
УДК 519.63:532.5

А.П. БЛИШУН, М.В. СИДОРОВ, И.Г. ЯЛОВЕГА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ МЕТОДОМ R-ФУНКЦИЙ

Рассматривается задача расчета фильтрационного течения жидкости со свободной границей. Предлагается численный метод её решения, использующий конструктивную теорию R-функций для построения структуры решения краевой задачи, и метод наименьших квадратов для итерационного уточнения свободного участка границы области фильтрации.

Введение

Актуальность исследования. В последние десятилетия наблюдается катастрофическое снижение естественной дренажности и устойчивый подъем уровня грунтовых вод, что приводит к подтапливанию аграрных, городских и других ландшафтов. Поэтому проблема математического моделирования движения грунтовых вод (т.н. фильтрационных течений) в пористых средах является актуальной. Методы моделирования физических процессов в пористых средах можно найти в [1 – 5]. Математическое моделирование фильтрационных течений использует методы теории функций комплексного переменного. Однако они часто труднореализуемы в областях сложной геометрии. Еще больше вычислительных сложностей возникает, если область фильтрации содержит участки свободной поверхности. Например, в [6] предлагается делать в таких задачах невырожденную замену переменной, которая преобразует область со свободной границей в область с границей фиксированной, однако делает уравнение задачи нелинейным. В связи с этим разработка новых численных методов решения задач этого класса является актуальной.

Цели и задачи исследования. Целью настоящего исследования является разработка нового метода решения краевых задач теории фильтрации со свободной границей, который бы точно учитывал всю имеющуюся аналитическую и геометрическую информацию. Для этого необходимо решить следующие задачи:

- построить полную структуру решения краевой задачи, т.е. пучок функций, точно удовлетворяющий всем краевым условиям задачи;
- описать алгоритм итерационного уточнения уравнения свободной границы.

Для решения поставленных задач будут использованы методы конструктивной теории R-функций и методы аппроксимации функций в гильбертовых пространствах.

Настоящая работа распространяет результаты, полученные в [7, 8], на случай наличия в области свободной границы. В работе не рассматриваются вопросы существования и

единственности поставленных краевых задач. Предполагается, что все задачи поставлены корректно в некоторых функциональных пространствах для заданных входных данных и все математические модели рассматриваются с точки зрения их алгоритмизации для дальнейшего решения на ЭВМ.

1. Постановка задачи

Рассмотрим случай двумерного несжимаемого установившегося потока через ортотропный грунт в области Ω , для которого закон Дарси может быть записан следующим образом: $v_1 = -k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}$, $v_2 = -k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2}$. Здесь u – напор, k_{11} , k_{22} – коэффициенты фильтрации, v_1 , v_2 – компоненты скорости потока. Уравнение неразрывности для такого потока имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = 0 \text{ в } \Omega. \quad (1)$$

Граничные условия задачи таковы:

$$u = \bar{u} \text{ на } \partial\Omega_1; \quad v_n = - \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1} \alpha_{n1} + k_{22} \frac{\partial u}{\partial x_2} \alpha_{n2} \right) = \bar{v}_n \text{ на } \partial\Omega_2, \quad (2)$$

где \bar{v}_n – скорость, направленная по нормали к границе; α_{n1} и α_{n2} – направляющие косинусы нормали с осями Ox_1 и Ox_2 ; $\partial\Omega_1$ – непроницаемая часть границы; $\partial\Omega_2$ – проницаемая часть границы.

Пусть в пористом грунте образуется свободная поверхность фильтрующейся жидкости, называемая обычно поверхность депрессии. Точное положение этой поверхности неизвестно и её определение составляет одну из частей общего решения. Для этой цели используется простое условие: в любой точке свободной поверхности полный потенциальный напор u равен напору H , соответствующему геометрическому возвышению свободной поверхности над плоскостью сравнения (атмосферное давление принимается равным нулю). Отметим, что наличие свободного участка границы области фильтрации делает краевую задачу (1), (2) нелинейной.

