $k_{zz} = b_{zz}^{(zz)}(t+1)$ и $g_1 = a_1^{(zz)}(v_{zz} - t)$. Эти дисперсии в общем случае, естественно, не меньше, чем в “полном” N -входовом РФ (рис. 13) (при $zz = N$ в (74)), однако разница может быть небольшой даже при сравнительно малых по сравнению с N значениями zz , что ниже демонстрируется на ряде иллюстративных примеров [22, 25, 61].

Б. Сравним вначале дисперсию $\sigma_p^2 = \overline{p_{zz+t}^2}$ ошибки предсказания

$$\tilde{p}_{zz+t}(1) = \tilde{\mathbf{b}}_{zz}^*(t+1) \cdot \mathbf{u}^{(zz)}(t+1), \quad (77)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}_{zz}^*(t+1) = \mathbf{b}_{zz}^*(t+1) / b_{zz}^{(zz)}(t+1), \quad \tilde{b}_{zz}^{(zz)}(t+1) = 1$$

невзвешенной последней компоненты u_{zz+t+1} вектора $\mathbf{u}^{(zz)}(t+1)$ с ее дисперсией $\sigma_u^2 = \overline{u_{zz+t+1}^2} = \varphi_{zz+t+1, zz+t+1}$ для теплицевой КМ (п. 2.5.Б). В этом случае, как следует из (42а), (44), (61), (65), (66), (77),

$$\sigma_u^2 = \eta,$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{(b_{zz}^{(zz)}(1))^2} = \frac{1}{s_1^2 \cdot \prod_{m=2}^{zz} s_m^2} = \eta \cdot \prod_{m=2}^{zz} (1 - |\alpha_m|^2),$$

поэтому отношение этих дисперсий (коэффициент подавления)

$$k_{\Pi}(zz) = \sigma_u^2 / \sigma_p^2 = 1 / \prod_{m=2}^{zz} (1 - |\alpha_m|^2). \quad (78)$$

В частности, для гауссовой КП (67), когда справедливы равенства (68),

$$k_{\Pi}(zz) = \sigma_u^2 / \sigma_p^2 = 1 / \prod_{m=2}^{zz} (1 - |r^2|^{m-1}). \quad (79)$$

Рассчитанные по (79) семейства зависимости $k_{\Pi}(zz)$ (в дБ) при различных значениях модуля r коэффициента корреляции (67) приведены штриховыми кривыми на рис. 19 [56].

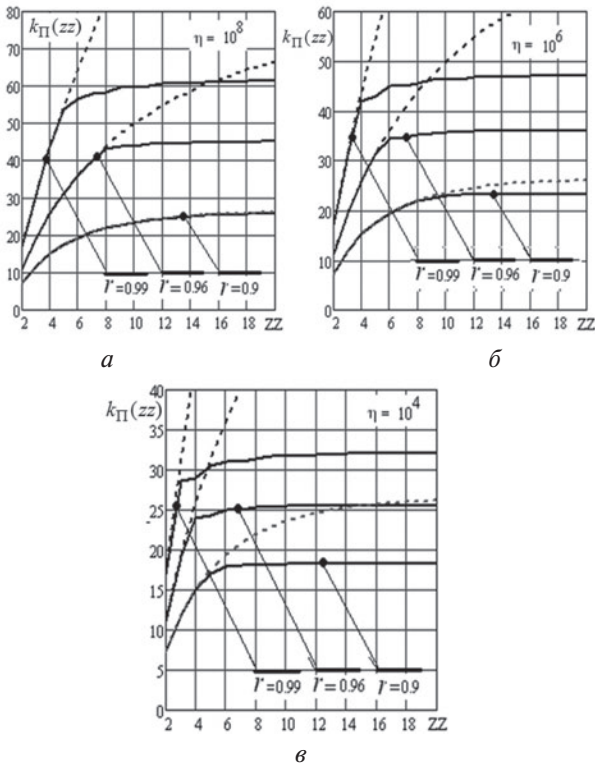


Рис. 19. Коэффициент подавления $k_{\Pi}(zz)$ процесса с гауссовой КП ($p \rightarrow \infty$)

Сплошные кривые на этих рисунках получены по общей формуле (78) для теплицевых КМ вида

$$\Phi = \mathbf{I}_N + \eta \cdot \rho_T, \quad \rho_T = \left\{ \rho_{ij}^{(T)} \right\}, \quad (80)$$

$$\rho_{ij}^{(T)} = \rho_{i-j}, \quad \rho_0 = 1,$$

соответствующих аддитивной смеси белого шума с принятой за единицу дисперсией (мощностью), и анализируемого стационарного процесса с гауссовой КП (67). Действительный скаляр $\eta \geq 0$ в (80) и на рис. 19 имеет смысл относительной (по отношению к мощности шума) мощности входного процесса (ОПШ).

Как следует из рисунка, даже в рассматриваемых условиях стационарного АР процесса порядка $p \rightarrow \infty$ рост ширины ленты треугольных МИХ рис. 16 (числа ступеней РФ рис. 17, а) сопровождается заметным ростом $k_{\Pi}(zz)$ только при относительно больших коэффициентах корреляции $r \geq 0.96$ и в нереальных условиях отсутствия шума (штриховые кривые). В присутствии шума даже относительно невысокого уровня усложнение РФ за счет увеличения числа его ступеней выше $zz = 4, 5$, незначительно увеличивает предельный уровень $k_{\Pi}(zz)$ (сплошные кривые) и потому может быть практически неоправданным (для повышения степени подавления помех).

Этот вывод остается справедливым и при использовании другого критерия эффективности – отношения сигнал/ (помеха + шум) (ОСПШ) [37]

$$\mu(zz, f) = h \cdot \frac{|\mathbf{r}^*(zz, f) \cdot \mathbf{x}(f)|^2}{\mathbf{r}^*(zz, f) \cdot \Phi \cdot \mathbf{r}(zz, f)}, \quad (81)$$

на выходе линейного тракта обнаружителя (рис. 2, б) с импульсной характеристикой (ИХ)

$$\mathbf{r}(zz, f) = \Psi_b(zz) \cdot \mathbf{x}(f), \quad (82)$$

полученной заменой в оптимальной ИХ $\mathbf{r}(\alpha)$ (10) матрицы Ψ на ленточную матрицу $\Psi_b(zz)$.

На рис. 20 показаны зависимости ОСПШ (81) от нормированного к частоте зондирования (доплеровского) сдвига частоты f сигнала с интенсивностью $h=1$ при различном числе ступеней zz в $N=50$ – входном РФ (рис. 18) в условиях помех с КМ вида (80) с гауссовой КП (67) и ОПШ $\eta=60$ дБ.

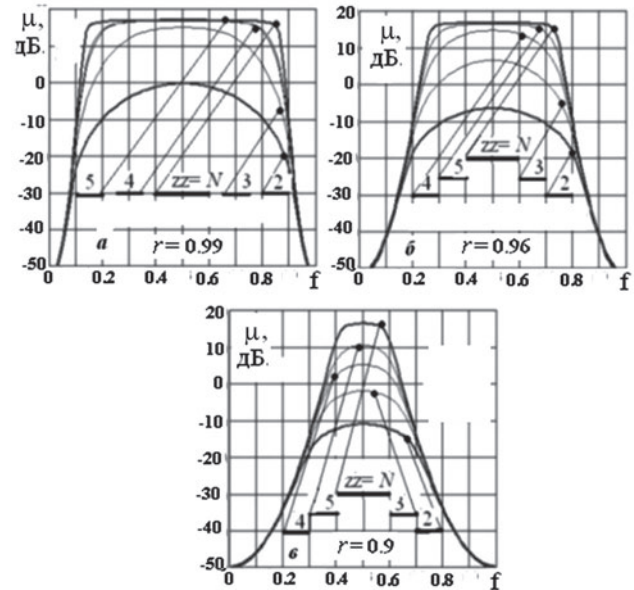


Рис. 20. Энергетические характеристики линейных трактов (рис. 2) с ИХ (82) ($N=50, \eta=60$ дБ)

Видно, что связанные с переходом к ленточным МИХ рис. 16 (“укороченным” РФ рис. 17, 18) потери по сравнению с потенциальными значениями ОСПШ даже в рассматриваемых условиях интенсивных АР помех порядка $p \rightarrow \infty$ невелики уже при $zz = 4, 5$. Они будут еще меньше в условиях менее интенсивных помех, допускающих аппроксимацию АР процессами конечного и часто – невысокого порядка p .

Эти потери с лихвой компенсируются заметным упрощением по сравнению с “полным” РФ ($zz = N$), который оптимизирует линейный тракт (рис. 20) обработки когерентного сигнала (82) на фоне гауссовых помех и обеспечивает максимальное ОСПШ

$$\mu(N, f) = h \cdot \mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi_b(N) \cdot \mathbf{x}(f) = h \cdot \mathbf{x}^*(f) \cdot \Psi \cdot \mathbf{x}(f). \quad (83)$$

В типичных для практики условиях параметрической априорной неопределенности адаптивные квазиобеляющие или квазиобрашающие РФ с числом ступеней $zz < N$, параметрами которых служат те или иные их оценки, полученные по классифицированным обучающим выборкам помех неизбежно конечного и часто – достаточно малого объема, могут быть не только проще, но и эффективнее адаптивных обеляющих или

обращающих $\mathbf{P}\Phi$ с $zz = N$ степенями [22, 25, 61]. Этому практически важному вопросу в данном сборнике посвящена специальная статья.

4. ДВУМЕРНЫЕ И МНОГОМЕРНЫЕ РЕШЕТЧАТЫЕ ФИЛЬТРЫ

Во многих задачах пространственно-временной обработки удобно представлять входные воздействия и их \mathbf{KM} в блочном виде, отражающем, в частности, различную физическую, пространственную, временную и т. п. природу элементов различных блоков.

