

Інформатика та системні науки (ІСН – 2017) : матеріали VIII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю (м. Полтава, 16–18 березня 2017 р.) / за ред. Ємця О. О. – Полтава : ПУЕТ, 2017. – 333 с. – 175-179 с.

УДК 519.6

ОПТИМІЗАЦІЯ КІЛЬКОСТІ ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ У МЕТОДІ ОБЧИСЛЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є ЗА ДОПОМОГОЮ ПРОЕКЦІЙ

О.М. Литвин, д.ф.-м.н., професор

Українська інженерно-педагогічна академія

academ_mail@ukr.net

О.Г. Литвин, к.ф.-м.н., професор

Харківський національний університет радіоелектроніки

litvinog@ukr.net

Досліджується метод розв'язання задачі реконструкції зображень на основі використання скінченних сум Фур'є, запропонований автором Литвин О. М., в якому коефіцієнти Фур'є обчислюються за допомогою проєкцій, що надходять з комп'ютерного томографа. Отримано співвідношення між порядком сум Фур'є, кількістю проєкцій та точністю відновлення функції.

Litvin O.M., Litvin O.G .Optimizing the number of experimental data in the method of calculating Fourier coefficients using projections.We study the method of solving the problem of image reconstruction based on the use of finite Fourier sums proposed by the author O.M. Litvin, where the Fourier coefficients are calculated using projections coming from the computer tomograph. Correlations between order Fourier sums, the number of projections and accurate restoration of function are given.

Ключові слова: РЕКОНСТРУКЦІЯ, ЗОБРАЖЕННЯ, СУМА ФУР'Є.

Keywords: RECONSTRUCTION, IMAGE, SUMFOURIER

1. Обчислення коефіцієнтів Фур'є за допомогою проєкцій методом О.М. Литвина [1–3].

Задача реконструкції зображень полягає у відновленні функції $f(x, y)$ за відомими проєкційними даними - значеннями інтегралів γ_μ вздовж прямих L_μ , які перетинають об'єкт дослідження:

$$\int_{L_\mu} f(x, y) dl = \gamma_\mu, \mu = \overline{1, Q}, \quad (1)$$

Надалі будемо вважати, що об'єкт дослідження належить квадрату $D = [0, 1]^2$. Цю задачу можна інтерпретувати як задачу відновлення функції $f(x, y)$ – коефіцієнта поглинання рентгенівських променів або як задачу дослідження щільності $f(x, y)$ всередині деякого тіла на площині Oxy методами рентгенівської комп'ютерної томографії. Проєкційні дані, які є експериментальними даними, надходять з комп'ютерного томографа.

Згідно з досліджуваним методом розв'язок задачі відшукувався у вигляді суми Фур'є.

$$f(x, y) \approx S_{N, N}(x, y) = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N F_{k, l} e^{i2\pi(kx+ly)}, \quad (2)$$

де коефіцієнти Фур'є обчислюються за формулою

$$F_{k, l} = \iint_D f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy$$

Особливістю і перевагою розробленого методу є те, що знайдено явні формули для наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функції двох змінних через значення проєкцій. Це звело розв'язання задачі до обчислення інтегралів. Вибір системи прямих, вздовж яких задаються проєкційні дані, а отже, і вигляд інтегралів, і вигляд формул для їх обчислення, обумовлений значеннями індексів k та l у сумі Фур'є. Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k, l}$ за допомогою проєкцій

розглядалися окремо випадки щодо знаків k та l та їх взаємного розташування.

Для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k,l}$ за допомогою проєкцій розглядаємо окремо випадки щодо знаків k та l . Зокрема, для випадку $k > 0$ і $l > 0$ робимо вказану заміну змінних $kx + ly = t$, $-lx + ky = v$, звідки

$$x = x(t, v) = \frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \quad y = y(t, v) = \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}.$$

У результаті область інтегрування D розбі'ється на три під області D_1, D_2, D_3 , коли $k > l$ або $k < l$, та на дві підобласті D_1 , та D_3 , якщо $k = l$. Тоді

$$F_{k,l} = I_1 + I_2 + I_3,$$

де, наприклад, інтеграл I_1 по області D_1 для випадку, коли $k > l > 0$, зводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} f(x, y) e^{-i2\pi(kx+ly)} dx dy = \\ &= \iint_{\tilde{D}_1} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) e^{-i2\pi t} |J| dt dv = \\ &= \int_0^l \frac{e^{-i2\pi t} dt}{k^2 + l^2} \int_{-\frac{lt}{k}}^{\frac{kt}{l}} f\left(\frac{kt - lv}{k^2 + l^2}, \frac{lt + kv}{k^2 + l^2}\right) dv. \end{aligned}$$

Аналогічно визначаються інтеграли I_2, I_3 .

2. Чисельна реалізація методу.