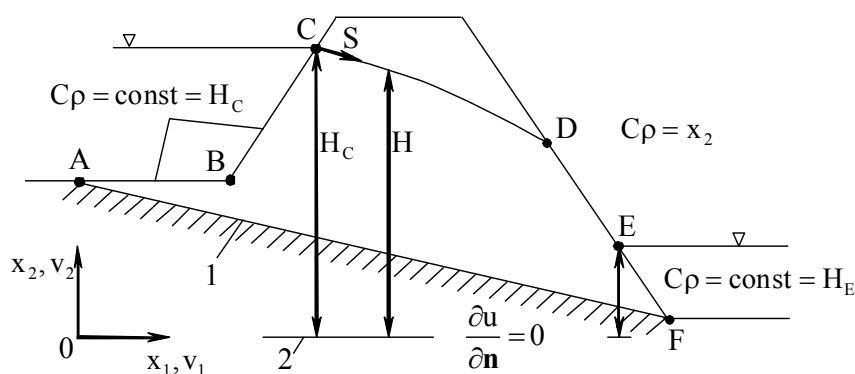


Рис. 1

Рассмотрим общий случай фильтрации, показанный на рис. 1, с четырьмя различного типа границами.

1) Непроницаемая граница (линия AF) – поверхность слоя почвы и твердые породы.

Условие на таких границах есть $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на $\partial\Omega_2$, следовательно, они являются линиями тока.

2) Границу грунта с жидкостью составляют поверхности пористой плотины, ограничивающие район фильтрации вверх и вниз по потоку (линии ABC и EF). На данные поверхности

действует гидростатическое давление; полный потенциальный напор вдоль них может быть принят постоянным и равным возвышению жидкой поверхности. Эти границы являются эквипотенциальными линиями.

3) Линия фильтрации (или кривая депрессии) CD есть самая верхняя линия тока в области течения. В каждой точке вдоль этой линии давление в порах равно атмосферному и поэтому полный напор равен геометрическому напору, т.е. $u = H = x_2$ в произвольной точке CD. Кроме того, эта кривая является линией тока.

4) Поверхность высачивания – это поверхность, где вода просачивается сквозь грунт в воздух. Так как давление на такой границе постоянно и равно атмосферному, полный напор равен возвышению ($u = x_2$). Эта граница не является ни эквипотенциальной линией, ни линией тока.

Рассмотрим двумерный случай: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 0$ и, кроме того, $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $i, j = 1, 2$, т.е. оси координат являются главным направлением тензора коэффициента фильтрации. Будем решать смешанную краевую задачу, связанную с определением подземной части гидросооружения:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3)$$

$$u|_{AE} = u_1, \quad u|_{FC} = u_3, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma_0 u \Big|_{\text{ABC} \cup \text{A'B'C'}} = \gamma_0(x, y), \quad (5)$$

где $\frac{\partial u}{\partial N} = k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y)$ – производная по конормали; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали; u_1, u_3 – постоянные величины. Часть границы области A'B'C' (рис. 2) – неизвестная линия, которую обозначим через $\partial\Omega_*$. В частном случае, когда ABC и A'B'C' – непроницаемые границы, имеем $\sigma_0 = 0$ и $\gamma_0 = 0$.

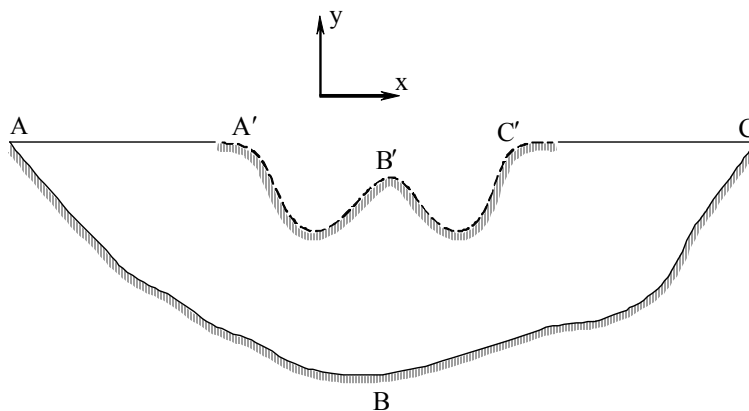


Рис. 2

Предполагаем, что точки A' и C' неизвестны. Так как у нас $\partial\Omega_*$ означает неизвестную границу, то согласно теории на ней задается дополнительное, так называемое «геометрическое условие» (или «кинематическое условие»)

$$u = \xi(s) \text{ на } \partial\Omega_*, \quad (6)$$

где ξ означает заданный напор на подземном контуре гидросооружения.

2. Общие положения теории R-функций

Наиболее общим методом учета априорной информации аналитического и геометрического характера, содержащейся в краевой задаче, является метод R-функций, разработанный школой академика НАН Украины В.Л. Рвачёва. Рассмотрим общие положения теории этого метода [9]. Этот раздел носит вспомогательный характер и призван объяснить используемые в разделе 3 понятия и преобразования.

