*Материалы XVII Международного молодежного форума «**Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке**»*
(Харьков, ХНУРЭ, 22 – 24 апреля 2013). – Т. 7.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ, ВЫЗВАННОГО СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ

Роговой Н.С.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36)
E-mail: rogovoy.nikita@mail.ru

We model process of mixing of a viscous incompressible liquid in rectangular area. The set of point vortexes was put to this area. To find analytical expression for a stream function, a structural-variational method of R-functions was used. Movement of particles of a liquid was modelled with different positions of vortexes. We find and investigate periodic points: areas of intensive mixing.

Изучение механизмов перемешивания и управления им применяется в различных областях науки и техники: химической и пищевой индустрии, геологии, океанологии, физиологии и т.д. Поэтому интерес к аналитическим и численным исследованиям в этой области постоянно возрастает. При этом моделируются квазипериодические течения, в которых возможно развитие хаоса [1].

Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет область $\Omega = (0, a) \times (0, b)$. Движение жидкости в области Ω вызвано N точечными вихрями с интенсивностями $\Gamma_i(t)$ в точках (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, N$, t – время. Значениям $\Gamma_i(t) > 0$ соответствует поток, закручивающийся по часовой стрелке, $\Gamma_i(t) < 0$ – поток, закручивающийся против часовой стрелки.

Считаем, что граница $\partial\Omega$ области Ω – непротекаемая и неподвижная. Тогда задача математического моделирования течения жидкости в области Ω сводится к краевой задаче для функции тока $\psi(x, y, t)$:

$$-\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = F(x, y, t) \text{ в } \Omega = (0, a) \times (0, b),\ t > 0, \qquad (1)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0,\ \left.\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \qquad (3)$$

где ν – кинематическая вязкость, $F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i(t) \cdot \delta(x - x_i, y - y_i)$, $\delta(x, y)$ – двумерная дельта-функция Дирака.

Для решения задачи (1) – (3) воспользуемся методом Галеркина для нестационарных задач [3].

Приближенное решение задачи (1) – (3) ищем в виде

$$\psi_n(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\varphi_k(x,y), \qquad (4)$$

где $c_k(t)$, $k=1,...,n$, – неизвестные пока функции, $\{\varphi_k\}$ – координатная последовательность, т.е. последовательность $\{\varphi_k\}$ удовлетворяет условиям:

1) для любого k $\varphi_k \in H_{\Delta^2}$;

2) для любого n $\varphi_1,...,\varphi_n$ линейно независимы;

3) $\{\varphi_k\}$ полна в H_{Δ^2}.

В соответствии с методом Галеркина неизвестные функции $c_k(t)$, $k=1,...,n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (4) в уравнение (1), первым n координатным функциям $\varphi_1,...,\varphi_n$. Это приводит для определения $c_k(t)$, $k=1,...,n$, к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta}+\nu\sum_{k=1}^{n}c_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2}=(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)},\ j=1,2,...,n, \qquad (5)$$

где

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta}=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2}=\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\right)dxdy,$$

$$(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i(t)\cdot\iint_{\Omega}\delta(x-x_i,y-y_i)\varphi_j(x,y)dxdy=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i(t)\cdot\varphi_j(x_i,y_i).$$

Систему (5) нужно дополнить начальными условиями, которые получаются из (3):

$$c_k(0)=0,\ k=1,2,...,n. \qquad (6)$$

Для построения координатной последовательности воспользовались методом R-функций [2].

Траектории движения частиц жидкости рассчитывались как решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\ \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial x},\ x(0)=x_0,\ y(0)=y_0. \qquad (7)$$

Качественный анализ системы (7) позволяет выделить зоны эффективного перемешивания.

1. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. – М.: Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.

2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

3. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. – 432 с.