УДК 621.396.96

А.А. КОСТЫРЯ, канд. техн. наук, С.А. ПЛЕХНО, В.Н. НАУМЕНКО, А.А. СОМОВ, Х.Х.АСААД

ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕРПОЛИРУЮЩИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОЦЕНОК СДВИГА ШКАЛ ЭТАЛОНОВ ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ ПРИ СИНХРОНИЗАЦИИ ПО ОБЩЕМУ ИСТОЧНИКУ СИГНАЛОВ

Введение

Для решения задачи синхронизации шкал пространственно разнесенных эталонов (стандартов) времени и частоты при помощи сигнала стороннего источника (общего источника сигналов – ОИС) в синхронизируемых пунктах фиксируется положение фрагментов принятого сигнала относительно шкалы своего эталона. Далее производится обмен информацией между ведущим и ведомыми пунктами, в которых определяется положение шкал своих эталонов относительно сигнала стороннего источника с учетом поправки на время распространения сигнала от общего источника (ОИ) до этих пунктов. Смещение шкалы ведомого пункта относительно шкалы ведущего при условии сведения шкал времени соответствует разности времени распространения радиосигнала от ОИС до пунктов, которая, в общем случае, является случайной величиной. Получить оценку временного положения шкалы времени и частоты эталонов относительно сигнала ОИ позволяет взаимокорреляционная обработка (ВКО) принятых в пунктах сигналов.

ВКО последовательности регистрируемых реализаций сигналов ОИ (вычисление взаимных корреляционных функций пар реализаций) дает положение взаимной корреляционной функции (ВКФ) на оси времени, позволяющее получить оценку смещения шкалы ведомого эталона относительно выбранной временной точки, например – положения максимума ВКФ [1].

Условия выполнения задачи

Данная статья посвящена выбору и реализации алгоритмов поиска максимальных значений ВКФ и их последующей статистической обработки для сличения шкал времени и частоты ведущего и ведомых пунктов.

При цифровой обработке результатов измерений исходные данные представляют собой последовательность дискретных отсчетов, получаемых при помощи аналого-цифрового преобразователя (АЦП) из непрерывного входного сигнала. При этом погрешности синхронизации, связанные с ошибками дискретизации по времени и квантования по уровню здесь не рассматриваются. Данный вид погрешностей подробно рассмотрен в [2] и относится к аппаратурным погрешностям.

Искомый максимум ВКФ может находиться в промежутке между полученными в результате совместной обработки дискретными значениями функции. Поэтому возникает необходимость в восстановлении промежуточных значений массива данных. Для выполнения этой операции используют интерполяцию полиномом, т.е. описание дискретного массива в виде непрерывной функции $f(t)$.

В зависимости от вида интерполирующей функции и допустимой погрешности представления применяется линейная интерполяция, интерполяция степенными полиномами, тригонометрическими функциями и др. [3].

Выбор интерполирующей функции и алгоритма нахождения максимума

Наименьшие вычислительные затраты обеспечивает линейная интерполяция. Для поиска промежуточных значений между интервалами используется функция вида

$$f(t) = a \cdot t + b,$$

где a и b – полиномиальные коэффициенты, которые определяются из соотношений:

$$a=\frac{f(t_{i+1})-f(t)}{t-t}\ ;\ b=\frac{t_{i+1}f(t_i)-t_i f(t_{i+1})}{t_{i+1}-t_i}.$$

Таким образом, уравнение линейной интерполяции имеет вид

$$f(t)=\frac{f(t_{i+1})-f(t_i)}{t_{i+1}-t_i}\cdot t+\frac{t_{i+1}f(t_i)-t_i f(t_{i+1})}{t_{i+1}-t_i}.$$

Однако линейная интерполяция имеет существенный недостаток – высокую погрешность вычислений на нелинейных участках.

Более точным методом поиска промежуточных значений является использование интерполяции степенными полиномами. Функция степенного полинома

$$f(t_i)=a_n t^n+a_{n-1}t^{n-1}+a_{n-2}t^{n-2}+....+a_1 t+a_0,$$

где n –степень полинома, a_n – степенной полиномиальный коэффициент.

