УДК 625.8 : 624.048
В.А. БОГОМОЛОВ, С.Н. ИЕВЛЕВА, И.Л. РАЗНИЦЫН, М.В. СИДОРОВ

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОЯ ДОРОЖНОЙ ОДЕЖДЫ КАК ЛИНЕЙНОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ СРЕДЫ НА ОСНОВАНИИ РЕОЛОГИЧЕСКОЙ ОДНОЭЛЕМЕНТНОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА

Рассматривается задача математического моделирования слоя дорожных одежд как линейной и геометрически нелинейной вязкоупругих сред. На основании методов теории вязкоупругости с использованием одноэлементной модели Кельвина строится уравнение баланса – аналог принципа виртуальных перемещений теории упругости. Для численного анализа построенной математической модели предлагается использовать метод конечных элементов.

Введение

Актуальность исследования. Дорожная одежда является одной из наиболее распространенных и затратных строительных конструкций, содержащей слои из материалов с разными свойствами, на которые действуют нагрузки от транспортных средств и естественно-климатических факторов. В настоящее время при решении проблемы расчета напряженно-деформированного состояния слоёв дорожных одежд используются только методы, основанные на осесимметричной постановке задач теории упругости. На основании этой теории разработаны действующие ныне дорожно-строительные нормы для Украины, России и Белоруссии [1 – 3, 6]. Во многих зарубежных методиках дорожная одежда также рассматривается как многослойная упругая среда. Кроме того математическая постановка задачи предусматривает, что дорожная одежда интерпретируется как полупространство или плита в полупространстве [8, 9, 11]. Таким образом, существующие методики расчета характеристик дорожных одежд построены в дополнительных предположениях наличия осевой симметрии в материале и в нагрузках, а также не учитывают наличия вязкости и нелинейные свойства материала, что в свою очередь не позволяет в общем случае определить полные тензоры напряжений и деформаций. Кроме того существующие методы не позволяют рассчитать и спрогнозировать образование колеи. С учетом вышесказанного актуальной является задача построения математической модели дорожной одежды как вязкоупругой среды и разработка новых численных методов для её анализа.

Цели и задачи исследования. Целью настоящего исследования является разработка математической модели и нового метода численного анализа дорожных одежд как линейной и геометрически нелинейной вязкоупругой среды на основании одноэлементной модели Кельвина. Для этого необходимо решить следующие задачи:

– построить на основании принципа возможных перемещений математическую модель слоя дорожных одежд как вязкоупругой среды (рассмотреть отдельно линейную и геометрически нелинейную постановки);

– описать алгоритм численного анализа построенной математической модели на основании метода конечных элементов.

Для решения поставленных задач использованы методы теории вязкоупругости и численные методы решения задач математической физики, слой дорожных одежд представляется как тело в трехмерном пространстве, находящееся под действием объемных (массовых) сил, поверхностных сил и перемещений, заданных на поверхности тела.

В работе не рассматриваются вопросы существования и единственности поставленных краевых задач. Предполагается, что все задачи поставлены корректно в некоторых функциональных пространствах для заданных входных данных и все математические модели рассматриваются с точки зрения их алгоритмизации для дальнейшего решения на ЭВМ.

1. Постановка задачи и основные соотношения для одноэлементной модели Кельвина

Пусть тело Ω находится в равновесии под действием объемных (массовых) сил F_i, поверхностных сил t_i и перемещений, заданных на поверхности $S = \partial\Omega$ тела Ω. Пусть также заданы нагрузки и кинематические ограничения на перемещения тела. Под действием этих факторов в теле возникают перемещения u_i, деформации ε_{ij} и напряжения σ_{ij}, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

Будем считать, что на части S_σ поверхности S заданы поверхностные нагрузки:

$$\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j = t_i, \ i = 1, 2, 3, \text{ на } S_\sigma;$$

а на части S_φ поверхности S заданы перемещения

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \quad \text{на} \quad S_\varphi.$$

Здесь $S = S_\sigma \bigcup S_\varphi$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ – единичный вектор внешней к S_σ нормали, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ – искомый, $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3)^T$ – заданный векторы.

Уравнение равновесия деформированного тела получим на основании принципа возможных перемещений [7]

$$\iiint_\Omega \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij} d\Omega = \iiint_\Omega \sum_{i=1}^{3} F_i \delta u_i d\Omega + \iint_{S_\sigma} \sum_{i=1}^{3} t_i \delta u_i ds, \tag{1}$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши; $\delta\varepsilon_{ij}$ – вариации компонент тензора деформаций, отвечающие возможным перемещениям; F_i – компоненты вектора объемных сил, t_i – компоненты вектора поверхностных сил; δu_i – вариации компонент вектора возможных перемещений, $i, j = 1, 2, 3$.

