ПРО ПОБУДОВУ ІТЕРАЦІЙНОГО ПРОЦЕСУ ДЛЯ РІВНЯННЯ З АНТИТОННИМ ОПЕРАТОРОМ

Колосова С.В., Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки

mac_sim@list.ru

У сучасній науці спостерігається великий інтерес до процесів, які протікають у нелінійних середовищах. Математичними моделями таких процесів зазвичай є нелінійні крайові задачі математичної фізики. У зв'язку з цим актуальною стає розробка методів конструктивного розв'язання таких задач.

У даній роботі розглядається можливість побудови двобічних наближень до додатних розв'язків задачі

$$-\Delta u = u^{-k} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^2, \tag{1}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \ u > 0, \tag{2}$$

де $k > 0$.

Задача (1), (2) є математичною моделлю різних реальних процесів у дифузії, тепло- і масопереносі.

Введемо у розгляд на конусі K невід'ємних у $C(\Omega)$ функцій оператор

$$Au = \int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) u^{-k}(\mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

де $G(\mathbf{x},\mathbf{s})$ – функція Гріна оператора Лапласа для першої крайової задачі у Ω.

Тоді задача (1), (2) на класі неперервних функцій еквівалентна операторному рівнянню [1, 2]

$$u = Au. \tag{3}$$

Нами доведено, що оператор A має такі властивості:

- оператор A є антитонним, тому що з $u_1 \le u_2$ випливає $Au_1 \ge Au_2$;

- існує сильно інваріантний конусний відрізок $< v_0, w_0 >$ такий, що $A < v_0, w_0 > \subset < v_0, w_0 >$, де $v_0 = 0$, $w_0 = \alpha > 0$, α визначається з умови

$$\max_{\mathbf{x}\in\Omega} \int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s} < \alpha^{1+k};$$

- оператор A є u_0-псевдоугнутий на конусі $K(u_0)$, де $u_0 = \int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) d\mathbf{s}$, u_0-псевдоугнутість оператора A забезпечує нерівність

$$f\left(\frac{u}{\tau}\right) > \tau f(u) \text{ для всіх } \tau \in (0;1),$$

звідки отримали умову для параметру k: $k < 1$.

Існування вказаних властивостей дозволяє зробити висновок, що рівняння (3), а, відповідно, й задача (1), (2) мають єдиний додатний розв'язок $u^* \in < v_0, w_0 >$.

Ітераційний процес для рівняння (3) будуємо за схемою

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = \int\limits_\Omega G(\mathbf{x},\mathbf{s}) u_n^{-k}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \ n = 0, 1, 2, \ldots,$$

за початкове наближення беремо $w_0 = \alpha$. При цьому маємо

$$0 < u_1 \le u_3 \le \ldots \le u_{2n-1} \le \ldots \le u^* \le \ldots \le u_{2n} \le \ldots \le u_2 \le w_0.$$

1. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.

2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.