Степень полинома определяется из соотношения $n\le i-1$, где i – количество дискретных отсчетов. Поиск степенных коэффициентов a_n сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} f(t_i)=a_n t_i{}^n+a_{n-1}t_i{}^{n-1}+a_{n-2}t_i{}^{n-2}+....+a_1 t_i+a_0 \\ f(t_{i-1})=a_n t_{i-1}{}^n+a_{n-1}t_{i-1}{}^{n-1}+a_{n-2}t_{i-1}{}^{n-2}+....+a_1 t_{i-1}+a_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f(t_1)=a_n t_1{}^n+a_{n-1}t_1{}^{n-1}+a_{n-2}t_1{}^{n-2}+....+a_1 t_1+a_0 \end{cases}.$$

Таким образом, при подстановке значений дискретных отсчетов $f(t_i)$ и t_i данная система уравнений становится линейной и решается любым удобным методом. Наиболее оптимальным является матричный метод Гаусса [4].

В случае, когда восстанавливаемая функция имеет гармонический характер, наилучшим является использование тригонометрической интерполяции. Этот метод так же известен как интерполяция полиномом Фурье. Массив значений представляется в виде функции:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cdot Sin\frac{2\pi t}{T}+b_k Cos\frac{2\pi t}{T}),$$

где T – период повторения значений в массиве, а значения a_k и b_k находятся по формулам:

$$a_k=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)Cos\frac{2\pi tk}{T}dt=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)Cos\frac{2\pi t_i k}{T};\ b_k=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)Sin\frac{2\pi tk}{T}dt=\sum_{i=1}^{n}f(t_i)Sin\frac{2\pi t_i k}{T}.$$

Для гармонических функций также хорошо использовать sinc-интерполяцию. Sinc-интерполяция по сути является способом полного восстановления сигнала по теореме Котельникова. Смысл заключается в следующем – каждый дискретный отсчет рассматривается как независимый прямоугольный импульс и массив дискретных отсчетов представляется в виде функции [5]

$$S(t)=\sum_i f(x_i)\cdot\frac{\sin(\omega_d(t-x_i))}{\pi\cdot\omega_d(t-x_i)},$$

где ω_d – частота дискретизации.

При использовании ВКО данный этап обработки заключается в восстановлении непрерывности ВКФ и в зависимости от априори известного ее вида выбирается наиболее подходящая интерполирующая функция. Следующим этапом обработки является определение временного положения максимального значения ВКФ. Одним из возможных вариантов поиска максимума функции является поиск заданной точки по логическому принципу. Т.е. последовательно перебирается массив точек по следующему алгоритму (рис. 1):

