МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПРИ ЗАДАННЫХ КРИТЕРИЯХ ВАЖНОСТИ В ВИДЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Дух Я.В., Дух И.В.

Харьковский национальный университет
радиоэлектроники, Украина.

E-mail: jane@knure.info

Abstract

The introduction of the utility functions of partial criteria as a way of bringing disparate factors isomorphic to a quantitative form, and the synthesis of conformance of mathematical models can provide an initial task of forming a multi-factor evaluation in a new form. In the solution of similar problems in the face of uncertainty, namely, when specifying the criteria have relative importance in the form of probability characteristics, the problem of difficulty. The paper analyzed the typical problem that is solved by the above method for information systems.

Конструктивный подход к решению задач многокритериальной оптимизации при проектировании информационных систем состоит в формировании функции полезности. Собственно, решение существенно зависит от информационной важности частных критериев, вида их заданий и измерения [1].

Введение понятия функции полезности частных критериев позволяет представить задачу формирования многофакторной оценки альтернатив $x \in X$ в виде

$$P(x) = F[J(a_i), p_i[k_i(x)], \; i = \overline{1,n} \,,$$

где $p_i[k_i(x)]$–функции полезности частных критериев; $J(a_i)$– информация об относительной важности функций полезности частных критериев. Так как в этом случае все частные критерии представлены в изоморфной стандартной форме, возможны ситуации принятия решений будут отличаться только степенью информированности оператора об относительной важности частных критериев и формой представления этой информации $J(a_i)$.

Допустим, указанная информация представлена в вероятностном виде. Тогда получение информации о взаимной важности частных критериев во многих практических случаях проектирования информационных систем затруднено [2]. В связи с этим возникает необходимость принятия решений в условиях большей или меньшей степени неопределенности. Анализ возможных классов степени неопределенности позволяет выделить типичные классы. В работе рассматривается класс задания относительной важности критериев a_i в виде вероятностных характеристик.

Постановка задачи [3]. Весовые коэффициенты заданы в виде интервалов $a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}], \; i = \overline{1,n}.$ При этом предполагается, что значения a_i являются случайными величинами и внутри интервала распределены по некоторому закону. В общем случае величины всех интервалов $\Delta a_i = a_{i\max} - a_{i\min}$ различны и, кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i\min} \neq 1; \;\; \sum_{i=1}^{n} a_{i\max} \neq 1; \;\; \sum_{i=1}^{n} Ma_i \neq 1 \,,$$

где Ma_i – оценка математического ожидания случайной величины a_i.

Задача заключается в выборе таких значений a_i^*, для которых выполняются следующие условия:

$$a_i^* \in [a_{i\min}, a_{i\max}];\ i=\overline{1,n};\ \sum_{i=1}^{n} a_i^* = 1;\ a_i^* = \mathbf{argmin}_{a_i} \sum_{i=1}^{n} (a_i - Ma_i)^2. \tag{1}$$

Последнее означает, что при выборе конкретного значения a_i идет стремление минимизации для каждого из них квадрата отклонения от математического ожидания.

Для решения задачи принимаются следующие естественные допущения.

1. Доверительные вероятности $P_i(a_{i\min} \le a_i \le a_{i\max})$ для всех a_i равны между собой. Это допущение хорошо отражает психологию администратора и, собственно, является причиной различия интервалов возможных значений a_i.

2. Законы распределения всех a_i являются симметричными относительно математического ожидания Ma_i.

При выборе значений $a_i^* \in [a_{i\min}, a_{i\max}];\ i=\overline{1,n}$, удовлетворяющих условиям (1), примем во внимание следующие соображения. Как известно, вероятность попадания случайной величины в некоторый интервал $Ma_i \pm a_i$ пропорциональна дисперсии Da_i, которая является мерой рассеивания. Как показано в [2], доверительная вероятность попадания случайной величины в любой интервал можно записать в виде

$$P_a = t_a \cdot \sigma, \tag{2}$$

где t_a – коэффициент, зависящий в общем случае от закона распределения случайной величины и принятого уровня P_a; σ – среднеквадратическое отклонение ($\sigma = \sqrt{Da_i}$).

Так, например, вероятность попадания случайно величины в интервал $\pm 3\sigma$ для нормального закона распределения равна $P_a = 0.997$, а для закона равной вероятности $P_a = 1$ при интервале, равном $2\sqrt{3\sigma}$. С учетом этого, из допущения 1, принятого выше, вытекает, что среднеквадратическое отклонение случайной величины a_i пропорционально величине интервала

$$\Delta a_i = a_{i\max} - a_{i\min}. \tag{3}$$

Отсюда можно сделать вывод, что все условия (1) будут удовлетворены, если a_i^* определять по формуле

$$a_i^* = Ma_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} Ma_i - 1}{\sum_{i=1}^{n} \Delta a_i} \Delta a_i, \tag{4}$$

при условии $a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}];\ i=\overline{1,n}$. При этом не нужна информация о конкретных значениях P_a, t_a и σ. Нетрудно убедиться, что формула (4) работоспособна и для условий, когда часть a_i задана в виде точных значений ($\Delta a_i = 0$), а часть – в виде интервалов. Кроме этого, из допущения 2 вытекает, что

$$Ma_i = (a_{i\max} + a_{i\min})/2. \tag{5}$$

Формула (4) получена в предположении, что известны математические ожидания Ma_i и все a_i распределены по одному и тому же закону. В противном случае, формула (4) должна быть уточнена. С этой целью анализируются конкретные случаи.