Хорошо известным примером являются системы междупериодной обработки (МПО) сигналов на фоне пассивных помех в импульсных РЛС с попачечным изменением (вобуляцией) интервалов зондирования (ПВИЗ), в которых периодически излучаются $N = n_1 \cdot n_2$ – мерные когерентные пакеты зондирующих радиоимпульсов, составленные из n_1 пачек с n_2 элементами в каждой [33]. Временные интервалы между импульсами каждой n_2 – элементной пачки постоянны, но различны в разных пачках. В этом случае $N = n_1 \cdot n_2$ – мерные векторы $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N$ комплексных амплитуд отражений каждого элемента разрешения можно представить блочным вектором $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_p\}_{p=1}^{n_1}$, составленным из n_1 блоков $\mathbf{u}_p = \{u_{\ell}^{(p)}\}_{\ell=1}^{n_2}$ ($p \in 1, n_1$) размера n_2 . Их \mathbf{KM} $\Phi = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^N = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^*$ может при этом рассматриваться как блочная матрица $\Phi = \{\Phi_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$ с блоками $\Phi_{pq} = \{\phi_{\ell t}^{(p,q)}\}_{\ell,t=1}^{n_2} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q^*$ ($p, q \in 1, n_1$) с теплицевыми диагональными блоками

$$\Phi_{pp} = \{\phi_{\ell t}^{(p,p)}\}_{\ell,t=1}^{n_2} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p^*.$$

Разновидностью ПВИЗ в импульсных РЛС является внутривпачечная вобуляция интервалов зондирования (ВПВИЗ), при которой временные интервалы между m импульсами каждой пачки различны (вобулированы), но закон вобуляции одинаков во всех n пачках. При том же разбиении входного $N = n_1 \cdot n_2$ – мерного вектора его \mathbf{KM} $\Phi = \{\Phi_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$ имеет нетеплицевы, но одинаковые $n_2 \times n_2$ диагональные блоки

$$\Phi_{pp} = \{\phi_{\ell t}^{(p,p)}\}_{\ell,t=1}^{n_2} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p^* \text{ при всех } p \in 1, n_1.$$

Естественная блочная структура векторов и матриц возникает в пространственно-многоканальных РЛС (в частности, с линейными, плоскими или объемными ФАР) с произвольными интервалами зондирования, с ПВИЗ или ВПВИЗ и т.д. Для учета специфики структуры пространственных каналов приема и (или) закона зондирования здесь может быть полезно разбить каждый блок на блоки меньшего размера, придя к **многоуровневым** векторам и матрицам [9].

Так, блоки могут образовывать $N \cdot m_1$ – мерные векторы комплексных амплитуд $N = n_1 \cdot n_2$ импульсов пачки каждого элемента дистанции m_1 пространственных каналов приема из обще-

го числа $M = m_1 \cdot m_2$ таких каналов. Такому разбиению соответствует блочная (двухуровневая) \mathbf{KM} $\Phi = \{\Phi_{pq}\}_{p,q=1}^{m_2}$, образованная m_2^2 блоками $\Phi_{pq} = \{\phi_{\ell t}^{(p,q)}\}_{\ell,t=1}^{N \cdot m_1} = \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_q^*$ размера $N \cdot m_1 \times N \cdot m_1$. Каждый из этих блоков может быть разбит на m_1^2 $N \times N$ – мерных блоков, что делает исходную $M \cdot N \times M \cdot N$ – мерную \mathbf{KM} «дважды блочной» (трехуровневой). В свою очередь, соответствующие $N \times N$ блоки аналогичным способом могут разбиваться на n_1^2 блоков размера $n_2 \times n_2$, что делает исходную $M \cdot N \times M \cdot N$ – мерную \mathbf{KM} «трижды блочной» (четырёхуровневой), и т. д. Как число уровней \mathbf{KM} , так и число, размерность и структура образующих ее блоков могут меняться в широких пределах за счет выбора размеров блоков и состава включаемых в них элементов. При этом различные блоки могут иметь разные размеры и могут не быть квадратными.

При многоуровневом представлении \mathbf{KM} можно получить и многоуровневые обеляющие (квазиобеляющие) и обращающие (квазиобращающие) фильтры, в том числе соответствующие «многомерные» $\mathbf{P}\Phi$, которые синтезируются ниже. При этом показывается, что в многомерные $\mathbf{P}\Phi$, подобно «матрешке», вложены все $\mathbf{P}\Phi$ меньшей мерности, включая рассмотренные выше «одномерные» $\mathbf{P}\Phi$. Механизм такого «вложения» одинаков для $\mathbf{P}\Phi$ произвольной мерности и совпадает с механизмом вложения одномерных $\mathbf{P}\Phi$ в двумерные. Это позволяет ограничиться только синтезом последних. Синтез соответствующих двумерных $\mathbf{P}\Phi$ базируется на «обобщенной блочной факторизации Левинсона» (ОБФЛ), вытекающей из выводимого ниже «обобщенного блочного алгоритма Левинсона» (ОБАЛ), частными случаями которых являются ОФЛ (51), (54) и ОАЛ (41).

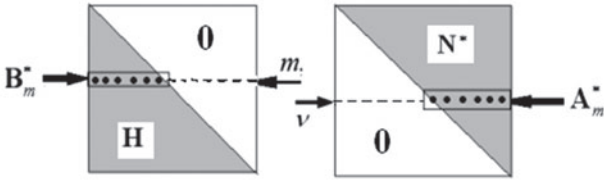
4.1. Обобщенный блочный алгоритм Левинсона (БАЛ)

А. Начнем со случая, когда $N = n_1 \cdot n_2$, и $N \times N$ \mathbf{KM} $\Phi = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{\Phi_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$, обратная ей матрица $\Psi = \{\omega_{ij}\}_{i,j=1}^N = \{\omega_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1} = \Phi^{-1}$ и ее треугольные сомножители (20) $\mathbf{H} = \{h_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$ и $\mathbf{N} = \{n_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$ заданы $n_1 \times n_1$ блочными матрицами с $n_2 \times n_2$ блоками $\phi_{pq} = \{\phi_{\ell t}^{(p,q)}\}_{\ell,t=1}^{n_2}$, $\omega_{pq} = \{\omega_{\ell t}^{(p,q)}\}_{\ell,t=1}^{n_2}$,

$$\begin{aligned} h_{pq} &= \{h_{\ell t}^{(p,q)}\}_{\ell,t=1}^{n_2}, & n_{pq} &= \{n_{\ell t}^{(p,q)}\}_{\ell,t=1}^{n_2}, \\ h_{pq} &= n_{pq} = \mathbf{0} & \text{при } q > p, & p, q \in 1, n_1. \end{aligned} \quad (84)$$

Эти подлежащие отысканию треугольные сомножители полностью определяются набором m – мерных ($m \in 1, n_1$) блочных строк (рис. 21)

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m^* &= \{\mathbf{b}_i^{(m)}\}_{i=1}^m, & \mathbf{b}_i^{(m)} &= \mathbf{h}_{mi}, \\ \mathbf{A}_m^* &= \{\mathbf{a}_i^{(m)}\}_{i=1}^m, & \mathbf{a}_i^{(m)} &= \mathbf{n}_{v+i-1, v}^*, \\ & & v &= n_1 + 1 - m, \quad i \in 1, m, \end{aligned} \quad (85)$$


 Рис. 21. Определяющие строки матриц \mathbf{H} и \mathbf{N}^*

образованных m первыми $n_2 \times n_2$ блоками \mathbf{h}_{mi} m -й блочной строки нижней треугольной матрицы \mathbf{H} и m последними $n_2 \times n_2$ блоками $\mathbf{n}_{v+i-1, v}$ $v = (n_1 + 1 - m)$ -й блочной строки верхней треугольной матрицы \mathbf{N}^* .

Практически дословно повторяя рассуждения п. 2.3 для блочных матриц и векторов, можно показать, что эти определяющие строки равны (см. (37))

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m^* &= \mathbf{B}_m^*(1) = (\mathbf{b}_m^{(m)}(1))^{-*} \cdot \Psi_m^{(m)*}(1), \\ \mathbf{A}_m^* &= \mathbf{A}_m^*(v) = (\mathbf{a}_1^{(m)}(v))^{-*} \cdot \Psi_1^{(m)*}(v), \\ v &= n_1 + 1 - m, \quad m \in 1, n_1, \\ \mathbf{c}^{-*} &= (\mathbf{c}^{-1})^* = (\mathbf{c}^*)^{-1}, \end{aligned} \quad (86)$$

где $\Psi_i^{(m)*}(\ell) = \{\omega_{iq}^{(m)}(\ell)\}_{q=1}^m$ — i -я ($i \in 1, m$) блочная строка $m \times m$ блочной матрицы

$$\begin{aligned} \Psi^{(m)}(\ell) &= \{\omega_{pq}^{(m)}(\ell)\}_{p,q=1}^m = \mathbf{H}^{(m)*}(\ell) \cdot \mathbf{H}^{(m)}(\ell) = \\ &= \mathbf{N}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{N}^{(m)*}(\ell) = (\Phi^{(m)}(\ell))^{-1}, \end{aligned} \quad (87)$$

обратной ℓ -й ($\ell \in 1, v$) главной $m \times m$ подматрице

$$\begin{aligned} \Phi^{(m)}(\ell) &= \{\phi_{pq}^{(m)}(\ell)\}_{p,q=1}^m = \{\phi_{pq}\}_{p,q=\ell}^{m+\ell-1} = \\ &= \mathbf{E}_m^{(n_1)*}(\ell) \cdot \Phi \cdot \mathbf{E}_m^{(n_1)}(\ell) \end{aligned} \quad (88)$$

исходной КМ $\Phi = \{\phi_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$. Через $\mathbf{E}_m^{(n_1)}(\ell)$ здесь обозначена блочная $n_1 \times m$ матрица, составленная из m смежных блочных столбцов, начиная с ℓ -го ($\ell \in 1, v$), единичной блочной матрицы

$$\mathbf{I}_{be} = \{\mathbf{I}_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}, \quad \mathbf{I}_{pq} = \begin{cases} \mathbf{I}_{n_2}, & p = q, \\ \mathbf{0}_{n_2}, & p \neq q, \end{cases} \quad (89)$$

$p, q \in 1, n_1,$

где \mathbf{I}_{n_2} и $\mathbf{0}_{n_2}$ — $n_2 \times n_2$ единичная и нулевая матрицы соответственно.

Поскольку, как следует из (86),

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_m^{(m)*}(1) \cdot \mathbf{b}_m^{(m)}(1) &= \omega_{mm}^{(m)}(1), \\ \mathbf{a}_1^{(m)*}(v) \cdot \mathbf{a}_1^{(m)}(v) &= \omega_{11}^{(m)}(v), \end{aligned} \quad (90)$$

искомые строки матриц \mathbf{H} и \mathbf{N} можно в принципе получить, обращая главные подматрицы $\Phi^{(m)}(1)$ и $\Phi^{(m)}(n_1 + 1 - m)$ всех блочных порядков $m \in 1, n_1$.