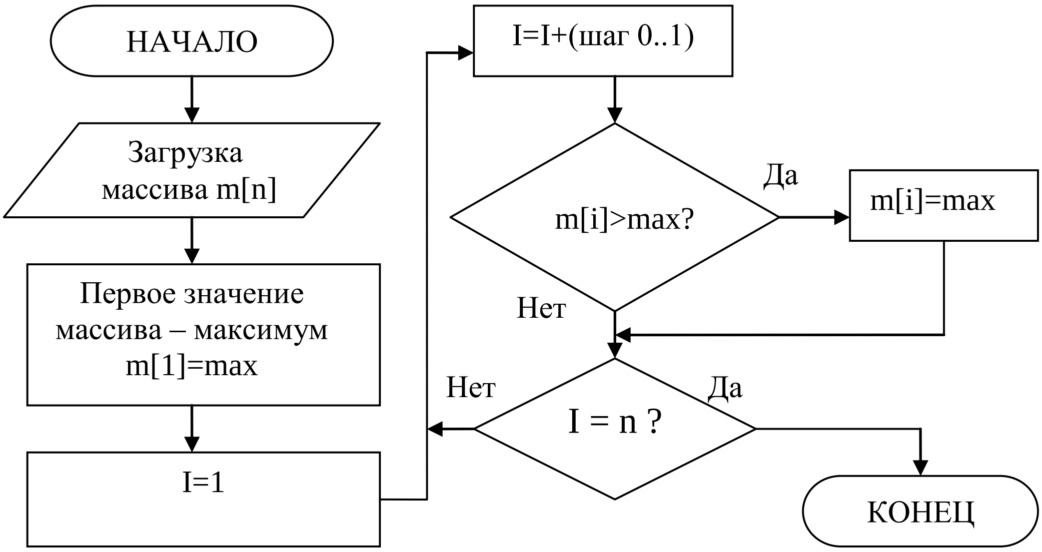

Рис. 1. Алгоритм поиска грубого максимума

Однако данный метод занимает много вычислительного времени и его итог не всегда удовлетворителен, так как выбор максимума привязывается к каждому новому результату в соответствии с шагом перебора значений.

Более быстрый, удобный и точный способ – это способ поиска экстремальных точек. После нахождения значений интерполируемой функции приравнивается нулю ее первая производная и методом подстановки выбирается максимальное значение ВКФ [6]. Априори, если известен порядок уравнения, составляется и решается система линейных уравнений их производных. В этом случае алгоритм поиска максимума выглядит так (рис. 2):

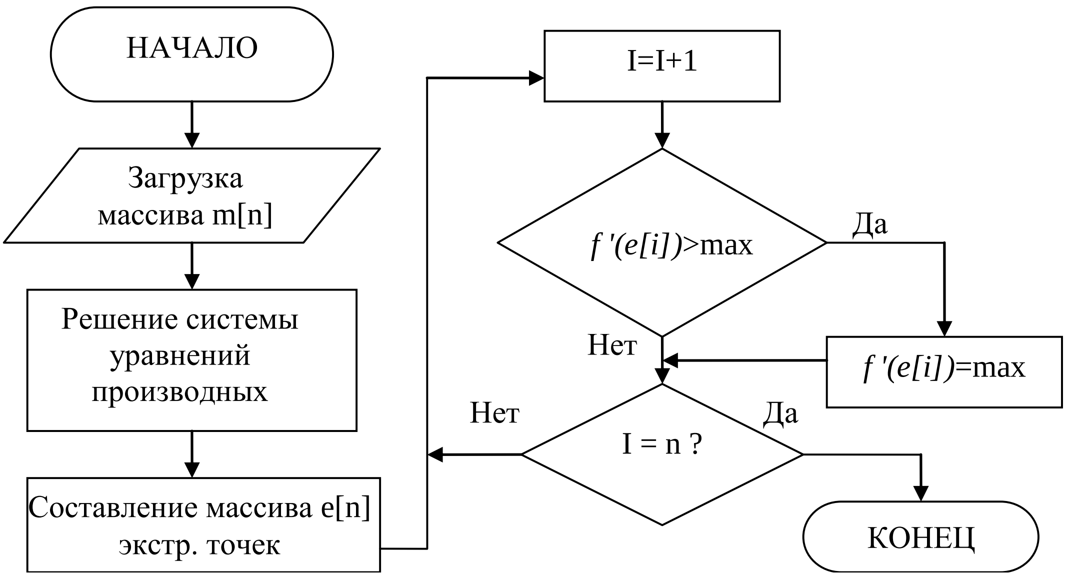

Рис. 2. Алгоритм поиска максимума через экстремум

Если функция зеркальна относительно максимума и имеет линейные участки, то самым простым и быстрым способом вычисления является поиск симметричных точек на линейных участках относительно одной оси и вычисление среднего значения относительно другой оси, как показано на рис. 3.

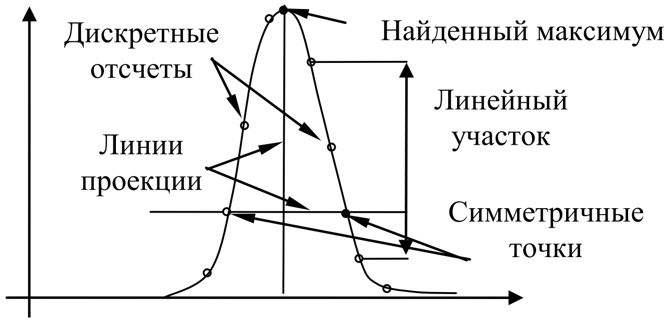

Рис. 3. Графическое нахождение максимума симметричной функции

Линейным считается тот участок, на котором происходит наибольшее изменение амплитуды за один дискретный период. Соответствующий алгоритм представлен на рис. 4.