Сформулируем обратную задачу аналитической геометрии. Пусть в R^2 задан геометрический объект Ω с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ и требуется построить функцию $\omega(x, y)$, положительную внутри Ω , отрицательную вне Ω и равную нулю на $\partial\Omega$. Уравнение $\omega(x, y) = 0$ будет в неявной форме определять геометрическое место точек, представляющих границу $\partial\Omega$ области Ω .

Определение 1. R-функцией (функцией В.Л. Рвачева), соответствующей разбиению числовой оси на интервалы $(-\infty, 0)$ и $[0, +\infty)$, называется такая функция, знак которой вполне определяется знаками ее аргументов, т.е. функция $z = f(x, y)$ называется R-функцией, если существует такая булева функция F , что $S[z(x, y)] = F[S(x), S(y)]$, где двужначный предикат $S(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$

Наиболее часто используется система R-функций \mathfrak{R}_α :

$$x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x+y-\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}), \quad x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{1+\alpha}(x+y+\sqrt{x^2+y^2-2\alpha xy}), \quad \bar{x} \equiv -x.$$

Здесь $-1 < \alpha(x, y) \leq 1$, $\alpha(x, y) \equiv \alpha(y, x) \equiv \alpha(-x, y) \equiv \alpha(x, -y)$.

Пусть область Ω может быть сконструирована из более простых (опорных) областей $\Omega_1 = \{\omega_1(x, y) \geq 0\}, \dots, \Omega_m = \{\omega_m(x, y) \geq 0\}$ с помощью теоретико-множественных операций объединения, пересечения и дополнения. Тогда области Ω можно поставить в соответствие предикат

$$\Omega = F(\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m), \quad (7)$$

который принимает значение 1, если $(x, y) \in \bar{\Omega}$, и значение 0, если $(x, y) \notin \bar{\Omega}$.

Переход от предикатной формы задания области (7) к обычному, принятому в аналитической геометрии, уравнению для границы области осуществляется с помощью формальной замены Ω на $\omega(x, y)$, Ω_i на $\omega_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots, m$), а символы $\{\cap, \cup, \neg\}$ – на символы R-операций $\{\wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg\}$ соответственно. Получим в итоге аналитическое выражение $\omega(x, y)$, определяющее в элементарных функциях требуемое уравнение $\omega(x, y) = 0$ границы $\partial\Omega$. При этом для внутренних точек области $\omega(x, y) > 0$, а для внешних $\omega(x, y) < 0$.

Определение 2. Уравнение $\omega(x, y) = 0$ границы $\partial\Omega$ области $\Omega \subset R^2$ называется нормализованным на границе $\partial\Omega$ до n -го порядка, если функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет

условиям $\omega|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = -1$, $\frac{\partial^l\omega}{\partial\mathbf{n}^l}|_{\partial\Omega} = 0$ ($l=2, 3, \dots, n$), где \mathbf{n} – вектор внешней нормали

к $\partial\Omega$, определенный в ее регулярных точках.

Нормализованное до первого порядка уравнение $\omega(x, y) = 0$ может быть получено из уравнения $\omega_1(x, y) = 0$ следующим образом.

Теорема. Если $\omega(x, y) \in C^m(R^2)$ удовлетворяет условиям $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ и $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} > 0$, то

функция $\omega_1 \equiv \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + |\nabla\omega|^2}} \in C^{m-1}(R^2)$, где $|\nabla\omega| \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2}$, удовлетворяет усло-

виям $\omega_1|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = -1$ во всех регулярных точках границы $\partial\Omega$.

Если $|\nabla\omega_1| \neq 0$ в $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, то для построения нормализованного до первого порядка уравнения можно воспользоваться более простой формулой $\omega \equiv \frac{\omega_1}{|\nabla\omega_1|}$.