Б. В блочном алгоритме Левинсона (БАЛ) эта задача решается более рационально. В нем рекуррентно отыскиваются $m \in 2, n_1$ -мерные блочные строки

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m^*(\ell) &= (\mathbf{b}_m^{(m)}(\ell))^{-*} \cdot \Psi_m^{(m)*}(\ell), \\ \mathbf{b}_m^{(m)*}(\ell) \cdot \mathbf{b}_m^{(m)}(\ell) &= \omega_{mm}^{(m)}(\ell), \\ \mathbf{A}_m^*(\ell) &= (\mathbf{a}_1^{(m)}(\ell))^{-*} \cdot \Psi_1^{(m)*}(\ell), \\ \mathbf{a}_1^{(m)*}(\ell) \cdot \mathbf{a}_1^{(m)}(\ell) &= \omega_{11}^{(m)}(\ell), \\ \ell \in 1, v &= n_1 + 1 - m, \quad m \in 1, n_1, \end{aligned} \quad (91)$$

первая из которых при $\ell = 1$ определяет m -ю блочную строку матрицы \mathbf{H} , а вторая при $\ell = v$ — соответствующую v -ю блочную строку матрицы \mathbf{N}^* . Остальные ($\ell \in 2, v-1$) строки «заготавливаются впрок» для последующих рекурсий. Строки (91), в свою очередь, определяются первой и последней m -мерными блочными строками матрицы $\Psi^{(m)}(\ell)$ (87), что иллюстрируется рис. 22.

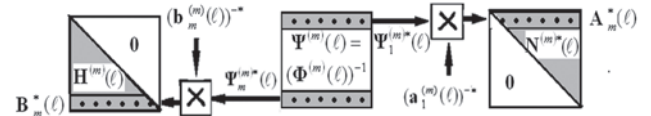


Рис. 22. Связь строк (91) с первой и последней строками матрицы (87)

В основе рекурсий БАЛ лежат связи $m \in 2, n_1$ -мерных первой и последней блочных строк матрицы $\Psi^{(m)}(\ell)$ (87) с аналогичными $(m-1)$ -мерными блочными строками, которые в сочетании с начальными (при $m = 1$) значениями $n_2 \times n_2$ матриц $\mathbf{b}_1^{(1)}(\ell) = \mathbf{a}_1^{(1)}(\ell)$, в силу (91) удовлетворяющих равенствам (см. 44)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1^{(1)*}(\ell) \cdot \mathbf{b}_1^{(1)}(\ell) &= \mathbf{a}_1^{(1)*}(\ell) \cdot \mathbf{a}_1^{(1)}(\ell) = \omega_{11}^{(1)}(\ell) = \Phi_{\ell\ell}^{-1}, \\ \ell \in 1, n_1, \end{aligned} \quad (92a)$$

$$\mathbf{h}_{11} = \mathbf{b}_1^{(1)}(1), \quad \mathbf{n}_{n_1 n_1} = \mathbf{a}_1^{(1)*}(n_1), \quad (92b)$$

позволяют рекуррентно определить все строки (85) и, тем самым, треугольные сомножители матрицы $\Psi = \Phi^{-1}$ и эту матрицу в целом.

В. Эти связи найдем, представляя КМ $\Phi^{(m)}(\ell)$ (88) в формах

$$\Phi^{(m)}(\ell) = \begin{bmatrix} \Phi^{(m-1)}(\ell) & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^* & \Phi_{mm}^{(m)}(\ell) \\ \Phi_{11}^{(m)}(\ell) & \mathbf{Y}^* \\ \mathbf{Y} & \Phi^{(m-1)}(\ell+1) \end{bmatrix}, \quad (93)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{F}_{m+\ell-1}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{F}_\ell,$$

$\mathbf{F}_k = \{\phi_{ik}\}_{i=1}^{n_1}$, $k \in 1, n_1$, $m \in 2, n_1$, $\ell \in 1, v = n_1 + 1 - m$ с эрмитовыми невырожденными (обратимыми) и п.о. диагональными блоками.

Обратная (93) матрица в этом случае допускает известные представления [8]

$$\Psi^{(m)}(\ell) = \begin{bmatrix} \Psi^{(m-1)}(\ell) + \mathbf{V} \cdot \omega_{mm}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{V}^* & -\mathbf{V} \cdot \omega_{mm}^{(m)}(\ell) \\ -\omega_{mm}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{V}^* & \omega_{mm}^{(m)}(\ell) \\ \omega_{11}^{(m)}(\ell) & -\omega_{11}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{W}^* \\ -\mathbf{W} \cdot \omega_{11}^{(m)}(\ell) & \Psi^{(m-1)}(\ell+1) + \mathbf{W} \cdot \omega_{11}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{W}^* \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \Psi^{(m-1)}(\ell) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{F}_{m+\ell-1} = \Psi^{(m-1)}(\ell) \cdot \mathbf{X}, \\ \boldsymbol{\omega}_{mm}^{(m)}(\ell) &= \left(\boldsymbol{\Phi}_{mm}^{(m)}(\ell) - \mathbf{X}^* \cdot \Psi^{(m-1)}(\ell) \cdot \mathbf{X} \right)^{-1}, \\ \mathbf{W} &= \Psi^{(m-1)}(\ell+1) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{F}_\ell, \\ \boldsymbol{\omega}_{11}^{(m)}(\ell) &= \left(\boldsymbol{\Phi}_{11}^{(m)}(\ell) - \mathbf{Y}^* \cdot \Psi^{(m-1)}(\ell+1) \cdot \mathbf{Y} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (94)$$

которые можно переписать также в виде

$$\Psi^{(m)}(\ell) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \Psi^{(m-1)}(\ell) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{V} \\ \mathbf{I}_{n_2} \end{bmatrix} \cdot \Psi_m^{(m)*}(\ell), \\ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Psi^{(m-1)}(\ell+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n_2} \\ -\mathbf{W} \end{bmatrix} \cdot \Psi_1^{(m)*}(\ell), \end{cases} \quad (95a)$$

где, в соответствии с (94),

$$\begin{aligned} \Psi_m^{(m)*}(\ell) &= \left\{ -\boldsymbol{\omega}_{mm}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{V}^*, \boldsymbol{\omega}_{mm}^{(m)}(\ell) \right\}, \\ \Psi_1^{(m)*}(\ell) &= \left\{ \boldsymbol{\omega}_{11}^{(m)}(\ell), -\boldsymbol{\omega}_{11}^{(m)}(\ell) \cdot \mathbf{W}^* \right\} \end{aligned} \quad (95b)$$

— последняя и первая строки матрицы $\Psi^{(m)}(\ell)$.

Из (95a) в сочетании с (93), (91) следует, что

$$\Psi_m^{(m)*}(\ell) = \left(\mathbf{0}, \Psi_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1) \right) + \delta \cdot \Psi_1^{(m)*}(\ell), \quad (96a)$$

$$\Psi_1^{(m)*}(\ell) = \left(\Psi_1^{(m-1)*}(\ell), \mathbf{0} \right) + \varepsilon \cdot \Psi_m^{(m)*}(\ell), \quad (96b)$$

$$\begin{aligned} \delta &= -\mathbf{w}_{m-1} = \boldsymbol{\omega}_{m1}^{(m)}(\ell) \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{11}^{(m)}(\ell) \right)^{-1} = \\ &= -\mathbf{b}_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1) \cdot \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{F}_\ell, \end{aligned} \quad (96в)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_{1m}^{(m)}(\ell) \cdot \left(\boldsymbol{\omega}_{mm}^{(m)}(\ell) \right)^{-1} = \\ &= -\mathbf{a}_1^{(m-1)*}(\ell) \cdot \mathbf{A}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{F}_{m+\ell-1}, \end{aligned} \quad (96г)$$

откуда получаются рекурсии для определяющих строк (рис. 22) матрицы $\Psi^{(m)}(\ell)$:

$$\begin{cases} \Psi_m^{(m)*}(\ell) = (\mathbf{I} - \delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \left(\left(\mathbf{0}, \Psi_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1) \right) + \delta \cdot \left(\Psi_1^{(m-1)*}(\ell), \mathbf{0} \right) \right), \\ \Psi_1^{(m)*}(\ell) = (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta)^{-1} \cdot \left(\left(\Psi_1^{(m-1)*}(\ell), \mathbf{0} \right) + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \left(\mathbf{0}, \Psi_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1) \right) \right). \end{cases} \quad (97)$$

Используя (91), от этих рекурсий легко перейти к искомым рекурсиям

$$\begin{cases} \mathbf{B}_m^*(\ell) = s_m(\ell) \cdot \left(\left(\mathbf{0}, \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1) \right) + \boldsymbol{\alpha}_m(\ell) \cdot \left(\mathbf{A}_{m-1}^*(\ell), \mathbf{0} \right) \right), \\ \mathbf{A}_m^*(\ell) = c_m(\ell) \cdot \left(\left(\mathbf{A}_{m-1}^*(\ell), \mathbf{0} \right) + \boldsymbol{\beta}_m(\ell) \cdot \left(\mathbf{0}, \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1) \right) \right), \end{cases} \quad (98)$$

которые в сочетании с (92) мы и называем БАЛ. Его параметрами служат $n_2 \times n_2$ матрицы

$$\begin{aligned} s_m(\ell) &= \mathbf{b}_m^{(m)*}(\ell) \cdot (\mathbf{I} - \delta \cdot \boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{b}_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1), \\ c_m(\ell) &= \mathbf{a}_1^{(m)*}(\ell) \cdot (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta)^{-1} \cdot \mathbf{a}_1^{(m-1)*}(\ell), \\ \boldsymbol{\alpha}_m(\ell) &= \mathbf{b}_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1) \cdot \delta \cdot \mathbf{a}_1^{(m-1)*}(\ell) = \\ &= -\mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{F}_\ell \cdot \mathbf{a}_1^{(m-1)*}(\ell), \\ \boldsymbol{\beta}_m(\ell) &= \mathbf{a}_1^{(m-1)*}(\ell) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{b}_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1) = \\ &= -\mathbf{A}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{F}_{m+\ell-1} \cdot \mathbf{b}_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1). \end{aligned} \quad (99a)$$

Как и ранее (п. 2.2), они указывают только требующиеся значения параметров, но не алго-

ритмы их формирования, которые могут быть различными.