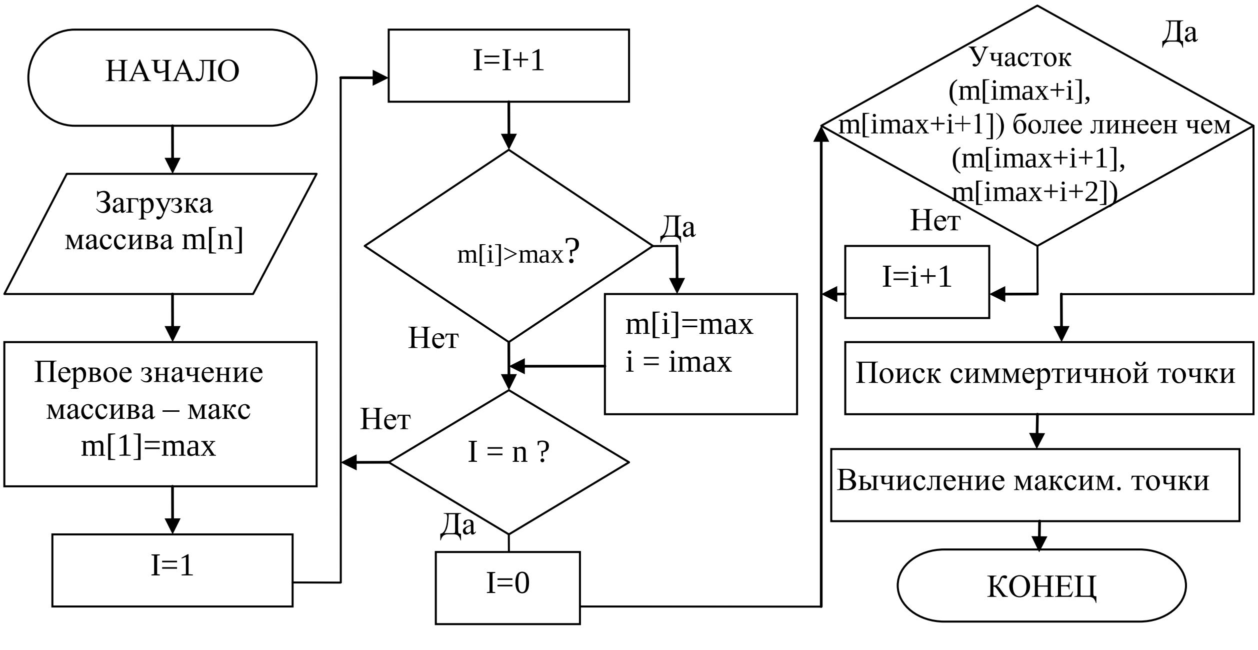

Рис. 4. Алгоритм нахождения максимума при симметрии функции

Если функция не симметрична относительно максимума, то применяется более сложный метод его поиска – метод половинчатого деления (дихотомии), который позволяет получить результат с некоторым приближением ε. На начальном этапе дихотомического метода выбираются две точки в окрестности грубого максимума. Подставляя обе точки в интерполирующую функцию, следует определить максимальное значение. После чего отрезок в окрестности новой точки делится еще пополам. Этот цикл повторяется до получения желаемой точности приближения ε. Графическое пояснение метода дихотомии представлено на рис 5. На рис. 6 приведен алгоритм, реализующий метод половинчатого деления. Существуют и другие алгоритмы поиска уточненных значений, подобных дихотомии, а именно – метод хорд и метод тройного сечения [7].

Перспективными для поиска максимумов функции являются так называемые эволюционные алгоритмы [8]. Существует несколько видов таких алгоритмов: генетические алгоритмы, эволюционные стратегии и т.д. Эти алгоритмы не имеют четкого математического обоснования и позаимствованы непосредственно из наук, которые изучают данные природные явления (генетика, биология и др.).