В основі чисельної реалізації запропонованого методу наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є лежить заміна під знаком інтеграла періодичної експоненціальної функції $e^{-i2\pi t}$ кусково-сталім періодичним сплайном

$$e^{-i2\pi t} = \cos 2\pi t - i \sin 2\pi t \approx Cp(m, 2\pi t) - iSp(m, 2\pi t).$$

У цій формулі m – кількість інтервалів розбиття чверть періоду функцій $\cos 2\pi t$ та $\sin 2\pi t$ на підінтервали, в яких відповідні періодичні функції $\cos 2\pi t$ та $\sin 2\pi t$ замінюються сталою величиною найкращого рівномірного наближення вказаних функцій.

Наводимо оцінку похибки, яка при цьому виникає.

$$|\cos(2\pi t) - Cp(m, 2\pi t)| \leq 0.5m^{-1},$$

$$|\sin(2\pi t) - Sp(m, 2\pi t)| \leq 0.5m^{-1}.$$

Тоді інтеграл I_1 замінюється інтегралом

$$\tilde{I}_1 = \iint_{D_1} f(x(t, v), y(t, v)) \cdot (Cp(m, 2\pi t) - iSp(m, 2\pi t)) \cdot |J| \cdot dt dv.$$

Аналогічно інтеграли I_2, I_3 замінюються інтегралами \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 . Тобто $F_{k,l} \approx \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2 + \tilde{I}_3 = \tilde{I}$.

Вважаємо, що при кожному фіксованому $t = t_\mu$ інтеграли по змінній v є проєкціями.

$$\gamma_\mu = \int_{-\frac{t_\mu}{k}}^{\frac{t_\mu}{k}} f(x(t_\mu, v), y(t_\mu, v)) dv, \quad \mu = \overline{1, Q}.$$

Аналогічно для інших інтегралів \tilde{I}_2, \tilde{I}_3 .

Вважаємо, що загальна кількість проєкцій, які надходять з комп'ютерного томографа дорівнює Q . Це означає, що вони є інтегралами вздовж прямих

$$kx + ly = t_\mu = (\mu - 0.5)h_{k,l}, \quad h_{k,l} = \frac{k+l}{Q}, \quad \mu = \overline{1, Q}.$$

Обчислюємо \tilde{I} за формулою центральних прямокутників за змінною t . Позначимо отриманий інтеграл

$$\text{через } I_{k,l}^* = \sum_{\mu=1}^Q \left[[Cp(m, 2\pi t_\mu) - iSp(m, 2\pi t_\mu)] \gamma_\mu \right] h_{k,l} |J|.$$

При цьому виникає похибка $|\tilde{I} - I_{k,l}^*| = \varepsilon_1 = O(h_{k,l}^r), r = 1, 2$.

3. Співвідношення між порядком N сум Фур'є диференційовних функцій та кількістю Q проєкцій, необхідних для забезпечення потрібної точності.

Отже, загальна похибка, яка виникає при заміні $F_{k,l}$ числом $I_{k,l}^*$ визначається наступною нерівністю

$$|F_{k,l} - I_{k,l}^*| = |(F_{k,l} - \tilde{I}) + (\tilde{I} - I_{k,l}^*)| \leq 0.5m^{-1} + \varepsilon_1.$$

Використаємо наступну оцінку для похибки наближення функції [4]

$$f(x, y) \in C^r(D), r \geq 1, D = [0, 1]^2:$$
$$\max_{(x, y) \in D} |f(x, y) - S_N f(x, y)| = O(N^{-r}).$$

Теорема. Між величинами m , Q та N справедливе співвідношення $N^{-r} = 0.5m^{-1} + \max_{-N \leq k, l \leq N} h_{k, l} \frac{M_2}{24}$

Новизна даної розробки полягає у виборі порядку N суми Фур'є у залежності від кількості Q проєкцій для обчислення коефіцієнтів Фур'є $F_{k, l}$.

Література

1. Литвин О. М. Періодичні сплайни і новий метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / Системний аналіз, управління і інформаційні технології: Вісник Харківського держ. політех. ун-ту. Збірка наукових праць. Випуск 125.–Харків: ХДПУ, 2000.–С. 27–35.

2. Литвин О. М., Кулик С. І. Математичне моделювання в комп'ютерній томографії з використанням вейвлетів / Проблеми машинобудування. – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 56–65.

3. Литвин О. М. Реконструкція зображень з використанням скінченних сум Фур'є та Фейєра / О. М. Литвин, О. Г. Литвин // Інформатика та системні науки (ІСН-2016): матеріали VII Всеукраїнської науково-практичної конференції за міжнародною участю, (м. Полтава, 10–12 берез. 2016 р.). – Полтава: ПУЕТ, 2016.

4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1970. – 720 с.