Рассмотрим схему применения аппарата теории R-функций для решения краевых задач. Задача расчета физического поля сводится к отысканию в некоторой области Ω решения u уравнения $Au = f$ при следующих условиях на границе $\partial\Omega$ области Ω : $L_i u = \varphi_i$, $i = 1, \dots, m$, где A и L_i – заданные дифференциальные операторы (L_i в частном случае могут представлять собой тождественный оператор); f и φ_i – функции, определенные соответственно внутри области Ω и на участках $\partial\Omega_i$ ее границы. Участки $\partial\Omega_i$ не обязательно все различные и могут совпадать со всей границей $\partial\Omega$. Приведенные в постановках краевых задач функции u , f , φ_i и операторы A и L_i называются аналитическими компонентами краевой задачи; область Ω , ее граница $\partial\Omega$, участки границы $\partial\Omega_i$ – геометрическими компонентами. Существование двух разнородных видов информации (аналитической и геометрической) является серьезным препятствием при отыскании решения краевой задачи. При исследовании и решении краевых задач необходимо не только учитывать вид формул, входящих в постановку задачи, но и приводить геометрическую информацию к аналитическому виду, позволяющему включать ее в разрешающий алгоритм. Осуществить эту процедуру позволяет метод R-функций.

С помощью нормализованного уравнения можно строить пучки функций, нормальная производная которых, либо произвольная линейная комбинация нормальной производной и самой функции на границе области принимает заданные значения. Для этого введем

сначала следующий оператор: $D_1 \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$, где $\omega(x, y)$ – нормализованное уравнение

границы области. При этом для произвольной достаточно гладкой функции f на границе области $\partial\Omega$ будет иметь место $D_1 f|_{\partial\Omega} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega}$, где \mathbf{n} – вектор внешней нормали к границе. Аналог оператора D_1 , соответствующий участкам $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$, будем

обозначать через $D_1^{(i)} \equiv \frac{\partial\omega_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}$, где $\omega_i(x, y)$ – нормализованные уравнения участков

границы $\partial\Omega_i$. Можно доказать, что $D_1\omega = 1 + O(\omega)$, $D_1(\omega\Phi) = (D_1\omega)\Phi + \omega D_1\Phi = \Phi + O(\omega)$, где $\omega(x, y)$ – нормализованное уравнение границы области.

Определение 3. Общей структурой решения краевой задачи называется выражение $u = V(\Phi, \omega, \{\omega_i\}_{i=1}^m, \{\varphi_j\}_{j=1}^m)$, которое при любом выборе неопределенной компоненты Φ точно удовлетворяет всем краевым условиям задачи. Здесь V – оператор, зависящий от геометрии области Ω и участков $\partial\Omega_i$ ее границы, а также операторов краевых условий, но не зависящий от вида оператора A и функции f .

Соответственно, частной структурой решения будем называть выражение вида $u = V_i(\Phi, \omega, \omega_i, \varphi_j)$, при любом выборе неопределенной компоненты точно удовлетворяющее лишь граничному условию на i -м участке границы $\partial\Omega$.

Таким образом, структура решения осуществляет продолжение граничных условий внутрь области.

Задача построения уравнения сложного геометрического объекта является частным случаем более общей проблемы, когда искомая функция φ принимает на различных участках $\partial\Omega_i$ границы области Ω заданные значения φ_i , т.е.

$$\varphi = \varphi_i \text{ на } \partial\Omega_i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (8)$$

Для простоты будем считать, что φ_i – элементарные функции, определенные везде в области $\Omega \cup \partial\Omega$. С применением методики, описанной выше, конструируются функции ω_i^0 , равные нулю везде на $\partial\Omega$, за исключением участка $\partial\Omega_i$. Тогда функция

$$\varphi = \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i \omega_i^0 \right) \left(\sum_{j=1}^m \omega_j^0 \right)^{-1} \quad (9)$$

удовлетворяет условиям (8) и определена везде в области, за исключением точек, общих для различных участков. Вместо выражения (9) можно также применять формулу

$$\varphi = \left(\sum_{i=1}^m \varphi_i \omega_i^{-1} \right) \left(\sum_{j=1}^m \omega_j^{-1} \right)^{-1}, \quad (10)$$

где $\omega_i = 0$ – уравнение участка $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$, причем $\omega_i > 0$ вне $\partial\Omega_i$. При приближении к участку $\partial\Omega_i$ функция $\omega_i \rightarrow 0$ и предельные значения функции φ совпадают со значениями соответствующей функции φ_i .

Оператор “склеивания” граничных значений, определяемый какой-либо из приведенных формул (9), (10), будем обозначать в дальнейшем ЕС ($ЕС\varphi_i = \varphi$).

