

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Сидоров М.В., Шерстнюк Д.В.

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ОДНОЙ
ЗАДАЧИ ПЛАЗМОСТАТИКИ**

Материалы XI международной
научной студенческой конференции
«Математические методы в механике, экономике, экологии»
(Севастополь, СевНТУ, 15 – 19 апреля 2013). – С. 27 – 30.

УДК 517.95 : 519.63

М.В. Сидоров, канд. физ.-мат. наук, доцент;

Д.В. Шерстнюк, студент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

г. Харьков, Украина

e-mail: sherstnyuk.d@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ЧИСЛЕННОМУ АНАЛИЗУ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ПЛАЗМОСТАТИКИ

Задачи плазмостатики исторически возникли как составная часть программы управляемого термоядерного синтеза. В центре внимания плазмостатики находится расчет равновесных конфигураций плазмы и удерживающего её магнитного поля. Технические конструкции, реализующие равновесные конфигурации, называются магнитными ловушками. Теоретической основой расчета магнитных ловушек на сегодняшний день является МГД-теория. Практически наиболее интересны равновесные конфигурации, обладающие определенной симметрией: цилиндрической, плоской, осевой, винтовой.

Рассмотрим следующую задачу плазмостатики. В круглом цилиндре радиуса R на расстоянии ρ_0 ($\rho_0 < R$) от центра через

равные углы $\frac{2\pi}{N}$ расположены N винтовых проводника с токами,

равными по величине и направлению. Предположим, что задача обладает винтовой симметрией, т.е. в цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) все величины зависят только от двух

переменных ρ и $\omega = \varphi - \frac{\alpha z}{\rho_0}$, где $\alpha = \frac{2\pi\rho_0}{h}$, h – шаг винта про-

водников. В этом случае компоненты H_ρ и $H_\omega \equiv H_\varphi - \alpha\rho H_z$ вектора напряженности магнитного поля могут быть выражены через производные функции магнитного потока ψ :

$$H_\rho = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \omega}, \quad H_\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial \rho},$$

и от исходных уравнений Максвелла для электромагнитного поля после некоторых преобразований [1] можно прийти к скалярному уравнению для ψ – уравнению Грэда-Шафранова:

$$\Delta^{**} \psi = -j_z^{ex} + \frac{2\alpha I}{v^2} - \frac{dI}{d\psi} - \frac{I}{v} \frac{dI}{d\psi} \quad \text{в } \Omega = \{\rho < R\}, \quad (1)$$

где

$$\Delta^{**} \psi \equiv \nabla \left(\frac{\nabla \psi}{\rho} \right) \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\rho}{v} \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \omega^2}, \quad v \equiv 1 + \alpha^2 \rho^2,$$

j_z^{ex} – плотность токов заданных проводников.

Давление плазмы $p(\psi)$ и функцию электрического тока $I(\psi) \equiv H_z + \alpha \rho H_\varphi$ согласно [1] возьмем в виде

$$I = \frac{\alpha}{2\pi}, \quad p(\psi) = p_0 e^{-\frac{\psi^2}{q^2}}.$$

Краевая задача с уравнением (1) ставится в круге $\Omega = \{\rho < R\}$, граница которого $\partial\Omega = \{\rho = R\}$ предполагается непроницаемой для магнитного поля: $H_\rho = 0$. Отсюда следует, что уравнение (1) следует дополнить краевым условием

$$\psi|_{\partial\Omega} = C = \text{const}. \quad (2)$$

Постоянная C заранее неизвестна и ее выбор может быть заранее продиктован различными дополнительными условиями. Например, в [1] константу C рекомендуют выбрать так, чтобы

$$\psi|_{\rho=0} = 0, \quad (3)$$

Условие (3) обеспечивает максимум давления $p(\psi)$ на оси цилиндра.

Итак, для определения функции магнитного потока ψ нужно решить в круге Ω уравнение (1) при краевом условии (2) и дополнительном условии (3). Обозначим

$$F(\rho, \omega, \psi) = -j_z^{ex} + \frac{2\alpha I}{v^2} - \frac{d\rho}{d\psi} - \frac{I}{v} \frac{dI}{d\psi}$$

и в задаче (1), (2) сделаем замену

$$\psi = C + u, \quad (4)$$

где u – новая неизвестная функция.