Г. В частном случае $n_2 = 1$, $n_1 = N$ БАЛ преобразуются в ОАЛ (41) со скалярными параметрами

$$\begin{aligned} s_m(\ell) &= \frac{b_m^{(m)}(\ell)}{b_{m-1}^{(m-1)*}(\ell+1)} = \frac{a_1^{(m)}(\ell)}{a_1^{(m-1)}(\ell)} = c_m(\ell), \\ s_m(\ell) &= (1 - \varepsilon \cdot \delta)^{-1/2} = c_m(\ell), \\ \alpha_m(\ell) &= \frac{a_1^{(m-1)}(\ell)}{b_{m-1}^{(m-1)}(\ell+1)} \cdot \delta = \frac{b_1^{(m)}(\ell)}{a_1^{(m)}(\ell)} = \\ &= -a_1^{(m-1)}(\ell) \cdot \mathbf{b}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{f}_\ell, \\ \beta_m(\ell) &= \frac{b_{m-1}^{(m-1)}(\ell+1)}{a_1^{(m-1)}(\ell)} \cdot \varepsilon = \frac{a_m^{(m)}(\ell)}{b_m^{(m)}(\ell)} = \\ &= -b_{m-1}^{(m-1)}(\ell+1) \cdot \mathbf{a}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{E}_{m-1}^*(\ell) \cdot \mathbf{f}_{m+\ell-1}. \end{aligned} \quad (99б)$$

Последние равенства доказывают приведенные без доказательства равенства (62б), а совместно с (42в), (96в, г) — выведенные выше равенства (61), (62а).

Основное значение БАЛ (98) (как и ОАЛ (41)) заключается не в возможности рекуррентно формировать на его основе блочные МИХ \mathbf{H} и \mathbf{N}^* обеляющих и обращающих фильтров, в явном знании которых обычно нет необходимости, а в порождаемой им блочной факторизации Левинсона (БФЛ) этих МИХ, приводящей к “двумерным” многоступенчатым РФ. На их основе все требующиеся функции этих МИХ могут быть сформированы без их явного определения.

4.2. Блочная факторизация Левинсона (БФЛ) и “двумерные” РФ

А. БАЛ (98) порождает специфическую факторизацию (БФЛ) $2N \times N$ ($N = n_1 \cdot n_2$) матрицы (47), состоящей из $n_1 \times n_1$ нижней и верхней треугольных блочных матриц с блоками размера $n_2 \times n_2$.

Следуя методике п. 2.3, мы получим ее в процессе пошагового преобразования $N = n_1 \cdot n_2$ — мерного вектора $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^N = \{\mathbf{u}_p\}_{p=1}^{n_1}$ с n_2 — мерными блоками \mathbf{u}_p , в $2 \cdot N$ — мерный вектор $\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)^*$ с N — мерными подвекторами

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \{p_i\}_{i=1}^N = \{\mathbf{p}_p\}_{p=1}^{n_1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{q} &= \{q_i\}_{i=1}^N = \{\mathbf{q}_p\}_{p=1}^{n_1} = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (100)$$

Их m -й ($m \in 1, n_1$) блок, очевидно, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= \mathbf{B}_m^*(1) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(1), \quad \mathbf{q}_v = \mathbf{A}_m^*(v) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(v), \\ m &\in 1, n_1, \quad v = n_1 + 1 - m, \end{aligned} \quad (101a)$$

$$\mathbf{u}^{(m)}(\ell) = \mathbf{E}_m^{(n_1)*}(\ell) \cdot \mathbf{u}, \quad \ell \in 1, v, \quad (101б)$$

и может быть получен рекуррентной процедурой, на m -м ($m \in 1, n_1$) шаге которой формируется набор n_2 — мерных векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m(\ell) &= \mathbf{B}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell), \\ \mathbf{q}_m(\ell) &= \mathbf{A}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell), \quad \ell \in 1, v, \end{aligned} \quad (102a)$$

включающий и искомые векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m &= \mathbf{p}_m(1), \quad \mathbf{q}_v = \mathbf{q}_m(v), \\ m \in 1, n_1, \quad v &= n_1 + 1 - m. \end{aligned} \quad (102б)$$

Матрица преобразования m -го шага в этом случае описывает **МИХ** m -й степени соответствующего фильтра, а их совокупность при всех $m \in 1, n_1$ – структуру фильтра в целом.

Б. На первом шаге ($m=1$), как следует из (102a), (86), (92),

$$\mathbf{p}_1(\ell) = \mathbf{b}_1^{(1)}(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(1)}(\ell), \quad \mathbf{q}_1(\ell) = \mathbf{a}_1^{(1)}(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(1)}(\ell), \quad (103a)$$

или, в матричной записи,

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1(\ell) \\ \mathbf{q}_1(\ell) \end{Bmatrix} = \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{u}, \quad \mathbf{G}_1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_1^{(1)}(\ell) \\ \mathbf{a}_1^{(1)}(\ell) \end{Bmatrix}, \quad \ell \in 1, n_1. \quad (103б)$$

Матрица \mathbf{G}_1 преобразования первого шага (**МИХ** первой степени фильтра) образована $n_2 \times n_2$ матрицами-блоками, которые должны удовлетворять равенствам (92a), не определяющим их однозначно (см. п. 1.2.A). Эту неопределенность можно снять, если учесть, что, в соответствии с (92б), эти блоки расположены в диагоналях нижней и верхней блочно-треугольных матриц (рис. 21). Они будут одновременно и просто одноименными треугольными, если блоки $\mathbf{b}_1^{(1)}(\ell)$ и $\mathbf{a}_1^{(1)}(\ell)$ будут $n_2 \times n_2$ соответственно нижней и верхней треугольными матрицам – сомножителям (20) матриц $\omega_{11}^{(1)}(\ell) = \Phi_{\ell\ell}^{-1}$, $\ell \in 1, n_1$, обратных диагональным $n_2 \times n_2$ блокам исходной **КМ** $\Phi = \{\Phi_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$. В этом случае **МИХ** первой степени фильтра равна

$$\mathbf{h}_1(\ell) = \mathbf{b}_1^{(1)}(\ell), \quad \mathbf{n}_1(\ell) = \mathbf{a}_1^{(1)*}(n_1),$$

$$\mathbf{G}_1 = \{ \mathbf{W}_1(\ell) \}_{\ell=1}^{n_1}, \quad \mathbf{W}_1(\ell) = \begin{bmatrix} & & & 0 \\ & \mathbf{h}_1(\ell) & & \\ & & \mathbf{n}_1(\ell) & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad (103в)$$

$$\mathbf{h}_1^*(\ell) \cdot \mathbf{h}_1(\ell) = \omega_{11}^{(1)}(\ell) = \Phi_{\ell\ell}^{-1} = \mathbf{n}_1(\ell) \cdot \mathbf{n}_1^*(\ell), \quad \ell \in 1, n_1$$

и реализуется набором n_2 – входных **РФ** (рис. 13, а) с **МИХ** $\mathbf{W}_1(\ell)$, показанным на рис. 23.

Структуру последующих ступеней получим, формируя векторы (102a) с помощью **БАЛ** (98):

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m(\ell) &= \mathbf{s}_m(\ell) \times \\ &\times \left((\mathbf{0}, \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1)) + \alpha_m(\ell) \cdot (\mathbf{A}_{(m-1)}^*(\ell), \mathbf{0}) \right) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell), \\ \mathbf{q}_m(\ell) &= \mathbf{c}_m(\ell) \times \\ &\times \left((\mathbf{A}_{m-1}^*(\ell), \mathbf{0}) + \beta_m(\ell) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1)) \right) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell). \end{aligned}$$

В силу очевидных равенств

$$\begin{aligned} (\mathbf{0}, \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1)) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell) &= \mathbf{B}_{m-1}^*(\ell+1) \cdot \mathbf{u}^{(m-1)}(\ell+1), \\ (\mathbf{A}_{(m-1)}^*(\ell), \mathbf{0}) \cdot \mathbf{u}^{(m)}(\ell) &= \mathbf{A}_{(m-1)}^*(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m-1)}(\ell) \end{aligned}$$

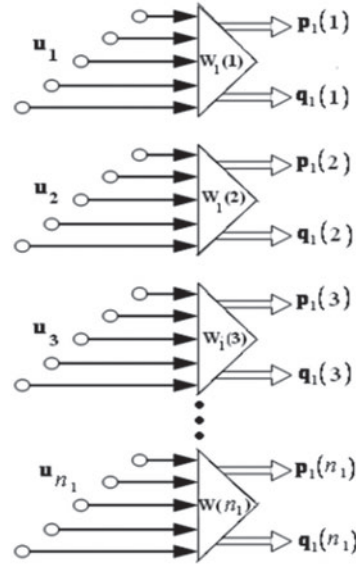


Рис. 23. Первая ступень “двумерного” **РФ**

и определений (102a) получим, что эти векторы равны

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_m(\ell) &= \mathbf{s}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_m(\ell), \\ \tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) &= \mathbf{p}_{m-1}(\ell+1) + \alpha_m(\ell) \cdot \mathbf{q}_{m-1}(\ell), \\ \mathbf{q}_m(\ell) &= \mathbf{c}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m(\ell), \\ \tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) &= \mathbf{q}_{m-1}(\ell) + \beta_m(\ell) \cdot \mathbf{p}_{m-1}(\ell+1) \end{aligned} \quad (104)$$

и формируются “матричным элементарным решетчатым фильтром” (**МЭРФ**), показанным на рис. 24, б **МИХ** этого **МЭРФ**, очевидно, равна (см. ((54б))

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_m(\ell) &= \mathbf{S}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathfrak{D}}_m(\ell), \\ \mathbf{S}_m(\ell) &= \begin{Bmatrix} \mathbf{s}_m(\ell) & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{c}_m(\ell) \end{Bmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{D}}_m(\ell) = \begin{Bmatrix} \alpha_m(\ell) & \mathbf{I}_{n_2} \\ \mathbf{I}_{n_2} & \beta_m(\ell) \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (105)$$

а полная совокупность преобразований (104) при $m \in 2, n_1$, $\ell \in 1, n_1 + 1 - m$ в сочетании с (103a) реализуется “двумерным” **РФ**, показанным на рис. 24, а.

