ПРИМЕНЕНИЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА СТАЦИОНАРНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ПЛАЗМЫ

Шерстнюк Д.В.
Научный руководитель – к. ф.-м. н., доц. Сидоров М.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Ленина,14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: sherstnyuk.d@gmail.com

During the numerical investigation of a plasma cylinder in magnetic field of some helical conducting wires in equilibrium, we discuss some questions on the solution, uniqueness and stability in boundary problems with the nonlinear elliptic Grad-Shafranov equation. Some examples of nonunique and unstable solutions are given. A spectral analysis of the lineari-zed equation made possible to determine a restriction of admissible parameter values and to specify iterative methods of solving the problem. The scheme investigation and a general nature of obtained results are typical for a large class of two-dimensional models of static magnetoplasma configurations.

Задачи плазмостатики исторически возникли как составная часть программы управляемого термоядерного синтеза (УТС). В центре внимания плазмостатики находится расчет равновесных конфигураций плазмы и удерживающего её магнитного поля. Технические конструкции, реализующие равновесные конфигурации, называются магнитными ловушками. Теоретической основой расчета магнитных ловушек на сегодняшний день является МГД-теория. Практически наиболее интересны равновесные конфигурации, обладающие определенной симметрией: цилиндрической, плоской, осевой, винтовой.

В двумерных задачах плазмостатики с цилиндрической геометрией и винтовым магнитным полем уравнения магнитной гидродинамики сводятся к одному дифференциальному уравнению типа Грэда-Шафранова [1]

$$\Delta^{**}\psi = -j_z^{ex} - p'(\psi) + \frac{2\alpha}{\nu^2} I - \frac{I}{\nu} I'(\psi), \qquad (1)$$

где α – шаг винта,

$$\Delta^{**}\psi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\eta}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \equiv \nabla\left(\frac{\nabla\psi}{\eta}\right), \quad \eta \equiv 1 + \alpha^2 r^2 .$$

Здесь I и ψ – компоненты магнитного поля $\mathbf{H}$ и его векторного потенциала $\boldsymbol{\Psi}$ в направлении винтовых линий $r = \mathrm{const}$, $\theta = \mathrm{const}$.

Ток заданных проводников j_z^{ex} в правой части уравнения представлен осевой компонентой, которая связана с винтовой соотношением $j_l^{ex} = j_z^{ex}$.

Численный анализ в работе был проведен для задачи расчета конфигурации в цилиндре с тремя винтовыми проводниками, погруженными в плазму [1].

Задачи с нелинейным эллиптическим уравнениям (1) должны определить функцию магнитного потока ψ, если предположить известными зависимостями $p(\psi)$ и $I(\psi)$, т.е. потребовать (или угадать) распределение давления и тока между магнитными поверхностями. В рассматриваемой задаче они выбраны в виде

$$I(\psi) \equiv \frac{\alpha}{2\pi}, \; p(\psi) = p_0 e^{-\frac{\psi^2}{q^2}}. \qquad (2)$$

Первая из формул (2) означает отсутствие плазменного тока в направлениях, отличных от координатных винтовых линий, а вторая – что плазма сосредоточена в центральной части цилиндра с максимальным давлением на оси. Безразмерный параметр p_0 есть отношение максимального давления плазмы к магнитной единице давления, а параметр q характеризует «чувствительность» зависимости p от ψ и фактически отвечает за размер области, занятой плазмой.

Краевая задача для уравнения (1) ставится в круге $\Omega = \{r < R\}$ с краевым условием

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = \text{const}, \qquad (3)$$

которое означает, что граница цилиндра является магнитной поверхностью (в расчетах константа принята нулевой).

Обозначим $F(r, \theta, \psi) = -j_z^{ex} - p'(\psi) + \frac{2\alpha}{\nu^2} I - \frac{I}{\nu} I'(\psi)$. Тогда задача (1), (3) запишется в виде

$$\Delta^{**}\psi = F(r, \theta, \psi) \text{ в } \Omega$$

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для решения этой задачи воспользуемся итерационным процессом последовательности приближений по нелинейности. Пусть $\psi^{(0)}$ – начальное приближение. Если приближение $\psi^{(k)}$ известно, то новое $\psi^{(k+1)}$ приближение будем искать решение линейной задачи

$$\Delta^{**}\psi^{(k+1)} = F(r, \theta, \psi^{(k)}) \text{ в } \Omega, \qquad (4)$$

$$\psi^{(k+1)}\big|_{\partial\Omega} = 0. \qquad (5)$$

Для решения задачи (4), (5) на каждом шаге итерационного процесса воспользуемся методами R-функций [2] и Галеркина [3].

1. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. – 200 с.

2. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

3. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.