Практически все приближенные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных основаны на сведении бесконечномерной задачи к конечномерной. В методе R-функций это достигается представлением неопределенной компоненты Φ структуры решения в виде суммы $\Phi(x, y) \approx \Phi_n(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x, y)$, где $\varphi_k(x, y)$ – известные

элементы полной функциональной последовательности, а c_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – неизвестные коэффициенты разложения. Неопределенные функции, входящие в структурные формулы, должны выбираться так, чтобы наилучшим образом (в том или ином смысле) удовлетворить основному дифференциальному уравнению задачи. Методы поиска приближений к неопределенным функциям могут быть самыми различными, например, можно воспользоваться вариационными (Ритца, наименьших квадратов и т.д.), проекционными (Галёркина, коллокаций и т.д.), сеточными и другими методами.

3. Построение структуры решения краевой задачи

Будем предполагать, что уравнение (4) эллиптическое невырождающееся, т.е. при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в Ω выполнено неравенство $k_{11}t_1^2 + k_{22}t_2^2 \geq \mu_0(t_1^2 + t_2^2)$, $\mu_0 > 0$.

3. Построение структуры решения краевой задачи

Будем предполагать, что уравнение (4) эллиптическое невырождающееся, т.е. при всех $t_1, t_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ в Ω выполнено неравенство $k_{11}t_1^2 + k_{22}t_2^2 \geq \mu_0(t_1^2 + t_2^2)$, $\mu_0 > 0$.

Введем следующие обозначения:

$$Au \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad Nu \equiv k_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\mathbf{n}, x) + k_{11} \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, y),$$

$\partial\Omega_* = A'B'C'$ – свободная граница, $\partial\Omega_1 = AA' \cup C'C$, $\partial\Omega_2 = ABC$.

Пусть функция $\omega'(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \omega'(x, y) = 0 \text{ на } AA'; \quad 2) \omega'(x, y) > 0 \text{ в } \Omega \cup A'B'C' \cup C'C \cup ABC; \quad 3) \left. \frac{\partial \omega'}{\partial \mathbf{n}} \right|_{AA'} = -1,$$

а функция $\omega''(x, y)$ – следующими:

$$1) \omega''(x, y) = 0 \text{ на } C'C; \quad 2) \omega''(x, y) > 0 \text{ в } \Omega \cup A'B'C' \cup AA' \cup ABC; \quad 3) \left. \frac{\partial \omega''}{\partial \mathbf{n}} \right|_{C'C} = -1.$$

Такие функции всегда могут быть построены по описанной в п. 2 методике.

Продолжим краевые условия (4) по формуле (10) внутрь области. Функция

$$\varphi(x, y) = \frac{u_3 \omega'(x, y) + u_1 \omega''(x, y)}{\omega'(x, y) + \omega''(x, y)}$$

определена всюду в $\bar{\Omega}$ и $\varphi|_{\partial\Omega_1} = \begin{cases} u_1 & \text{на } AA', \\ u_3 & \text{на } C'C. \end{cases}$ Пусть $\gamma(x, y) = ЕС\gamma_0$, $\sigma(x, y) = ЕС\sigma_0$ – про-

должение функций γ и σ внутрь области. Тогда задача (3) – (6) запишется в виде:

$$Au = 0 \text{ в } \Omega, \quad (11)$$

$$u|_{\partial\Omega_1} = \varphi|_{\partial\Omega_1}, \quad (12)$$

$$Nu + \sigma u|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*} = \gamma|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*}, \quad (13)$$

$$u = \xi(x, y) \text{ на } \partial\Omega_*. \quad (14)$$

Если $\partial\Omega_*$ была бы заданной границей, то краевая задача (11) – (13) могла бы быть сведена к нахождению минимума соответствующего квадратичного функционала.

В данном случае мы сразу не можем находить минимум полученного функционала, так как область Ω , по которой ведется интегрирование, и часть её границы $\partial\Omega_*$ неизвестны. Поэтому для полного решения задачи необходимо использовать и условие (14).

Для решения поставленной задачи сформируем итерационный процесс следующим образом. Пусть получено k -е приближение к свободной границе $\partial\Omega_*^{(k)}$. Тогда получим конкретную область $\Omega^{(k)}$ с известной границей.

Определим функцию $u^{(k)}(x, y)$ как решение задачи

$$Au^{(k)} = 0 \text{ в } \Omega^{(k)}, \quad (15)$$

$$u^{(k)}|_{\partial\Omega_1} = \varphi|_{\partial\Omega_1}, \quad (16)$$

$$Nu^{(k)} + \sigma u^{(k)}|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}} = \gamma|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}}. \quad (17)$$

Для решения задачи (15) – (17) воспользуемся методом R-функций.