1. Исходная информация об a_i задана в виде

$$a_i \in [a_{i\min}, a_{i\max}], \tag{6}$$

и предпочтения внутри интервала неизвестны. В этом случае логично предположить, что случайные величины a_i распределены по закону равной вероятности в интервале $[a_{i\min}, a_{i\max}]$. Тогда математическое ожидание определяется по формуле (5) [4,5]. Конкретные значения a_i^* можно вычислить по формуле (4).

2. Исходная информация об a_i задана в виде

$$a_i \in [A_i - b_i;\ A_i + b_i]. \tag{7}$$

В этом случае предполагаем, что a_i распределены по нормальному закону с математическим ожиданием $Ma_i = A_i$. Тот же результат получим, если воспользоваться выражением (5). В частном случае a_i могут быть заданы в виде

$$a_i \in [A_i;\ A_i + b_i], \tag{8}$$

или

$$a_i \in [A_i - b_i;\ A_i], \tag{9}$$

либо комбинацией (7), (8), (9) для различных i.

Если все весовые коэффициенты a_i заданы однородными интервалами (8) или (9), то принимаем $Ma_i = A_i$ и конкретные значения a_i^* определяем по формуле (4) при $\Delta a_i = b_i$.

В ситуации, когда a_i заданы некоторой композицией интервалов вида (8) и (9), необходим дополнительный анализ. Пусть часть весовых коэффициентов a_j, $j = \overline{1,m}$, задана соотношением вида (8), а часть a_r, $r = \overline{m+1,n}$, – соотношением вида (9). Здесь возможны три случая:

1) $\sum\limits_{j=1}^{m} A_j + \sum\limits_{r=m+1}^{n} A_r = 1$, при $a_j = A_j$, $a_r = A_r$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{m} A_j + \sum\limits_{r=m+1}^{n} A_r < 1$, в этом случае все коэффициенты $a_r \in [A_r - b_r;\ A_r]$ принимаются равными максимальным значениям из допустимого интервала, а обеспечение условия $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$ производиться за счет выбора значений коэффициентов a_j по формуле

$$a_j = Ma_j - \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} Ma_i + \sum\limits_{r=m+1}^{n} A_r - 1}{\sum\limits_{j=1}^{m} b_j},\ Ma_j = A_j. \tag{10}$$

3) $\sum\limits_{j=1}^{m} A_j + \sum\limits_{r=m+1}^{n} A_r > 1$, в этом случае все коэффициенты $a_r \in [A_r + b_r;\ A_r]$ принимаются равными максимальным значениям из допустимого интервала, а значения коэффициентов a_j определяются по формуле

$$a_r = Ma_r - \frac{\sum\limits_{r=m+1}^{n} Ma_r + \sum\limits_{j=1}^{m} A_j - 1}{\sum\limits_{r=m+1}^{n} b_r},\ Ma_r = A_r. \tag{11}$$

3. Весовые коэффициенты a_i заданы в виде комбинации условий (6) и (7). Учитывая, что доверительную вероятность $P_a = 0.997$ для нормального закона обеспечивает интервал $6\sigma_{\text{Н}}$, а для закона равной вероятности – интервал $4\sqrt{3\sigma_{\text{Р}}}$ [4,5], можно установить коэффициент пересчета интервалов $6\sigma_{\text{Н}} = 4\sqrt{3\sigma_{\text{Р}}} \Leftrightarrow \sigma_{\text{Р}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sigma_{\text{Н}}$.

С учетом сказанного, формула (4) примет вид

$$a_i^* = Ma_i - \frac{\sum_{i=1}^{n} Ma_i - 1}{\sum_{i=1}^{m} \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta a_i + \sum_{j=m+1}^{n} \Delta a_j} R_i, \;\; i = \overline{1,n}, \;\; m < n, \;\; R_i = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}\Delta a_i \; при \; i = \overline{1,m}, \\ \Delta a_i \; при \; i = \overline{m+1,n}, \end{cases} \qquad (12)$$

где индексом j обозначены весовые коэффициенты, распределенные по закону равной вероятности.

Рассмотренный метод будет использован для проектирования информационной системы в рамках выполнения бакалаврской дипломной работы.

Литература:

1. *Дух Я.В.* Проектирование устойчивых телекоммуникационных сетей с использованием многокритериальной оптимизации // 17 Международный молодежный форум "Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке". Сб. материалов форума. Т.4. - Харьков: ХНУРЭ, 2013. - С. 261-262.

2. *Подиновский В. В.* Информация о важности критериев и их шкалах в многокритериальной оптимизации // Научно-техническая информация. С. 2: Информационные процессы и системы. – 2005. – № 1. – С. 22-26.

3. *Овезгельдиев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. – Киев: «Наукова думка», 2002. – 163 с.

4. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учеб. для вузов. — 6-е изд. стер. — М.: Высш. шк., 1999.— 576 с.

5. *Овезгельдиев А.О., Петров К.Э.* Формирование многофакторных оценок при интервальном задании предпочтительности факторов // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 5. – С. 85-98.

6. *Безрук В.М., Буханько А.Н.* Принятие оптимальных решений в телекоммуникационных сетях с учетом совокупности показателей качества. Часть 1. Методология многокритериальной оптимизации систем [Електронний ресурс] // Проблеми телекомунікацій. – 2012. – № 1 (6). – С. 52 – 66. – Режим доступа: http://pt.journal.kh.ua/2012/1/1/121_bezruk_multicriteria.pdf.