Отметим, что на части S_φ поверхности S, где заданы перемещения, $\delta u_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Для описания свойств материала дорожных одежд используем одноэлементную модель Кельвина (рис. 1) [4].

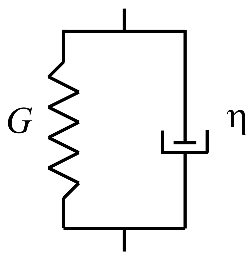

Рис. 1. Одноэлементная модель Кельвина

Для этой модели имеют место следующие соотношения:

$$\overline{\sigma}_{ij} = 2\eta\dot{\overline{\varepsilon}}_{ij} + 2G\overline{\varepsilon}_{ij}, \tag{2}$$

$$\sigma_{ср.} = \frac{2\eta(1+\mu)}{1-2\mu}\left(\dot{\varepsilon}_{ср.} + \frac{G}{\eta}\varepsilon_{ср.}\right). \tag{3}$$

Здесь $\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \dfrac{d\bar{\sigma}_{ij}}{dt}$, $\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} = \dfrac{d\bar{\varepsilon}_{ij}}{dt}$, $\bar{\sigma}_{ij}$, $\bar{\varepsilon}_{ij}$ – компоненты девиаторной части тензоров напряжений и деформаций соответственно, $i, j = 1, 2, 3$; $\sigma_{ср.}$, $\varepsilon_{ср.}$ – средние значения компонент шаровых тензоров напряжений и деформаций соответственно: $\sigma_{ср.} = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$, $\varepsilon_{ср.} = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$; G – модуль упругости; η – коэффициент вязкого сопротивления, μ – коэффициент Пуассона.

Компоненты полных тензоров напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \delta_{ij}\sigma_{ср.}, \quad \varepsilon_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_{ср.}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ – символ Кронекера.

С учетом формул (2) и (3) компоненты полного тензора напряжений запишутся в виде

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \delta_{ij}\sigma_{ср.} = 2\eta\dot{\bar{\varepsilon}}_{ij} + 2G\bar{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\frac{2\eta(1+\mu)}{1-2\mu}\left(\dot{\varepsilon}_{ср.} + \frac{G}{\eta}\varepsilon_{ср.}\right). \quad (4)$$

Для сокращения записи введем обозначение для дифференциального оператора

$$D = 2\eta\frac{d}{dt} + 2G.$$

Тогда (4) приобретает вид

$$\sigma_{ij} = D\,\bar{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\frac{1+\mu}{1-2\mu}D\,\varepsilon_{ср.},$$

а с учетом того, что $\bar{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_{сер.}$, получим

$$\sigma_{ij} = D\,\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}\frac{3\mu}{1-2\mu}D\,\varepsilon_{ср.}. \quad (5)$$

2. Построение математической модели слоя дорожной одежды как вязкоупругой среды (линейный случай) и применение метода конечных элементов для ее численного анализа

Для геометрически линейных задач компоненты тензора деформаций определяются соотношениями Коши [7]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \; i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

а вариация деформации определяется так:

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i}\right), \; i, j = 1, 2, 3.$$

С учетом соотношений Коши (6) и (5) получим

$$\varepsilon_{ср.} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k},$$

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}D\,u_i + \frac{\partial}{\partial x_i}D\,u_j\right) + \delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}D\,u_k, \; i, j = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Подставив (7) в (1), для неизвестных перемещений u_1, u_2, u_3 получим интегро-дифференциальное соотношение

$$\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}D\,u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}D\,u_j\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}D\,u_k\right]\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)d\Omega=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}F_i\delta u_i d\Omega+\iint\limits_{S_\sigma}\sum_{i=1}^{3}t_i\delta u_i ds\,. \tag{8}$$

Для численного определения перемещений u_1, u_2, u_3 на основании уравнения баланса (8) воспользуемся методом конечных элементов [10]. Перемещения можно определить через узловые перемещения (обобщенные координаты) q_p:

$$u_i=u_i(x_1,\,x_2,\,x_3,t)=\sum_{p=1}^{M}q_p(t)N_i^p(x_1,\,x_2,\,x_3)\,,\quad i=1,\,2,\,3\,, \tag{9}$$

где M – число степеней свободы; $p=3(n-1)+j$; n – порядковый номер узла; j – номер координатного направления.