Пусть уравнение $\partial\Omega_*^{(k)}$ представлено в виде $y = h(x)$, причем $y - h(x) > 0$ в

$\Omega^{(k)} \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, тогда $\omega_*^{(k)}(x, y) = \frac{y - h(x)}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}}$ обладает следующими свойствами:

$$1) \omega_*^{(k)}(x, y) = 0 \text{ на } \partial\Omega_*^{(k)}; \quad 2) \omega_*^{(k)}(x, y) > 0 \text{ в } \Omega^{(k)} \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2; \quad 3) \left. \frac{\partial\omega_*^{(k)}}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_*^{(k)}} = -1, \quad \mathbf{n} -$$

внешняя нормаль.

Пусть $\omega_1(x, y)$ и $\omega_2(x, y)$ обладают свойствами:

- 1) $\omega_1(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_1$; $\omega_2(x, y) = 0$ на $\partial\Omega_2$;
- 2) $\omega_1(x, y) > 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}$; $\omega_2(x, y) > 0$ в $\Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_*^{(k)}$;
- 3) $\left. \frac{\partial\omega_1}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_1} = -1$; $\left. \frac{\partial\omega_2}{\partial\mathbf{n}} \right|_{\partial\Omega_2} = -1$.

Далее строим

$$\tilde{\omega}(x, y) = \omega_2(x, y) \wedge_{\alpha} \omega_*^{(k)}(x, y),$$

$$\bar{\Gamma} = (l_1, l_2) = \frac{1}{\sqrt{\left(k_{11} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(k_{22} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2 + \tilde{\omega}^2}} \left(k_{11} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}, k_{22} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y} \right).$$

Вектор $\bar{\Gamma}$ определен всюду в $\Omega^{(k)}$ и на границе совпадает с вектором единичной внутренней конормали. Тогда дифференциальный оператор $D_1^{\bar{\Gamma}}u = \frac{\partial u}{\partial x} l_1 + \frac{\partial u}{\partial y} l_2$ обладает

свойством: $-\sqrt{\left(k_{11} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(k_{22} \frac{\partial\tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2 + \tilde{\omega}^2} D_1^{\bar{\Gamma}}u \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}} = Nu|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_*^{(k)}}$. Значит, краевое условие (17) можно записать в виде

$$SD_1^{\bar{1}}u^{(k)} - \sigma u^{(k)} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega^{(k)}} = -\gamma \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega^{(k)}}, \quad (18)$$

где $S = \sqrt{\left(k_{11} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(k_{22} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}\right)^2} + \tilde{\omega}^2$. Продолжив краевое условие (16) внутрь области $\Omega^{(k)}$,

получим частичную структуру решения краевой задачи (15) – (17), удовлетворяющую краевому условию (16), в виде

$$u^{(k)} = \varphi + \omega_1 \Phi, \quad (19)$$

где Φ – неопределенная функция.

Будем предполагать, что $(\bar{1}, \nabla \tilde{\omega}) \geq 0$. Используя оператор $D_1^{\bar{1}}$, краевое условие (18) заменим равенством

$$SD_1^{\bar{1}}u^{(k)} - \sigma u^{(k)} = -\gamma + \tilde{\omega} \Psi, \quad (20)$$

где Ψ – неопределенная функция. Неопределенную функцию Φ , входящую в формулу (19), представим в виде $\Phi = \Phi_0 + \tilde{\omega} \Phi_1$ и подставим (19) в (20):

$$SD_1^{\bar{1}}(\varphi + \omega_1 \Phi_0 + \omega_1 \tilde{\omega} \Phi_1) - \sigma(\varphi + \omega_1 \Phi_0 + \omega_1 \tilde{\omega} \Phi_1) = -\gamma + \tilde{\omega} \Psi, \\ SD_1^{\bar{1}}\varphi + SD_1^{\bar{1}}(\omega_1 \Phi_0) + S\omega_1 \Phi_1 D_1^{\bar{1}}\tilde{\omega} + S\tilde{\omega} D_1^{\bar{1}}(\omega_1 \Phi_1) - \sigma\varphi - \sigma\omega_1 \Phi_0 - \sigma\omega_1 \tilde{\omega} \Phi_1 = -\gamma + \tilde{\omega} \Psi. \quad (21)$$

Слагаемые, содержащие $\tilde{\omega}$, могут быть поглощены членом $\tilde{\omega} \Psi$ за счет произвольности функции Ψ . Это дает право переписать (21) в виде

$$SD_1^{\bar{1}}\varphi + SD_1^{\bar{1}}(\omega_1 \Phi_0) + S\omega_1 D_1^{\bar{1}}\tilde{\omega} \Phi_1 - \sigma\varphi - \sigma\omega_1 \Phi_0 = -\gamma + \tilde{\omega} \Psi_1,$$