Тогда для функции u получим краевую задачу

$$\Delta^{**} u = F(\rho, \omega, C + u) \text{ в } \Omega, \quad (5)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6)$$

Для решения задачи (5) – (6) воспользуемся методом последовательных приближений. Пусть начальное приближение $u^{(0)}$ задано (например, можно взять $u^{(0)} \equiv 0$) и найдено приближение $u^{(k)}$. Тогда следующее $(k+1)$ -е приближение $u^{(k+1)}$ найдем как решение линейной задачи

$$\Delta^{**} u^{(k+1)} = F(\rho, \omega, C + u^{(k)}) \text{ в } \Omega, \quad (7)$$

$$u^{(k+1)}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (8)$$

содержащий параметр C , $k = 0, 1, 2, \dots$

Приближенное решение задачи (7), (8) будем искать в виде

$$u^{(k+1)} \approx u_{2n+1}^{(k+1)} = c_0^{(k+1)}(R-\rho) + \sum_{j=1}^n c_{2j-1}^{(k+1)} \rho^j (R-\rho) \cos j\omega + \\ + \sum_{j=1}^n c_{2j}^{(k+1)} \rho^j (R-\rho) \sin j\omega. \quad (9)$$

Коэффициенты $c_0^{(k+1)}$, $c_1^{(k+1)}$, ..., $c_{2n}^{(k+1)}$ из (9) в соответствии с методом Галеркина [3] определим из условия ортогональности невязки

$$R_{2n+1}(\rho, \omega, C) = \Delta^{**} u_{2n+1}^{(k+1)} - F(\rho, \omega, C + u^{(k)})$$

координатным функциям

$$R-\rho, \rho(R-\rho)\cos\omega, \rho(R-\rho)\sin\omega, \rho^2(R-\rho)\cos 2\omega, \\ \rho^2(R-\rho)\sin 2\omega, \dots, \rho^n(R-\rho)\cos n\omega, \rho^n(R-\rho)\sin n\omega.$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно $c_0^{(k+1)}$, $c_1^{(k+1)}$, ..., $c_{2n}^{(k+1)}$, решив которую мы получим $c_0^{(k+1)}$, $c_1^{(k+1)}$, ..., $c_{2n}^{(k+1)}$ как функции от C :

$$c_0^{(k+1)} = c_0^{(k+1)}(C), \quad c_1^{(k+1)} = c_1^{(k+1)}(C), \quad \dots, \quad c_{2n}^{(k+1)} = c_{2n}^{(k+1)}(C). \quad (10)$$

Далее, исходя из (3), постоянную C на $(k+1)$ -й итерации определим из уравнения

$$C + u_{2n+1}^{(k+1)} \Big|_{\rho=0} = 0,$$

или

$$C - Rc_0^{(k+1)}(C) = 0. \quad (11)$$

Решив уравнение (11) относительно C , далее найдем значения коэффициентов из (10), получив тем самым по формуле (9) $(k+1)$ -е приближение к решению задачи (5), (6), а значит, и $(k+1)$ -е приближение

$$\Psi^{(k+1)} \approx \Psi_{2n+1}^{(k+1)} = C^{(k+1)} + u_{2n+1}^{(k+1)}$$

к решению задачи (1), (2).

Вычислительный эксперимент был проведен для случая трёх проводников, погруженных в плазму ($N = 3$). Плотность токов проводников, следуя [2], была выбрана в виде

$$j_z^{ex} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^2 \exp \left(- \left(\frac{\rho - \rho_0}{a} \right)^2 - \left(\frac{\omega - \frac{2\pi l}{3}}{b} \right)^2 \right),$$

$a \ll 1$, $b \ll 1$, $M \approx 3\pi ab$ – нормировочный множитель, обеспечивающий условие, что полный ток в проводниках принят за

единицу: $\int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R j_z^{ex} r dr = 1$. Было выбрано также $R = 3$, $\rho_0 = 1$,

$a = b = 0,01$, $\alpha = 1,5$, $p_0 = 0,75 \cdot 10^{-3}$, $q = 0,05$. Полученное численное решение хорошо согласуется с решениями из [1, 2].

Библиографический список использованной литературы

1. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики / К.В. Брушлинский. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 200 с.
2. Брушлинский К.В. Численное моделирование равновесной винтовой конфигурации с плазмой на сепаратрисе / К.В. Брушлинский, А.И. Морозов, Н.Б. Петровская. – Математическое моделирование. – Т. 10, № 11. – 1998. – С. 29 – 36.
3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970. – 512 с.