Тогда

$$\delta u_i=\sum_{p=1}^{M}\delta q_p N_i^p(x_1,\,x_2,\,x_3)\,,\quad i=1,\,2,\,3\,. \tag{10}$$

Подставим (9), (10) в (8), приведем подобные, вынесем из-под знака интеграла функции от времени $q_p(t)$. В результате получим

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}D\,q_p\left\{\iiint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^p}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N_k^p}{\partial x_k}\right]\left[\sum_{r=1}^{M}\delta q_r\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)\right]d\Omega\right\}=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{3}F_i\left(\sum_{r=1}^{M}\delta q_r N_i^r\right)\right)d\Omega+\iint\limits_{S_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{3}t_i\left(\sum_{r=1}^{M}\delta q_r N_i^r\right)\right)ds\,. \tag{11}$$

После варьирования каждого из параметров δq_r, $r=1,\,2,\,...,\,M$ ($\delta q_r=1$; $\delta q_i=0$, $i\neq r$) из (11) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных значений $q_1,\,\ldots,\,q_M$:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}D\,q_p\left\{\iiint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^p}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N_k^p}{\partial x_k}\right]\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega\right\}=$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{3}F_i N_i^r\right)d\Omega+\iint\limits_{S_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{3}t_i N_i^r\right)ds\,,\;\; r=1,\,2,\,...,\,M\,. \tag{12}$$

Обозначим

$$A_{rp}=\iiint\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^p}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N_k^p}{\partial x_k}\right]\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega\,,$$

$$Q_r(t)=\iiint\limits_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{3}F_i N_i^r\right)d\Omega+\iint\limits_{S_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{3}t_i N_i^r\right)ds\,.$$

Тогда (12) запишется в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}A_{rp}D\,q_p(t)=Q_r(t)\,,\;\; r=1,\,2,\,...,\,M\,,$$

или в развернутом виде

$$\sum_{p=1}^{M} A_{rp}\left(\eta\dot{q}_p(t)+Gq_p(t)\right)=Q_r(t)\,,\ r=1,\,2,\,...,\,M\,. \tag{13}$$

Отметим, что уравнения системы (13) следует еще упростить (для узлов, соответствующих закрепленным участкам границы, следует соответствующие обобщенные координаты положить равными нулю).

Для системы уравнений (13) нужно также задать начальные условия

$$\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}^0\,. \tag{14}$$

Их можно определить из начального условия

$$\mathbf{u}\big|_{t=0}=\mathbf{u}^0\,.$$

Для решения задачи Коши (13), (14) можно воспользоваться методами Рунге-Кутты с автоматическим управлением шагом интегрирования [5].

3. Построение математической модели слоя дорожной одежды как вязкоупругой среды (геометрически нелинейный случай) и применение метода конечных элементов для ее численного анализа

Для геометрически нелинейных задач компоненты тензора деформаций определяются следующими соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+\sum_{d=1}^{3}\frac{\partial u_d}{\partial x_i}\frac{\partial u_d}{\partial x_j}\,,\ i,\ j=1,\,2,\,3\,. \tag{15}$$

Для вариации деформации примем такое же выражение, как и в п. 2:

$$\delta\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right),\ i,\ j=1,\,2,\,3\,.$$

С учетом соотношений Коши (15) и (5) получим

$$\varepsilon_{\text{ср.}}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial u_d}{\partial x_k}\right)^2\,,$$

$$\sigma_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}D\,u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}D\,u_j\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}D\,u_k+$$

$$+\sum_{d=1}^{3}D\left(\frac{\partial u_d}{\partial x_i}\frac{\partial u_d}{\partial x_j}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\sum_{d=1}^{3}D\left(\frac{\partial u_d}{\partial x_k}\right)^2\,,\ i,\ j=1,\,2,\,3\,. \tag{16}$$

Подставив (16) в (1), для неизвестных перемещений u_1, u_2, u_3 получим интегро-дифференциальное соотношение

$$\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}D\,u_i+\frac{\partial}{\partial x_i}D\,u_j\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}D\,u_k\right]\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{d=1}^{3}D\left(\frac{\partial u_d}{\partial x_i}\frac{\partial u_d}{\partial x_j}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\sum_{d=1}^{3}D\left(\frac{\partial u_d}{\partial x_k}\right)^2\right]\left(\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\delta u_j}{\partial x_i}\right)d\Omega=$$

$$=\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}F_i\delta u_i d\Omega+\iint_{S_\sigma}\sum_{i=1}^{3}t_i\delta u_i ds\,. \tag{17}$$

Для численного определения перемещений u_1, u_2, u_3 на основании уравнения баланса (17) также воспользуемся методом конечных элементов [10].