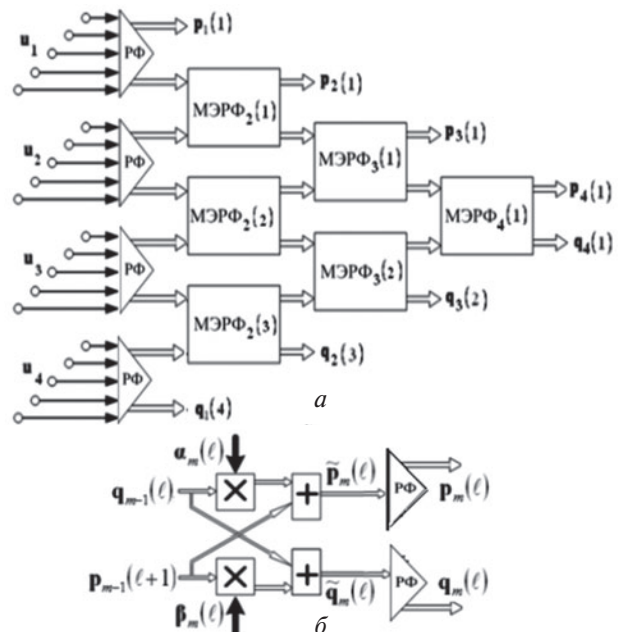


Рис. 24. “Двумерный” **РФ** ($n_1 = 4$, $n_2 = 5$) (а) и ℓ -й **МЭРФ** его m -й ступени (б)

МИХ этого **РФ** по форме записи повторяет (54в), но в роли 2×2 **МИХ** (54б) **ЭРФ** (рис. 12) здесь выступает $2 \cdot n_2 \times 2 \cdot n_2$ **МИХ** (105) **МЭРФ** (рис. 24, б). В роли фильтров с $n_2 \times n_2$ **МИХ** $s_m(\ell)$ и $c_m(\ell)$ на их выходах используются “одномерные” n_2 – входовые **РФ** (рис. 13, а), что ниже обосновывается более подробно. Скорректированная описанным способом **МИХ** (54в) называется нами **БФЛ** треугольных сомножителей (20) матрицы, обратной **КМ**.

4.3. Специфика матричных параметров “двумерных” обеляющих **РФ**

А. Двумерный **РФ** рис. 24 выполнит функции обеляющего фильтра блочного вектора $\mathbf{u} = \{u_p\}_{p=1}^{n_1}$ с блочной **КМ** $\Phi = \{\Phi_{pq}\}_{p,q=1}^{n_1}$, если его матричные параметры (99а) обеспечат выполнение вытекающих из (91), (102а) равенств (см. (56))

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_m^*(\ell) \cdot \Phi^{(m)}(\ell) &= \overline{\mathbf{p}_m(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)*}(\ell)} = (\mathbf{b}_m^{(m)}(\ell))^{*-} \cdot \mathbf{E}_1^{(m)*}(m), \\ \mathbf{A}_m^*(\ell) \cdot \Phi^{(m)}(\ell) &= \overline{\mathbf{q}_m(\ell) \cdot \mathbf{u}^{(m)*}(\ell)} = (\mathbf{a}_1^{(m)}(\ell))^{*-} \cdot \mathbf{E}_1^{(m)*}(1), \\ m \in 1, n_1, \ell \in 1, n_1 + 1 - m, \end{aligned} \quad (106)$$

где $\mathbf{E}_1^{(m)*}(\ell)$, как и ранее, m – мерная ($m \in 1, n_1$) блочная строка со всеми нулевыми $n_2 \times n_2$ блоками, кроме ℓ -го, равного единичной $n_2 \times n_2$ матрице \mathbf{I}_{n_2} .

Действуя по методике п. 2.4.А с учетом блочного строения векторов и матриц, нетрудно получить, что равенства (106) будут выполнены, если выполняются следующая совокупность равенств:

$$\begin{aligned} 1. \overline{\mathbf{p}_m(\ell) \cdot \mathbf{p}_m^*(\ell)} &= \overline{s_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_m^*(\ell) \cdot s_m^*(\ell)} = \mathbf{I}_{n_2} = \\ &= \overline{\mathbf{q}_m(\ell) \cdot \mathbf{q}_m^*(\ell)} = \overline{\mathbf{c}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{c}_m^*(\ell)} \end{aligned} \quad (107а)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} s_m^*(\ell) \cdot s_m(\ell) &= \left(\overline{\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_m^*(\ell)} \right)^{-1}, \\ \mathbf{c}_m^*(\ell) \cdot \mathbf{c}_m(\ell) &= \left(\overline{\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m^*(\ell)} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (107б)$$

Отсюда видно, что фильтры с $n_2 \times n_2$ **МИХ** $s_m(\ell)$ и $c_m(\ell)$ на выходах **МЭРФ** рис. 23, б должны выполнять функции обеляющих фильтров ненормированных векторов $\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell)$ и $\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell)$ на их входах, что и объясняет введение в них “одномерных” n_2 – входовых обеляющих **РФ** (рис. 13, а). При показанном варианте их использования **МИХ** двумерного **РФ** рис. 24, а в целом образуют не блочно – треугольные, а просто треугольные нижняя (**Н**) и верхняя (**Н***) матрицы.

$$\begin{aligned} 2. \overline{\mathbf{p}_m(\ell) \cdot \mathbf{q}_{m-1}^*(\ell)} &= \overline{\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \mathbf{q}_{m-1}^*(\ell)} = \mathbf{0}, \\ \overline{\mathbf{q}_m(\ell) \cdot \mathbf{p}_{m-1}^*(\ell + 1)} &= \overline{\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \mathbf{p}_{m-1}^*(\ell + 1)} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (108)$$

Тем самым $n_2 \times n_2$ матрицы – параметры $\alpha_m(\ell)$ и $\beta_m(\ell)$ должны декоррелировать векторы $\mathbf{p}_m(\ell)$ и $\mathbf{q}_m(\ell)$ на выходах **МЭРФ** рис. 24, б с векторами $\mathbf{q}_{m-1}(\ell)$ и $\mathbf{p}_{m-1}(\ell + 1)$ на их соответствующих управляемых (взвешиваемых) входах.

В силу (104) в условиях (107) эта декорреляция обеспечится при

$$\begin{aligned} \alpha_m(\ell) &= -\overline{\mathbf{p}_{m-1}(\ell + 1) \cdot \mathbf{q}_{m-1}^*(\ell)}, \\ \beta_m(\ell) &= -\overline{\mathbf{q}_{m-1}(\ell) \cdot \mathbf{p}_{m-1}^*(\ell + 1)} = \alpha_m^*(\ell), \end{aligned} \quad (109)$$

т.е. при совпадении этих параметров с точностью до знака с взаимной **КМ** входных векторов **МЭРФ**.

3. В этих условиях их ненормированные входные векторы имеют **КМ**

$$\begin{aligned} \overline{\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_m^*(\ell)} &= \\ = \overline{\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \mathbf{p}_{m-1}^*(\ell + 1)} &= \mathbf{I}_{n_2} - \alpha_m(\ell) \cdot \alpha_m^*(\ell), \\ \overline{\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m^*(\ell)} &= \\ = \overline{\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \mathbf{q}_{m-1}^*(\ell)} &= \mathbf{I}_{n_2} - \alpha_m^*(\ell) \cdot \alpha_m(\ell), \end{aligned} \quad (110)$$

что позволяет рассчитывать нормирующие матрицы по формулам

$$\begin{aligned} s_m(\ell) &= \left(\overline{\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{p}}_m^*(\ell)} \right)^{-1/2} = \\ &= \left(\overline{\tilde{\mathbf{p}}_m(\ell) \cdot \mathbf{p}_{m-1}^*(\ell + 1)} \right)^{-1/2} = \left(\mathbf{I}_{n_2} - \alpha_m(\ell) \cdot \alpha_m^*(\ell) \right)^{-1/2}, \\ \mathbf{c}_m(\ell) &= \left(\overline{\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \tilde{\mathbf{q}}_m^*(\ell)} \right)^{-1/2} = \\ &= \left(\overline{\tilde{\mathbf{q}}_m(\ell) \cdot \mathbf{q}_{m-1}^*(\ell)} \right)^{-1/2} = \left(\mathbf{I}_{n_2} - \alpha_m^*(\ell) \cdot \alpha_m(\ell) \right)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (111)$$

используя для этого “одномерные” n_2 – входовые обеляющие **РФ** (рис. 13, а).

Нетрудно убедиться, что в частном случае $n_2 = 1$, $n_1 = N$ определяющие равенства (106) и матричные параметры (109), (111) **МЭРФ** “двумерных” **РФ** (рис. 24) переходят в определяющие равенства (56) и скалярные параметры (59), (61) **ЭРФ** (рис. 12) “одномерных” N – входовых **РФ** (рис. 13, а).

4.4. Взаимосвязь “двумерных” и “одномерных” **РФ**

А. Показанный на рис. 24, б **МЭРФ** на основе n_2 – входовых матрично-векторных умножителей с **МИХ** $\alpha_m(\ell)$ и $\beta_m(\ell) = \alpha_m^*(\ell)$ (109) может быть реализован различными способами.

При этом “лобовой” способ, основанный непосредственно на определении матрично-векторного умножения, заведомо нерационален. Практически более интересны “систолические” структуры **МЭРФ** с **МИХ** (105), построенные из набора **однотипных** двухвходовых весовых сумматоров, имеющих связи минимальной длины. Пример такого **МЭРФ** из набора двухвходовых **ЭРФ** (рис. 12) с **МИХ** (54б) для $n_2 = 4$ показан на рис. 25, а. Звездочками на **МИХ** (рис. 25, б) этого **МЭРФ** показаны положения в общем случае ненулевых элементов. Их значения в позиции i, ℓ (здесь $i, \ell \in 1, 2 \cdot n_2 = 8$) имеют смысл веса, с которым в i -й элемент выходного вектора входит ℓ -й элемент входного. Равенство этого веса нулю означает, что ℓ -й элемент входного вектора “не участвует” в формировании i -го элемента вы-

ходного, что легко прослеживается по схеме рис. 25, а.