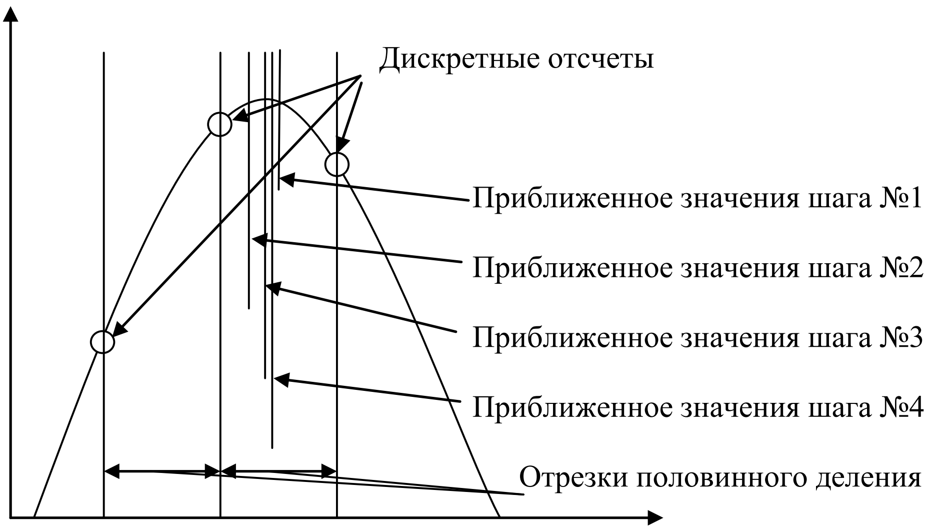

Рис. 5. Графическое пояснение метода дихотомии

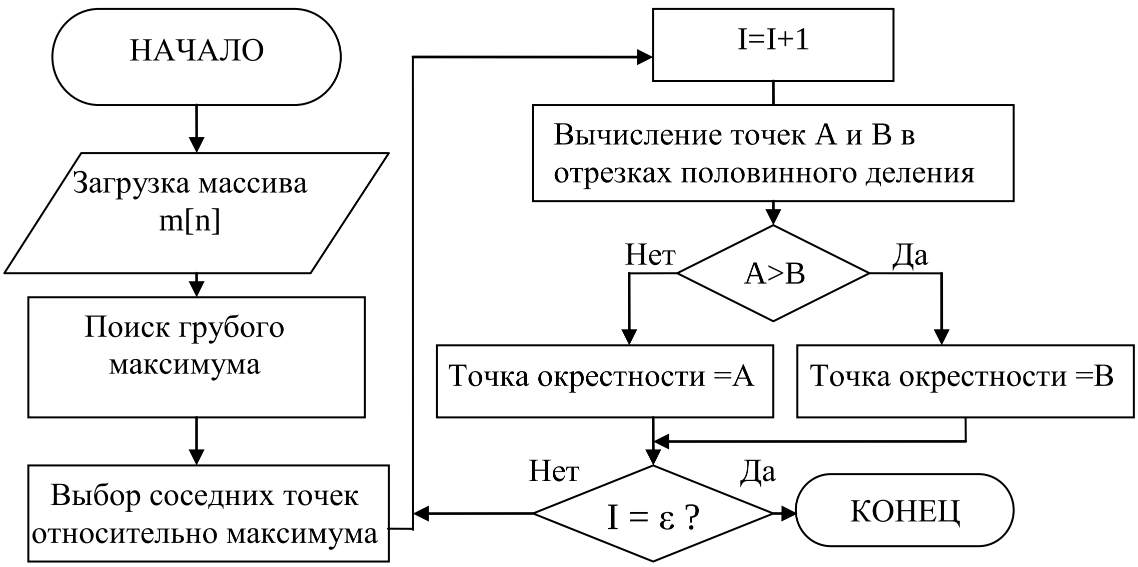

Рис. 6. Алгоритм дихотомии

Для поиска экстремальных значений эффективно использование одного из алгоритмов эволюционных стратегий – алгоритма пчелиного роя [9]. Каждая пчела в рое рассматривается как частица или агент. Все частицы роя действуют индивидуально в соответствии с одним управляющим принципом: двигаться в направлении наилучшей персональной и наилучшей глобальной позиции (максимум функции), постоянно проверяя значение текущей позиции. Изначально агенты располагаются на отрезке в случайном порядке. Далее каждый из агентов меняет свое местоположение со скоростью v, которая определяется по формуле

$$v_n^{i+1} = w \cdot v_n^i + c_1 \cdot \Psi_1(p_n - x_n) + c_2 \cdot \Psi_2(g_n - x_n), \quad (9)$$