Перемещения будем искать в виде (9). Подставим (9), (10) в (17), приведем подобные, вынесем из-под знака интеграла функции от времени $q_p(t)$. В результате получим

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\mathsf{D}\,q_p\left\{\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^p}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N_k^p}{\partial x_k}\right]\left[\sum_{r=1}^{M}\delta q_r\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)\right]d\Omega\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\mathsf{D}\,(q_p)^2\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_i}\frac{\partial N_d^p}{\partial x_j}+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_k}\right)^2\right)\right]\left[\sum_{r=1}^{M}\delta q_r\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)\right]d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{M}\mathsf{D}\,(q_p q_s)\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\left[\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_i}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_j}+\frac{\partial N_d^p}{\partial x_j}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_i}+\delta_{ij}\frac{2\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_k}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_k}\right)\right)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{r=1}^{M}\delta q_r\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)\right]\right)d\Omega=\iiint_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{3}F_i\left(\sum_{r=1}^{M}\delta q_r N_i^r\right)\right)d\Omega+\iint_{S_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{3}t_i\left(\sum_{r=1}^{M}\delta q_r N_i^r\right)\right)ds\,. \qquad (18)$$

После варьирования каждого из параметров δq_r, $r=1,2,...,M$ ($\delta q_r=1$; $\delta q_i=0$, $i\neq r$) из (18) получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений для неизвестных значений $q_1,\ \ldots,\ q_M$:

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\mathsf{D}\,q_p\left\{\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial N_i^p}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^p}{\partial x_i}\right)+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial N_k^p}{\partial x_k}\right]\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\mathsf{D}\,(q_p)^2\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_i}\frac{\partial N_d^p}{\partial x_j}+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_k}\right)^2\right)\right]\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{M}\mathsf{D}\,(q_p q_s)\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\left[\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_i}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_j}+\frac{\partial N_d^p}{\partial x_j}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_i}+\delta_{ij}\frac{2\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_k}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_k}\right)\right)\right]\right)\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega=$$

$$=\iiint_{\Omega}\left(\sum_{i=1}^{3}F_i N_i^r\right)d\Omega+\iint_{S_\sigma}\left(\sum_{i=1}^{3}t_i N_i^r\right)ds\,,\quad r=1,2,...,M\,. \qquad (19)$$

Обозначим

$$B_{rp}=\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left[\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_i}\frac{\partial N_d^p}{\partial x_j}+\delta_{ij}\frac{\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_k}\right)^2\right)\right]\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega\,,$$

$$C_{rps}=\iiint_{\Omega}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\left(\left[\sum_{d=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_i}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_j}+\frac{\partial N_d^p}{\partial x_j}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_i}+\delta_{ij}\frac{2\mu}{1-2\mu}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial N_d^p}{\partial x_k}\frac{\partial N_d^s}{\partial x_k}\right)\right)\right]\right)\left(\frac{\partial N_i^r}{\partial x_j}+\frac{\partial N_j^r}{\partial x_i}\right)d\Omega\,.$$

Тогда (19) запишется в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}A_{rp}\mathsf{D}\,q_p(t)+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}B_{rp}\mathsf{D}\,(q_p(t))^2+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{M}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{M}C_{rps}\mathsf{D}\,(q_p(t)q_s(t))=Q_r(t)\,,\ r=1,2,...,M\,,$$

или в развернутом виде

$$\sum_{p=1}^{M}A_{rp}(\eta\dot{q}_p(t)+Gq_p(t))+\sum_{p=1}^{M}B_{rp}q_p(2\eta\dot{q}_p(t)+Gq_p(t))+$$

$$+\sum_{p=1}^{M}\sum_{\substack{s=1\\ s\neq p}}^{M} C_{rps}(\eta q_s(t)\dot{q}_p(t)+\eta q_p(t)\dot{q}_s(t)+Gq_p(t)q_s(t))=Q_r(t),\ r=1, 2, ..., M\ . \qquad (20)$$

Отметим, что, также как и в линейном случае, уравнения системы (20) следует еще упростить (для узлов, соответствующих закрепленным участкам границы, следует соответствующие обобщенные координаты положить равными нулю).

Для системы уравнений (20) нужно также задать начальные условия

$$\mathbf{q}(0)=\mathbf{q}^0\ . \qquad (21)$$

Их можно определить из начального условия

$$\mathbf{u}\big|_{t=0}=\mathbf{u}^0\ .$$

Для решения задачи Коши (20), (21) можно воспользоваться методами Рунге-Кутты с автоматическим управлением шагом интегрирования [5].