Видно, что в рассматриваемом общем случае $n_2 \times n_2$ диагональные блоки **МИХ** представляют собой заполненные матрицы, а $n_2 \times n_2$ над- и поддиагональные блоки – нижнюю и верхнюю треугольные матрицы соответственно, т.е. имеют ту же структуру, что и одноименные блоки **МИХ** (105) **МЭРФ** рис. 24.

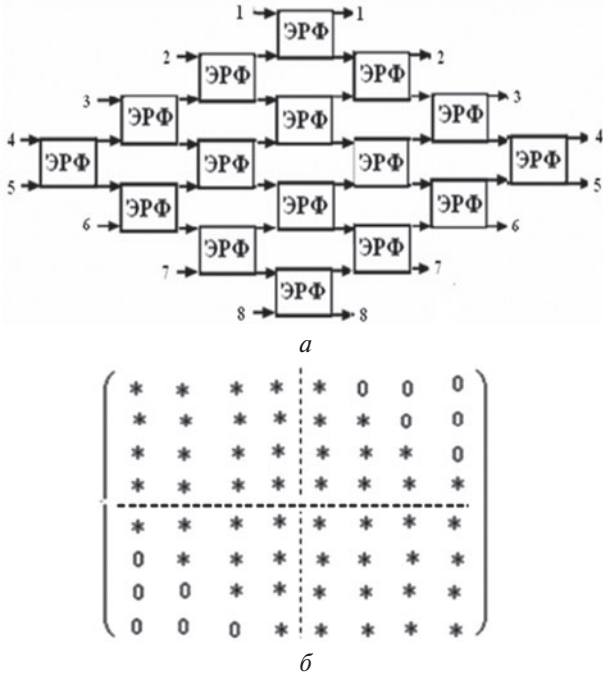


Рис. 25. МЭРФ на основе ЭРФ (а) и его МИХ (б)

Если при этом параметры ЭРФ будут удовлетворять требованиям п. 2.4, то “ромбовидный” МЭРФ рис. 25, а будет в точности эквивалентен МЭРФ рис. 24, б “двумерного” обеляющего РФ рис. 24, а. В этом легко убедиться, заменяя в РФ с $N = n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot 4 = 8$ (рис. 26, а) МЭРФ рис. 24, б на “ромбовидный” набор ЭРФ рис. 25, а и раскрывая структуру входных обеляющих $n_2 = 4$ -входных РФ, показанных на рис. 26, б в штриховых треугольных рамках.

Здесь компонентами n_2 -мерных выходных подвекторов РФ в целом выступают выходные сигналы на p и q -выходах нормирующих $n_2=4$ -входовых РФ ($p_1(1) = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, $p_2(1) = \{p_5, p_6, p_7, p_8\}$, $q_1(2) = \{q_5, q_6, q_7, q_8\}$, $q_2(1) = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$). При выполнении требования п. 2.4.А к параметрам ЭРФ N -входового “одномерного” РФ (б) автоматически выполняются и требования (107а) к выходным векторам “двумерного” РФ (а), что и доказывает эквивалентность МЭРФ рис. 24, б и набора ЭРФ рис. 25, а.

Б. При различии размеров блоков u_p входного вектора $u = \{u_p\}_{p=1}^{n_1} = \{u_i\}_{i=1}^N$ общая структура “двумерного” РФ рис. 24, а остается неизменной, но меняются размеры матриц параметров.

На рис. 27, а показан пример МЭРФ для входных трехмерного вектора u_1 и пятимерного вектора u_2 , а на рис. 27, б – его “одномерный” эквивалент.

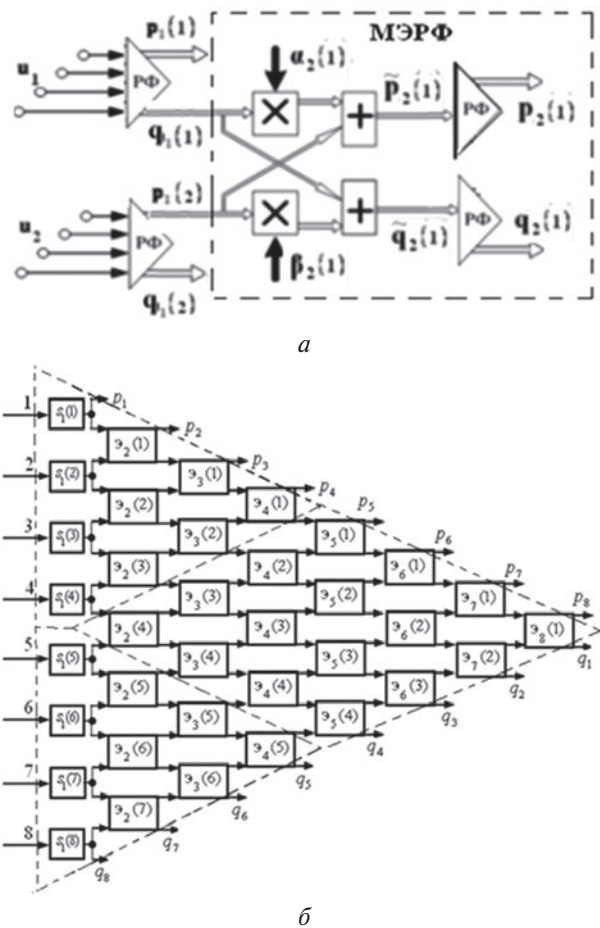


Рис. 26. “Двумерный” РФ (а) и его “одномерный” эквивалент (б)

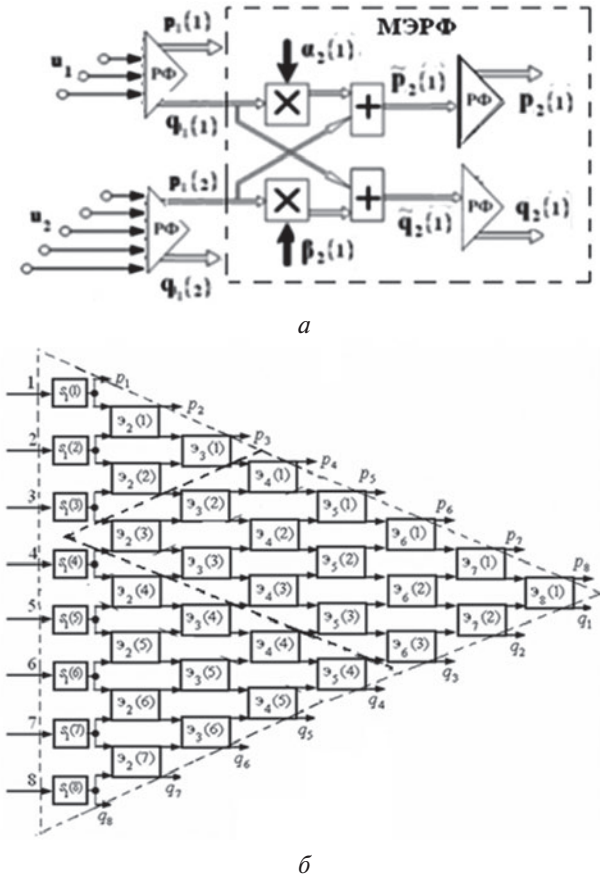


Рис. 27. “Двумерный” обеляющий РФ (а) и его “одномерный” эквивалент (б)

В этом примере матрицы частных корреляций $\alpha_m(\ell)$ и $\beta_m(\ell) = \alpha_m^*(\ell)$ (109) в МЭРФ (а) становятся прямоугольными размеров 5×3 и 3×5 соответственно, а на его выходе включены 5-входовый (вверху) и 3-входовый (внизу) “одномерные” РФ рис. 13, а. По рассмотренным выше причинам точным эквивалентом этого МЭРФ является набор ЭРФ внутри параллелограмма, показанного штриховыми прямыми на схеме рис. 27, б “одномерного” РФ – эквивалента “двумерного” РФ рис. 27, б в целом.

В. Как и “одномерные” РФ рис. 17, “двумерные” РФ рис. 24, а будут иметь блочно-ленточные МИХ с шириной ленты $z \leq n_1$, если для всех $m > z$ будут выполняться равенства $\alpha_m(\ell) = \beta_m(\ell) = 0$, $s_m(\ell) = c_m(\ell) = I_{n_2}$. Можно управлять также структурой ненулевых блоков h_{pq} и n_{pq} (84) матриц H и N (20), управляя МИХ “ромбовидных” (рис. 25, а) или “параллелограммных” (рис. 27, б) наборов ЭРФ.

На рис. 28 показаны примеры трансформации “ромбовидных” МЭРФ (а, в), обеспечивающей ленточность (б, г) диагональных блоков их МИХ.

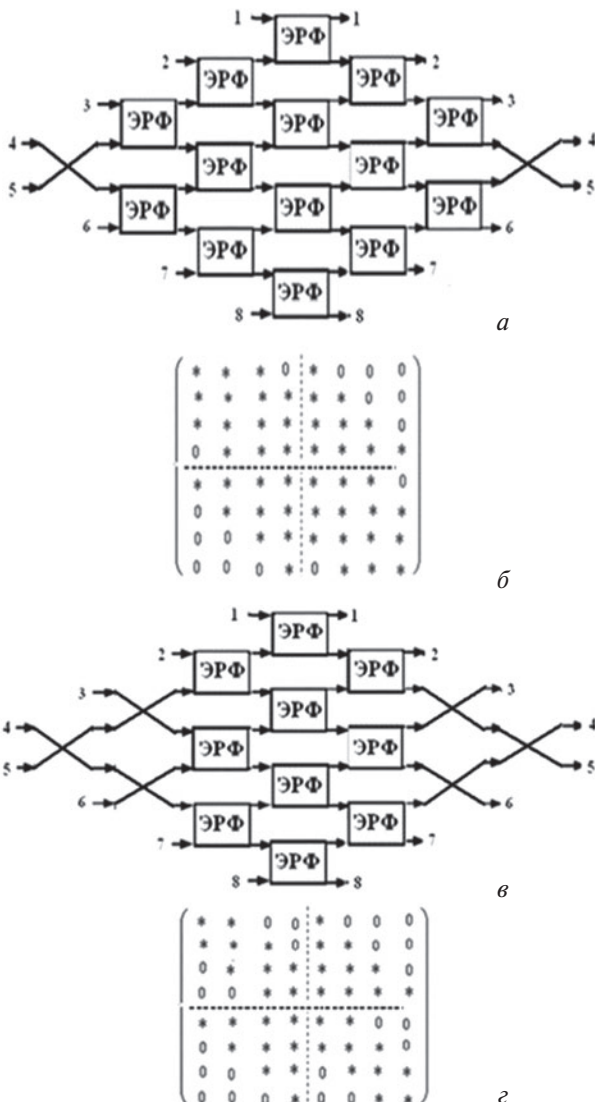


Рис. 28. “Ромбовидные” МЭРФ с ленточными блоками на главной диагонали

Подобные упрощения МЭРФ в сочетании с ленточностью МИХ входных РФ могут в широких пределах менять структуру этих блоков, обеспечивая учет возможной априорной информации о специфике структуры входной КМ.