где i – количество шагов поиска, n – номер агента v_i^n – скорость пчелы, w – инерционный вес, это число (находится в интервале [0, 1]) отражает, в какой мере частица сохраняет свою первоначальную скорость; p_n, g_n – значение координаты n соответственно для персональной наилучшей позиции пчелы и для глобальной наилучшей позиции всего роя; $\Psi 1$, $\Psi 2$ – случайная величина в диапазоне [-1, 1]; c_1 весовой коэффициент, определяющий, какое влияние на частицу оказывает ее положение относительно персональной лучшей позиции, а c_2 – весовой коэффициент, определяющий, какое влияние на частицу оказывают остальные агенты пчелиного роя [10].

В зависимости от количества агентов и шагов вычислений определяется точность и быстродействие данного алгоритма (рис. 7).

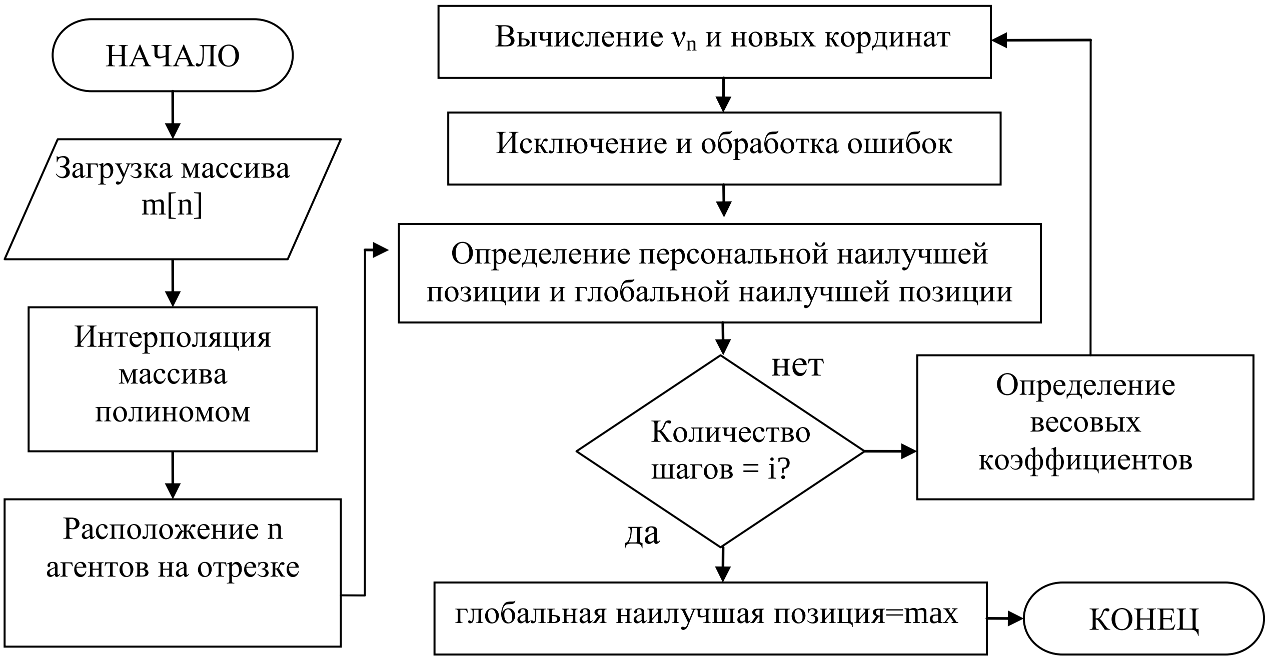

Рис. 7. Полиномиальная интерполяция с поиском max по алгоритму пчелиного роя

Наибольшую эффективность по сравнению с другими алгоритм пчелиного роя демонстрирует в нахождении экстремума при наличии нескольких особых точек.