где Ψ_1 – неопределенная функция. К левой и правой частям последней формулы прибавим функцию $\tilde{\omega}(S + \delta\omega_1)\Phi_1$, где $\delta = 1 - (\bar{1}, \nabla \tilde{\omega}) > 0$:

$$SD_1^{\bar{1}}\varphi + SD_1^{\bar{1}}(\omega_1 \Phi_0) + (S\omega_1 D_1^{\bar{1}}\tilde{\omega} + S\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}\omega_1)\Phi_1 - \sigma\varphi - \sigma\omega_1 \Phi_0 = -\gamma + \tilde{\omega} \Psi_2,$$

где Ψ_2 – новая неопределенная функция. Находим отсюда

$$\Phi_1 = \frac{-SD_1^{\bar{1}}\varphi - SD_1^{\bar{1}}(\omega_1 \Phi_0) + \sigma\varphi + \sigma\omega_1 \Phi_0 - \gamma + \tilde{\omega} \Psi_2}{\omega_1(SD_1^{\bar{1}}\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}) + S\tilde{\omega}}.$$

Подставив Φ_1 в $u^{(k)} = \varphi + \omega_1 \Phi_0 + \omega_1 \tilde{\omega} \Phi_1$, получим общую структуру решения краевой задачи (15) – (17):

$$u^{(k)} = \varphi + \omega_1 \Phi_0 + \frac{\omega_1 \tilde{\omega}}{\omega_1(SD_1^{\bar{1}}\tilde{\omega} + \delta\tilde{\omega}) + S\tilde{\omega}} [-SD_1^{\bar{1}}\varphi - SD_1^{\bar{1}}(\omega_1 \Phi_0) + \sigma\varphi + \sigma\omega_1 \Phi_0 - \gamma + \tilde{\omega} \Psi_2]. \quad (22)$$

Неопределенные компоненты Φ_0 и Ψ_2 структуры (22) можно аппроксимировать, например, каким-либо вариационным методом. При этом получим функцию $u_m^{(k)}$ – приближенное решение задачи (15) – (17). Ясно, что условию на свободной границе оно не удовлетворит.

4. Алгоритм уточнения уравнения свободной границы

Для итерационного уточнения уравнения свободной границы построим алгоритм, основанный на использовании точечного метода наименьших квадратов и условия (14).

Уравнение свободной границы $\partial\Omega_*^{(k+1)}$ для следующей $(k+1)$ -й итерации ищем в виде:

$$y^{(k+1)} = \sum_{r=0}^n c_r^{(k+1)} \psi_r(x), \quad (23)$$

где n – натуральное число, $c_r^{(k+1)}$ ($r=0, 1, 2, \dots, n$) – неизвестные коэффициенты, $\psi_0(x), \dots, \psi_n(x)$ – базисные функции (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.д.). Пусть $a^{(k)}$ и $c^{(k)}$ – абсциссы точек $A^{(k)}$ и $C^{(k)}$. Положим $d^{(k)} = |c^{(k)} - a^{(k)}|$. Выберем натуральное число N такое, что $N > n$, и зададим систему точек (узлов)

$$x_l = a^{(k)} + \frac{N-1}{N-1} d^{(k)}, \quad l=1, 2, \dots, N. \text{ Обозначим } y_l^{(k+1)} = \sum_{r=0}^n c_r^{(k+1)} \psi_r(x_l).$$

Кроме единичной нормали $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ введем в рассмотрение конормаль $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ согласно правилу: $v_1 = \frac{k_{11}n_1}{S}$, $v_2 = \frac{k_{22}n_2}{S}$, где $S = [(k_{11}, n_1)^2 + (k_{22}, n_2)^2]^{\frac{1}{2}}$, $n_1 = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x})$, $n_2 = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y})$.

Из условий (13) на $\partial\Omega_*^{(k)}$ имеем $S \frac{\partial u^{(k)}(P_1)}{\partial v} = \gamma(P_1) - \sigma u^{(k)}(P_1)$, откуда, приближенно заменяя $u^{(k)}(P_1) \approx u_m^{(k)}(P_1)$, получим $\frac{\partial u^{(k)}(P_1)}{\partial v} \approx \frac{1}{S} [\gamma(P_1) - \sigma u_m^{(k)}(P_1)] = Q(P_1)$, где $u_m^{(k)}(P_1)$ – значение приближенного решения исходной задачи для области $\Omega^{(k)}$ с границей $\partial\Omega_*^{(k)}$ в точке P_1 , точка $P_1 = (x_1, y_1)$ лежит на $\partial\Omega_*^{(k)}$.