Г. Обсудим в заключение особенности «многомерных» обеляющих РФ и их взаимосвязь с обеляющими РФ меньшей мерности, в том числе с «одномерными».

«Одномерные» РФ (рис. 13) преобразуют входной «обеляемый» вектор в вектор с некоординатными компонентами одинаковой (единичной) мощности. Эта задача решается скалярными множителями $s_m(\ell) = c_m(\ell)$, $m \in 1, z \leq N$; $\ell \in 1, N+1-m$, нормирующими к единице мощность входных и выходных компонент двухвходовых ЭРФ рис. 12, параметры которых $\alpha_m(\ell) = \beta_m^*(\ell)$ ($m \in 2, z \leq N$; $\ell \in 1, N+1-m$) декоррелируют их выходные компоненты с компонентами на соответствующих взвешиваемых (управляемых) входах (см. п. 2.4).

В «двумерных» обеляющих РФ рис. 24, в целом решающих ту же задачу, но путем поблочной обработки входного («обеляемого») вектора, взаимную декорреляцию блоков выполняют матричные параметры $\alpha_m(\ell) = \beta_m^*(\ell)$ (109) МЭРФ рис. 24, б (см. (108)).

Нормировка к единице мощности отдельных компонент здесь переходит в преобразование в единичную КМ входных и выходных блоков МЭРФ, которое выполняют «одномерные» обеляющие РФ рис. 13 с нижней ($s_m(\ell)$) и верхней ($c_m(\ell)$) треугольными МИХ необходимого размера (см. п.3.2.А). Тем самым «одномерные» РФ «вкладываются» в «двумерный» обеляющий РФ в качестве обеляющих фильтров входных и выходных блоков МЭРФ.

В том же качестве в «трехмерный» обеляющий РФ «вкладываются» двумерные обеляющие РФ, дополняемые соответствующими МЭРФ, и т. д. Тем самым в построенные непосредственно по БФЛ (104), (105) многомерные обеляющие РФ (рис. 24) подобно «матрешке» вложены все обеляющие РФ меньшей мерности.

Однако установленная выше эквивалентность МЭРФ рис. 24, б, 23, а, 27, а набору двухвходовых ЭРФ рис. 25–27 делает само разделение обеляющих РФ на одно- и многомерные достаточно условным. Все элементы (блоки) обеляющих РФ произвольной мерности общего размера N образуют соответствующие наборы ЭРФ (рис. 12) эквивалентных им N -входовых «одномерных» РФ (рис. 13). В силу однородности и существенно большей простоты именно они целесообразны для практической реализации на современной цифровой элементной базе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решетчатые фильтры (РФ) представляют собой одну из множества в принципе возможных разновидностей многоступенчатых фильтров,

построенных по соответствующему факторизованному представлению заданной матричной импульсной характеристики (МИХ). Специфика структуры **РФ**, их составных элементов (**ЭРФ**) и связей между ними порождены особенностями реализованной в них “обобщенной факторизации Левинсона” (**ОФЛ**) нижних и верхних треугольных сомножителей матрицы, обратной заданной строго несингулярной (с ненулевыми главными минорами всех порядков) матрице общего вида. Сохраняя все достоинства многоступенчатых фильтров, **РФ** имеют дополнительные преимущества, связанные с “наследованием” его параметрами свойств обрабатываемой матрицы, простотой ее “максимально энтропийной” аппроксимации – ограничением числа используемых ступеней, однородностью и регулярностью структуры.

2. Разделение обесвечивающих **РФ** на одно – и многомерные достаточно условно. Функции любых многомерных **РФ** могут выполняться соответствующим набором одномерных, образованных совокупностью двухвходовых **ЭРФ** (рис. 12, 14). В силу однородности и существенно большей простоты именно таким путем целесообразно строить **РФ** произвольной мерности на современной цифровой элементной базе.

3. Практическая реализация описанных потенциальных достоинств **РФ** в реальных условиях параметрической априорной неопределенности статистических характеристик входных воздействий существенно зависит от методов (алгоритмов) оценивания (адаптивной настройки) их априори неизвестных параметров по обучающим выборкам неизбежно конечного и обычно весьма малого объема. **РФ**, параметры которого сформированы в результате такой настройки, называются адаптивными (**АРФ**). Обоснованию и исследованию методов их адаптивной настройки посвящена вторая часть данной статьи.

Литература

- [1] Численные методы условной оптимизации // Под ред. Ф. Гилла и У. Мюррея. — М.: Мир, 1977, 290 с.
- [2] Burg I.P. Maximum Entropy Spectral Analysis. // Proc. 37th Meeting of the Society of Exploration Geophysicists. — Oklahoma City, Okla. — October, 1967.
- [3] Burg I.P. A New Analysis Technique for Time Series Data // NATO Advanced Study Institute on Signal Processing with Emphasis on Underwater Acoustics. — August, 1968.
- [4] N. Levinson. The Wiener RMS (root mean-square) error criterion in filter design and prediction // J. Math. Phys. — 1947. — Vol. 25. — PP. 261—278.
- [5] Delsarte F. Mathematical Foundations of the Generalized Levinson algorithm // IEEE Conf. on Acoustic, Speech and Signal Processing, Paris. — 1982. — PP. 1717—1720.
- [6] T. Kailath, S. Kung, and M. Morf, “Displacement ranks of matrices and linear equations,” *Journal of Math. Anal. and Appl.*, vol. 68, pp. 395—409, 1979.
- [7] B. Friedlander, M. Morf, T. Kailath, and L. Ljung, “New inversion formulas for matrices classified in terms of their distance from toepitz matrices,” *Linear Algebra and Appl.*, vol. 27, pp. 31—60, 1979.
- [8] Воеводин В.В. Матрицы и вычисления / В.В. Воеводин, Ю.А. Кузнецов. — М.: Наука, 1984. — 320 с.
- [9] Воеводин В.В. Вычисления с теплицевыми матрицами. В кн. Вычислительные процессы и системы / В. В. Воеводин, Е. Е. Тьртышников; под ред. Г. И. Марчука / М.: Наука, 1983, Вып. 1. — С. 124—266.
- [10] Леховицкий Д.И. Методы адаптивной решетчатой фильтрации в задачах пространственно-временной обработки сигналов / Д. И. Леховицкий, В. И. Зарицкий, И. Д. Раков, Б. Г. Свердлов, М. В. Ратынский // Препринт 8610. — М.: РТИ АН СССР, 1987. — 30 с.
- [11] Леховицкий Д.И. Обобщенный алгоритм Левинсона и универсальные решетчатые фильтры / Д. И. Леховицкий // Изв. Вузов. Радиофизика. — 1992. — Т. 35, № 9—10. — С. 790—808.
- [12] Леховицкий Д.И. К тридцатилетию харьковских исследований адаптивных решетчатых фильтров // XVII Международная научно-техническая конференция «Радиолокация, навигация, связь (RLNC*2011)» — Воронеж: НПФ «САКВОЕЕ», 2011. — Т. 1. — С. 217—228.
- [13] А. с. № 953906 СССР. Д.И. Леховицкий, В.Я. Ширман (СССР). — 1981.
- [14] А. с. № 190336 СССР. Д.И. Леховицкий, В.Я. Ширман (СССР). — 1982.
- [15] А. с. № 198602 СССР. Д.И. Леховицкий, В.Я. Ширман, В.В. Аристов, Бартнев В.Г., В.И. Цивлин (СССР). — 1983.
- [16] А. с. № 205167. Д. И. Леховицкий, В. Я. Ширман, В.И. Зарицкий, В.В. Саламатин (СССР). — 1983.
- [17] А. с. № 263623 СССР. Д.И. Леховицкий, И.Д. Раков, Б.Г. Свердлов, Ю.М. Черемных (СССР). — 1986.
- [18] А. с. № 263804 СССР. Д.И. Леховицкий, И.Д. Раков, Б.М. Вовшин, Б.Г. Свердлов, (СССР). — 1986.
- [19] А. с. № 1500113 СССР. Д.И. Леховицкий, С.С. Кузин (СССР). — 1987.
- [20] История отечественной радиолокации.— М.: ИД “Столичная энциклопедия”, 2011.—768 с.
- [21] Леховицкий Д.И. Универсальные адаптивные решётчатые фильтры. Ч. 1. Адаптация при заданной оценке корреляционной матрицы помех. — Деп. в ВИНТИ 1992, № 2127-В92. (Аннотация — Изв. вузов. Радиофизика. — 1992. — Т. 35, № 3—4).
- [22] Леховицкий Д. И. Универсальные адаптивные решётчатые фильтры. Ч. 2. Адаптация при заданном корне из оценочной корреляционной матрицы / Д.И. Леховицкий, С.Б. Милованов, И.Д. Раков, Б.Г. Свердлов // Изв. Вузов. Радиофизика. — 1992. — Т. 35, №11—12. — С. 969—991
- [23] Леховицкий Д.И. Разновидности «сверхразрешающих» анализаторов пространственно-временного спектра случайных сигналов на основе обесвечивающих адаптивных решетчатых фильтров / Д.И. Леховицкий, Д.В. Атаманский, И.Г. Кириллов // Антенны. — М., 2000. — Вып. 2 (45). — С.40—54.
- [24] Леховицкий Д.И. Комбинированные пеленгаторы точечных источников шумовых излучений на основе адаптивных решетчатых фильтров / Д.И.