Имея предварительную информацию о характере ВКФ принимаемых сигналов ОИ, можно выбрать вид интерполяции, обеспечивающий минимальную погрешность восстановления, а также определить алгоритм поиска максимума функции. Уменьшение вычислительных затрат при поиске оценочных значений может быть достигнуто за счет использования априорной информации о временном положении максимума ВКФ. Если решается задача текущего уточнения величины сдвига шкал, то анализируется не вся временная выборка, а только ее фрагмент, в котором достоверно находится максимум функции.

В качестве примера на рис. 8 приведена ВКФ двух радиоимпульсных сигналов. Грубое определение временного положения максимума в этом случае проводится по огибающей ВКФ и для восстановления огибающей применяется линейная интерполяция. Дальнейшее уточнение происходит в районе грубой оценки по восстановленному фрагменту радиочастотного заполнения, для чего уже используется sinc-интерполяция либо интерполяция гармоническими функциями.

Следующим шагом является статистическая обработка – нахождение значений математического ожидания и среднеквадратического отклонения (СКО) сдвига шкал времени по известным формулам [11]. Полученный массив данных визуализируется в виде гистограммы (рис. 9).

Для определения вычислительной погрешности на этапе получения оценочных значений проведено моделирование различных законов распределения и интеграция их в программу обработки данных. Для моделирования используется пакет Wolfram Mathematica 6.0. Результаты моделирования приведены на рис. 10 и 11. Здесь показан случай, когда в модели генерируется массив данных временного положения максимумов ВКФ, подчиненный нормальному закону распределения с СКО $= 10^{-3}$. В результате обработки массива получены выходные данные математического ожидания и СКО с точностью до 9-го знака. Следовательно, при длительности выборки менее 1 *мкс* вычислительная погрешность определения временного положения максимума ВКФ не превышает 1 *пс*.

