Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Стадникова А.В.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ, МЕТОДАМИ *R*-ФУНКЦИЙ И ГАЛЁРКИНА

Материалы XI международной
научной студенческой конференции
«Математические методы в механике, экономике, экологии»
(Севастополь, СевНТУ, 15 – 19 апреля 2013). – С. 10 – 13.

УДК 517.95 : 519.63
Н.В. Гибкина, канд. техн. наук, доцент;
Н.С. Роговой, студент;
А.В. Стадникова, ассистент
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
г. Харьков, Украина
e-mail: rogovoy.nikita@mail.ru

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО СИСТЕМОЙ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ, МЕТОДАМИ *R*-ФУНКЦИЙ И ГАЛЁРКИНА

Задача математического моделирования и анализа перемешивания вязких жидкостей часто встречается во многих прикладных областях, в частности, в химической, фармацевтической и пищевой промышленностях. Кроме того, проблема перемешивания жидкостей представляет фундаментальную научную проблему, которая тесно связана с современными концепциями хаотической и регулярной динамики. Известно, что при некоторых условиях ламинарные течения могут приводить к интенсивному перемешиванию. Такие режимы получили название хаотических и стали предметом интенсивного изучения как с теоретической, так и с экспериментальной точек зрения. Однако большинство методов, используемых при моделировании таких процессов, не обладают свойством универсальности и их сложно применять для «непримитивных» областей.

Целью данной работы является разработка методов математического моделирования и численного анализа процесса перемешивания вязкой несжимаемой жидкости, вызванного системой точечных вихрей, методами *R*-функций и Галёркина.

Решение задачи перемешивания состоит из двух этапов:

1) определение поля скоростей течения жидкости (формализм Эйлера);

2) исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости (формализм Лагранжа).

Будем рассматривать плоскопараллельный случай. Пусть вязкая несжимаемая жидкость заполняет область Ω. Движение жидкости в области Ω вызвано N точечными вихрями с интенсивностями $\Gamma_i(t)$, расположенными в точках (x_i, y_i), $i = 1, \ ..., \ N$, t – время. Значениям $\Gamma_i(t) > 0$ соответствует поток, закручивающийся по часовой стрелке, $\Gamma_i(t) < 0$ – поток, закручивающийся против часовой стрелки.

Считаем, что граница $\partial\Omega$ области Ω – непротекаемая и неподвижная. Тогда задача математического моделирования течения жидкости в области Ω сводится к начально-краевой задаче для функции тока $\psi(x, y, t)$:

$$-\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \nu\Delta^2\psi = F(x, y, t) \text{ в } \Omega, \ t > 0, \qquad (1)$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \qquad (2)$$

$$\psi\big|_{t=0} = 0, \qquad (3)$$

где ν – кинематическая вязкость,

$$F(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i(t) \cdot \delta(x - x_i, y - y_i),$$

$\delta(x, y)$ – двумерная дельта-функция Дирака.

Для решения первой части задачи перемешивания прелагается следующий приближенно-аналитический метод, основанный на методе *R*-функций и Галёркина. Пусть в области Ω известна функция $\omega(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

1) $\omega(x, y) = 0$ на $\partial\Omega$;
2) $\omega(x, y) > 0$ в Ω;
3) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$,

где $\mathbf{n}$ – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Функция $\omega(x, y)$ с указанными свойствами может быть построена с помощью *R*-функций для достаточно широкого класса областей [2].

Тогда структура решения начально-краевой задачи (1) – (3), т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий краевым условиям

(2), имеет вид [3]

$$\psi(x,y,t)=\omega^2(x,y)\Phi(x,y,t),$$

где $\Phi=\Phi(x,y,t)$ – неопределенная компонента структуры.

Для аппроксимации неопределенной компоненты Φ воспользуемся методом Галёркина для нестационарных задач [1]. Для этого представим Φ в виде

$$\Phi(x,y,t)\approx\Phi_n(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\tau_k(x,y), \tag{4}$$

где $c_k(t)$, $k=1,...,n$, – неизвестные пока функции, $\{\tau_k\}$ – любая полная в пространстве $L_2(\Omega)$ система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.д.).

Представление Φ в виде (4) приводит к тому, что приближенное решение задачи (1) – (3) мы будем искать в виде

$$\psi_n(x,y,t)=\sum_{k=1}^{n}c_k(t)\varphi_k(x,y), \tag{5}$$

где $\varphi_k=\omega^2\tau_k$, $k=1,...,n$.

Заметим, что в сделанных предположениях $\{\varphi_k\}$ – координатная последовательность:

1) для любого k $\varphi_k\in H_{\Delta^2}$;

2) для любого n $\varphi_1,...,\varphi_n$ линейно независимы;

3) $\{\varphi_k\}$ полна в H_{Δ^2}.

В соответствии с методом Галёркина неизвестные функции $c_k(t)$, $k=1,...,n$, найдем из условия ортогональности невязки, получаемой при подстановке (5) в уравнение (1), первым n координатным функциям $\varphi_1,...,\varphi_n$. Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $c_k(t)$, $k=1,...,n$,

$$\sum_{k=1}^{n}\dot{c}_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta}+\nu\sum_{k=1}^{n}c_k(t)[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2}=(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}, \tag{6}$$

$j=1,2,...,n$,

где

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{-\Delta}=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\right)dxdy\,,$$

$$[\varphi_k,\varphi_j]_{\Delta^2}=\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial y^2}\right)dxdy\,,$$

$$(F,\varphi_j)_{L_2(\Omega)}=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i(t)\cdot\iint\limits_{\Omega}\delta(x-x_i,y-y_i)\varphi_j(x,y)dxdy=$$

$$=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_i(t)\cdot\varphi_j(x_i,y_i)\,.$$

Систему (6) нужно дополнить начальными условиями, которые получаются из (3):

$$c_k(0)=0\,,\ k=1,2,...,n\,. \tag{7}$$

Для решения второй части задачи перемешивания составлена и решена (с использованием численных методов решения задачи Коши) система уравнений движения лагранжевой частицы:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial y}\,,\ \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}\,, \tag{8}$$

$$x(0)=x_0\,,\ y(0)=y_0\,.$$

Далее, полученные траектории движения исследовались на наличие и характер хаотического поведения с помощью методов нелинейной динамики (найдены и проанализированы стационарные точки, построены фазовые портреты, исследованы эволюции линейного и плоского элементов).

Тем самым, качественный анализ системы (8) позволил выделить зоны эффективного перемешивания.

Библиографический список использованной литературы

1. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

2. Рвачев В.Л. Теория *R*-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

3. Сидоров М.В. О построении структур решений задачи Стокса / М.В. Сидоров // Радиоэлектроника и информатика. – 2002. – №3. – С. 39 – 42.