- Леховицкий, Д.В. Атаманский, В.В. Джус, Г.А. Жуга // Прикладная радиоэлектроника. — X., 2006. — Т. 5, № 3. — С. 306—315.
- [25] Д.И. Леховицкий, Ю.И. Абрамович, Г.А. Жуга, Д.С. Рачков. Lentочно-диагональная регуляризация МП оценок корреляционных матриц гауссовых помех в алгоритмах адаптации антенных решеток // Прикладная радиоэлектроника, т.9, 2010, №1, с. 107-121
- [26] Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных / Фридландер Б. // ТИИЭР. — 1982. — Т. 70, № 8. — С. 54—97.
- [27] Lev-Ari H., Kailath T. Schur and Levinson algorithms for nonstationary processes. Proc. IEEE Int. Conf. Acoustic, Speech and Signal Processing, Atlanta, CA. — March, 1981. — PP. 860—864.
- [28] Адаптивные фильтры / Под ред. К.Ф.Н. Коуэна и П.М. Гранта; пер. с англ. — М.: Мир, 1988. — 392 с.
- [29] Giordano A., Hsu F. Least Square Estimation with Applications to Digital Signal Processing. — JOHN WILEY & SONS, 1985. — 412 p.
- [30] Сверхбольшие интегральные схемы и современная обработка сигналов / Под ред. С. Гуна, Х. Уайтхауса, Т. Кайлата; пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1989. — 472 с.
- [31] Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочник // Под ред. Я.Д. Ширмана. — [Изд. 2-е, перераб. и доп.]. — М.: Радиотехника, 2007. — 512 с.
- [32] Алмазов В.Б., Белов А.А., Кокин В.Н., Рябуха В.П. Теоретические основы радиолокации: Учебное пособие. Часть 2. — Х.: ХВУ, 1996.
- [33] Леховицкий Д.И., Рябуха В.П., Жуга Г.А. Лаврентьев В.Н. Экспериментальные исследования систем СДЦ на основе АРФ в импульсных РЛС с попачечной вобуляцией периодов зондирования. — Х.: Прикладная радиоэлектроника, т. 7, 2008, №1 с. 90—101.
- [34] V. Laurukevich, A. Pushkov, B. Vovshin, I. Vylegzhanin. The results of field tests of russian meteorological radar “DMRL – C” // Труды IV международного радиоэлектронного Форума, Харьков, 18—21 октября 2011, т.1, с. 7—12.
- [35] V. Efremov, V. Laurukevich, D. Lekhovytsky, I. Vylegzhanin, B. Vovshin. Results of theoretical and experimental investigations of meteorological formation power spectrum using «superresolution» methods. — Proc. on IRS-2009, 2009.
- [36] Laurukevich, A.A. Pushkov., I. Vylegzhanin, B. Vovshni. D. Lekhovytsky, D Rachkov Estimation of energy, spectral and polarimetric characteristics of meteorological echoes in DMRL-C.— Proc. on IRS-2011, pp.267-272, 2011.
- [37] Монзинго Р.Д. Адаптивные антенные решетки. Введение в теорию / Монзинго Р.Д., Миллер Т.У.; пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1986. — 448 с.
- [38] Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи / Миддлтон Д.; пер. с англ. под ред. Б.Р. Левина. Т. 2. — М.: Сов. радио, 1962. — С. 310 — 333.
- [39] Ширман Я.Д. Разрешение и сжатие сигналов / Я.Д. Ширман. — М.: Сов. радио, 1974. — 360 с.
- [40] Леховицкий Д.И., Рябуха В.П., Жуга Г.А. СДЦ в импульсных РЛС: с формулами и картинками. 2. Физический смысл и экстремальные свойства операций оптимальной междупериодной обработки гауссовых сигналов на фоне гауссовых пассивных помех. — Х.: Прикладная радиоэлектроника, т.7, 2008, №2, с. 109—123.
- [41] Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения.— М.: Мир.— 1990.
- [42] Stoica P. and Moses R. Introduction to Spectral Analysis. — NJ.: Prentice Hall, Upper Saddle River, 1997.
- [43] Ширман Я.Д., Манжос В.Н., Леховицкий Д.И. Некоторые этапы развития и проблемы теории и техники разрешения радиолокационных сигналов // Радиотехника, 1997, №1, с.31-42.
- [44] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры, изд. 2-е, Физматгиз, М.—Л., 1963.
- [45] Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1977.
- [46] Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения. / Г. Стренг; пер. с англ. — М.: Мир, 1980. — 456 с.
- [47] Беллман Р. Введение в теорию матриц. // М.: Наука, 1976.
- [48] Пат. № 3876847 США, МКИ 325/367 / Гирудон С.; 8.04.1975.
- [49] Лексаченко В.А. Синтез многомерного “выбеливающего” фильтра по методу Грама-Шмидта / В.А. Лексаченко, А.А. Шталов // Радиотехника и электроника. — 1976. — № 1.
- [50] White Warren D. Каскадные устройства предварительной обработки сигналов для адаптивных антенн // IEEE Trans. Antennas and Propag. — 1976. — Vol. AP-24, № 5. — PP. 670—684.
- [51] Масак Р. I. Адаптивные устройства подавления боковых лепестков. — AP-S. Int. Symp., Amherst, New York, N. Y. IEEE. — 1976.
- [52] White Warren D. Adaptive Cascade Networks for Deep Nulling // IEEE Trans. Antennas and Propag. — 1978. — Vol. AP-26, № 3. — PP. 396—402.
- [53] Полов К.П. Адаптивный компенсатор помех / К.П. Полов // Радиотехника. — 1979 — Т. 34, № 1. — С. 19—24.
- [54] А. с. № 158060 СССР. Д. И. Леховицкий, Б. Ф. Бондаренко, В. Н. Манжос, В. П. Прокофьев (СССР). — 1980.
- [55] А. с. № 165621 СССР. Д. И. Леховицкий, Б. Ф. Бондаренко, В. П. Прокофьев (СССР). — 1980.
- [56] Д. И. Леховицкий, М. И. Табачников, С. И. Шипицын. Выбор порядка линейного фильтра предсказания для стационарных случайных процессов с гауссовской корреляционной функцией // Радиотехника. — М., 1990. № 4. — С. 44—48.
- [57] H. Dym and I. Gohberg. Extensions of bandmatrices with band inverses // Linear Algebra Appl. — Vol. 36, PP. 1—24, Mar. 1981.
- [58] Y. Abramovich, N. Spencer, and M. Turley. Time-varying autoregressive (TVAR) models for multiple radar observations // IEEE Trans. Sig. Proc. — April, 2007. — Vol. 55, No. 4. — PP. 1298—1311.
- [59] Y. Abramovich, N. Spencer, and M. Turley. Order estimation and discrimination between stationary and time-varying autoregressive (TVAR) models // IEEE Trans. Sig. Proc. — June, 2007. — Vol. 55, No. 6. — PP. 2861—2876.

- [60] *Y. Abramovich, N. Spencer, and B.A. Johnson.* Band-Inverse (TVAR) Covariance Matrix Estimation for Adaptive Detection // Manuscript submitted to IEEE Trans. on AES. — December 11, 2006.
- [61] *D. Likhovitskiy, Y. Abramovich.* Adaptive lattice filters for band-inverse (TVAR) covariance matrix approximations: theory and practical applications. — IRS — 2009, Hamburg, Germany, 09–11 September 2009, Proceedings, p.p. 535–539.

Поступила в редколлегию 9.09.2011



Леховицкий Давид Исаакович, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник центра Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов — адаптивная пространственно-временная обработка сигналов на фоне помех в информационных системах различного назначения.



Рачков Дмитрий Сергеевич, младший научный сотрудник Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов — унифицированные процессоры и системы адаптивной обработки сигналов на фоне помех.



Семеняка Андрей Викторович, аспирант Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов — унифицированные процессоры и системы адаптивной обработки сигналов на фоне помех.



Рябуха Вячеслав Петрович, кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник научно-исследовательского центра Харьковского национального университета радиоэлектроники. Область научных интересов — радиолокационные системы, обнаружение и измерение параметров сигналов на фоне помех.



Атаманский Дмитрий Владимирович, кандидат технических наук, доцент, докторант Харьковского университета воздушных сил. Область научных интересов — адаптивная пространственно-временная обработка сигналов на фоне помех в информационных системах различного назначения.

УДК 621.396.965:621.391.26

Адаптивні решітчасті фільтри. Частина I. Теорія решітчастих структур / Д.І. Леховицький, Д.С. Рачков, А.В., Семеняка В.П. Рябуха, Д.В. Атаманський // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2011. Том 10. № 4. — С. 380-404.

Розглядаються роль і місце решітчастих фільтрів (РФ) у системах первинної просторово-часової обробки сигналів, сучасний стан теорії РФ і техніки їх адаптивного настроювання. У першій частині розробляється уніфікована методика синтезу багатоступінчастих фільтрів із заданими матричними імпульсними характеристиками на основі їх факторизованих подань різного виду. Виводиться узагальнений алгоритм і узагальнена факторизація Левінсона — теоретичні основи решітчастих структур. Обговорюються фізичний зміст і властивості параметрів РФ, що обіляють і обертають, при різному рівні апріорної інформації про специфіку кореляційної матриці вхідних дій, особливості й взаємозв'язки “двовимірних” і “багатовимірних” РФ.

Ключові слова: просторово-часова обробка, кореляційна матриця (КМ), фільтри, що відбілюють і обертають, факторизація Левінсона, апріорна інформація про структуру КМ, адаптація.

Лл. 28. Бібліогр.: 61 найм.

UDC 621.396.965:621.391.26

Adaptive lattice filters. Part I. Theory of lattice structures / D.I. Likhovitskiy, D.S. Rachkov, A.V. Semeniaka, V.P. Ryabukha, D.V. Atamanskiy // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. — P. 380-404.

This paper considers the role and place of lattice filters (LF) in systems of primary space-time signal processing, the present status of both LF theory and the technique for their adaptive tuning. In the first part of the paper, the unified methodology for synthesis of multistage filters with specified matrix impulse responses based on their factored representations of different types is developed. The generalized Levinson algorithm and the generalized Levinson factorization are derived, which are the theoretical bases of lattice structures. The physical meaning and properties of whitening and inverse LF parameters under different available *a priori* information about specificity of an input signals covariance matrix, and the features and interconnections of “two-dimensional” and “multidimensional” LFs.

Keywords: space-time signal processing, covariance matrix (CM), whitening filters, inverse filters, Levinson factorization, *a priori* information about CM structure, adaptation.

Fig. 28. Ref: 61 items.