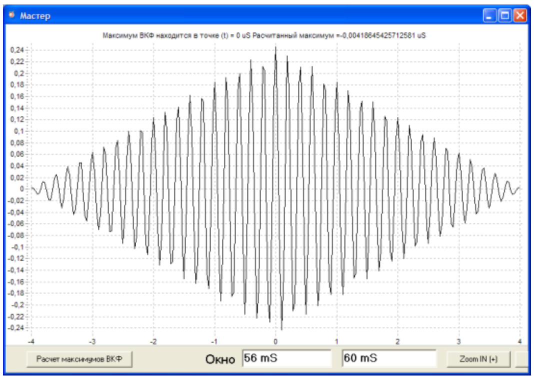

Рис. 8. ВКФ радиоимпульсных сигналов

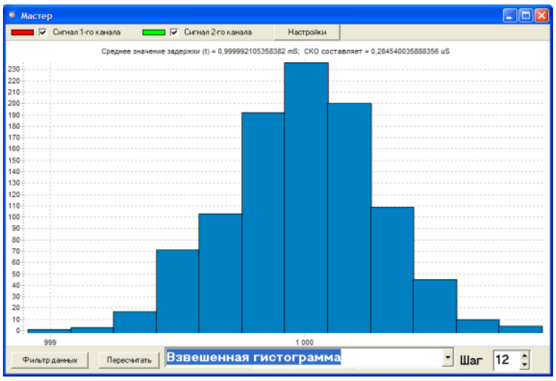

Рис.9. СКО результатов измерений

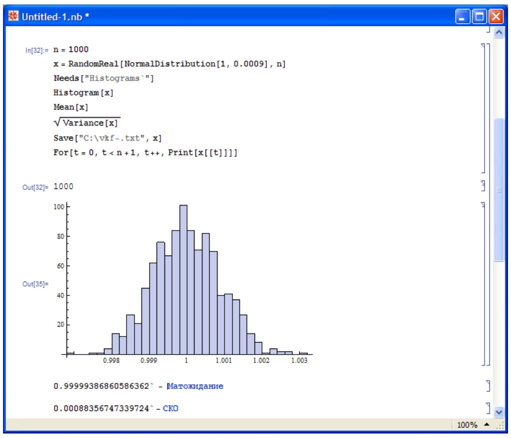

Рис.10. Модель массива данных

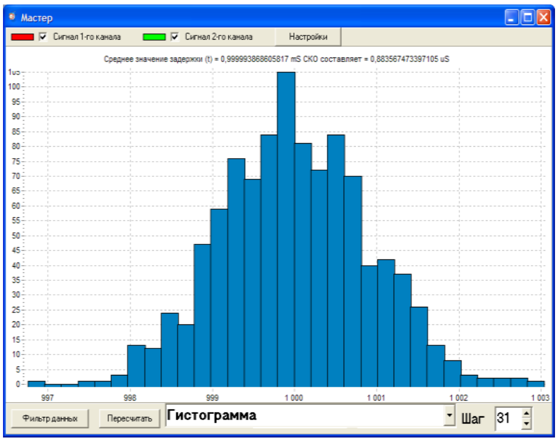

Рис.11. Результат обработки массива данных модели

Выводы

Рассмотренные методы восстановления дискретных функций охватывают возможные виды ВКФ сигналов общих источников, принимаемых в синхронизируемых пунктах. Вид аппроксимации выбирается на основе предварительной информации о параметрах сигнала ОИ.

Разработаны алгоритмы, реализующие восстановление непрерывной функции по ее дискретным значениям, поиск максимального значения и статистическую обработку полученных оценок. Сравнение эффективности предложенных алгоритмов планируется в ходе дальнейших исследований при обработке тестовых данных.

Путем математического моделирования получено значение вычислительной погрешности на этапе нахождения оценок измерений временного сдвига шкал эталонов. При длительности сигнальной выборки, равной 1 *мкс*, вычислительная погрешность определена на уровне 1 *пс* и является существенно меньшей измеряемого временного интервала.

Список литературы: 1. *Коваль Ю. А., Костыря А. А., Соляник О. А., Семенов С. Ф., Плехно С. А., Асаад Х. Х.* Выбор общего источника сигнала для региональной системы синхронизации времени и частоты // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – Запоріжжя : ЗНТУ. – 2012. – № 2. – С.63-69. 2. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов/ перевод с англ. Зайцева А.Л., Назаренко Э.Г., Тетекина Н.Н. – М. : Мир, 1978. – 847 с. 3. *Трибель Х.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / пер. с англ. В.И. Буренкова и М.Л. Гольдмана ; под ред. О.В. Бесова. – М. : Мир, 1980. – 665 с. 4. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельников Г.М.* Численные методы. – М. : Наука, 1987. 5. *Афонский А.А., Суханов Е.В*. Интерполяция в цифровой осциллографии // Контрольно измерительные приборы и системы (КИПиС). – М.,2010. – №5. – С. 13-16. 6. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление / пер. с лат. Я. Выгодский ; под ред. В.А. Калануцкого. – М. : Гос. изд-во технико-теоретической лит., 1949. – 581 с. 7. *Bazaraa, M.S.* Nonlinear programming: theory and algorithms / Mokhtar S. Bazaraa, Hanif D. Sherali, C.M. Shetty. – 3rd ed. 8. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации / пер. с англ. – М. : Наука, 1977. – 344 с. 9. *D.T. Pham, A. Ghanbarzadeh, E. Koc, S. Otri , S. Rahim, M. Zaidi*. The Bees Algorithm // A Novel Tool for Complex Optimisation Problems Manufacturing Engineering Centre, Cardiff University, Cardiff UK, 2005. 10. *Тытюк В. К.* Об одном робастном алгоритме поиска глобального экстремума / В.К.Тытюк, А.Ю.Михайленко, П.В.Тытюк, Р.В.Дударь // Електромех. і енергозберігаючі системи. – 2010. – Вип. 3. – С. 76-79. 11. *Рыбалко А.М.* Специальные главы математики для инженеров. – Х., 2002. – 141 с.

Харьковский национальный
университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 05.03.2013