Выводы

Таким образом, впервые для математического описания напряженно-деформированного состояния слоя дорожной одежды как вязкоупругой среды с линейными или геометрически нелинейными свойствами на основании одноэлементной модели Кельвина построены соответствующие интегральные тождества. Для их численного анализа описано применение метода конечных элементов: построены задачи Коши для узловых перемещений. Полученные результаты могут быть использованы для создания программного продукта для расчета напряженно-деформированного состояния многослойных нежестких дорожных одежд, а также методические рекомендации по определению расчетных вязких и упругих характеристик асфальтобетонов. Кроме того, предлагаемая методика позволяет моделировать реакцию слоев дорожных одежд с учетом вязкоупругих свойств материалов, что дает более реалистичную картину состояния покрытия при нагрузках. Этим и определяется *научная новизна* и *практическая значимость* полученных результатов.

Список литературы: **1.** *Автомобільні* дороги. Визначення транспортно-експлуатаційних показників дорожніх одягів: СОУ 45.2-000 18112-042: 2009. Вид. офіц. К.: Укравтодор: Стандарт Укравтодор, 2009. 46 с. **2.** *Асфальтобетон* дорожній. Метод випробування на стійкість до накопичення залишкових деформацій: СОУ 45.2-00018112-020; 2009. Офіц. вид. К.: Укравтодор, 2009. 11 с. **3.** *Асфальтобетон* дорожній. Методика оцінки зчеплення між асфальтобетонними шарами при зсуві: СОУ 45.2 – 00018112 – 046: 2009. Офіц. вид. К.: Державна служба автомобільних доріг України (Укравтодор) 2009. 11 с. **4.** *Бленд Д.* Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 199 с. **5.** *Вержбицкий В.М.* Основы численных методов. М.: Высш. шк., 2002. 840 с. **6.** *Инструкция* по проектированию дорожных одежд нежесткого типа: ВСН 46 – 83 – Минтрансстрой. М.: Транспорт, 1985. 157 с. **7.** *Мейз Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред. М.: Мир, 1974. 318 с. **8.** *Lemaitre J., Chaboche J.* Mechanics of solid materials. Cambridge University Press, 1990. 556 p. **9.** *Marvalova B.* Viscoelastic properties of filled rubber. Experimental observations and material modeling // Engineering Mechanics. 2007. vol. 14. No. 1/2. P. 81 – 89. **10.** *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 1: The Basics. Oxford: BH, 2000. 689 p. **11.** *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 2: Solid Mechsnics. Oxford: BH, 2000. 459 p.

Поступила в редколлегию 00.00.0000

Богомолов Виктор Александрович, докт. техн. наук, проф., заместитель ректора (проректор) ХНАДУ. Научные интересы: математическое моделирование и методы численного анализа физико-механических полей. Увлечения и хобби: волейбол. Адрес: Украина, 61002, ул. Петровского, 25, тел. (057) 7003863.

Иевлева Светлана Николаевна, канд. техн. наук, доц. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование сложных систем. Увлечения и хобби: нумизматика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Разницын Илья Львович, канд. физ.-мат. наук, доц., с.н.с. каф. автомобилей ХНАДУ. научные интересы: математическое моделирование физико-механических полей, краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Адрес: Украина, 61002, ул. Петровского, 25, тел. (057) 7073737.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доц., доц. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: всемирная история, история искусств. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

УДК 625.8 : 624.048

Чисельний аналіз напружено-деформованого стану шару дорожнього одягу як лінійного і геометрично нелінійного в'язко-пружного середовища на основі реологічної одноелементної моделі Кельвіна / В.О. Богомолов, С.М. Ієвлєва, І.Л. Разніцин, М.В. Сидоров // АСУ та прилади автоматики. 2012. Вип. 000. С. 000 – 000.

Розглянуто проблему математичного моделювання та численного аналізу дорожніх одягів як в'язко-пружного середовища. На основі принципу віртуальних переміщень та одноелементої моделі Келівіна побудовано відповідну математичну модель. Для чисельного аналізу моделі запропоновано використати метод скінчених елементів.

Іл. 1. Бібліограф.: 11 назв.

UDC 625.8 : 624.048

Numerical analysis of the stress-strain state of the travelling clothing layer as a linear and geometrically nonlinear visco-elastic medium on the basis of the Kelvin rheological singleton model / V.O. Bogomolov, S.M. Iievlieva, I.L. Raznicyn, M.V. Sidorov // Management Information System and Devaced. All-Ukr. Sci. Interdep. Mag. 2012. N. 000. P. 000 – 000.

The problem of mathematical modeling and numerical analysis of the travelling clothing as a visco-elastic medium is treated. The corresponding mathematical model has been constructed on the basis of the virtual displacements principle and the Kelvin singleton model. The method of finite elements is proposed to use for the numerical analysis of the model.

Fig. 1. Ref.: 11 items.