Кинематическое условие в точках, лежащих на $\partial\Omega_*^{(k)}$, очевидно, не выполняется. Пусть $\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ – точка нормали (рис. 3) к $\partial\Omega_*^{(k)}$, проходящей через P_1 и лежащей на $\partial\Omega_*^{(k+1)}$, в которой (14) выполняется приближенно, т.е. $u^{(k)}(\tilde{P}_1) - \xi(\tilde{P}_1) \approx 0$, откуда, разлагая в окрестности точки P_1 в ряд Тейлора и ограничиваясь линейным приближением, имеем

$$\begin{aligned} \xi(\tilde{P}_1) - u^{(k)}(\tilde{P}_1) &= \xi(P_1) - u^{(k)}(P_1) + |\tilde{P}_1 - P_1| \left[\frac{\partial \xi(P_1)}{\partial v} - \frac{\partial u^{(k)}(P_1)}{\partial v} \right] \approx \\ &\approx \xi(P_1) - u_m^{(k)}(P_1) + |\tilde{P}_1 - P_1| \left[\frac{\partial \xi(P_1)}{\partial v} - Q(P_1) \right]. \end{aligned}$$

Из $\Delta P P_1 \tilde{P}_1$ получим

$$\tilde{x}_1 - x_1 = |\tilde{P}_1 - P_1| \cos(v, x), \quad \tilde{y}_1 - y_1 = |\tilde{P}_1 - P_1| \cos(v, y). \quad (24)$$

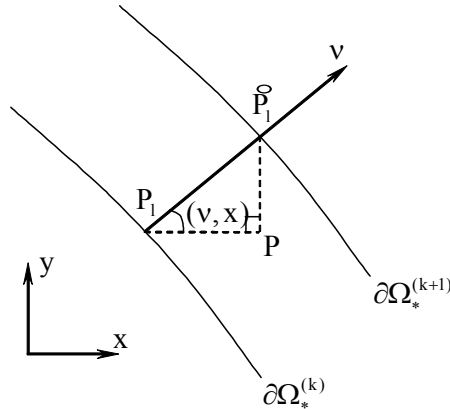


Рис. 3

Из (24) вытекает, что

$$|\tilde{P}_1 - P_1| = \left| \frac{u_m^{(k)}(P_1) - \xi(P_1)}{\frac{\partial \xi(P_1)}{\partial v} - Q(P_1)} \right|. \quad (25)$$

Согласно (25) из (24) имеем соотношение для вычисления координат точек \tilde{P}_1 , лежащих на $\partial\Omega_*^{(k+1)}$:

$$\tilde{x}_1 = x_1 + \cos(v, x) \left| \frac{u_m^{(k)}(P_1) - \xi(P_1)}{\frac{\partial \xi(P_1)}{\partial v} - Q(P_1)} \right|, \quad \tilde{y}_1 = y_1 + \cos(v, y) \left| \frac{u_m^{(k)}(P_1) - \xi(P_1)}{\frac{\partial \xi(P_1)}{\partial v} - Q(P_1)} \right|. \quad (26)$$

Для нахождения коэффициентов в уравнении кривой $\partial\Omega_*^{(k+1)}$ потребуем, чтобы кривая каким-то образом определялась через множество точек $\tilde{P}_l = (\tilde{x}_l, \tilde{y}_l)$, $l=1, 2, \dots, N$. Для этого воспользуемся точечным методом наименьших квадратов: потребуем, чтобы выражение

$$R = \sum_{l=1}^N \left[\tilde{y}_l - \sum_{r=0}^n c_r^{(k+1)} \psi_r(\tilde{x}_l) \right]^2$$

имело минимальное значение, где значения \tilde{x}_l и \tilde{y}_l

берутся из (26). Необходимое условие минимума $\frac{\partial R}{\partial c_r^{(k+1)}} = 0$, $r=0,1,2,\dots,n$, дает систему

из $n+1$ линейных алгебраических уравнений, что позволяет определить $n+1$ параметров $c_0^{(k+1)}, c_1^{(k+1)}, \dots, c_n^{(k+1)}$. После определения всех параметров из (34) кривая $y^{(k+1)}$ будет известной, значит, имеем известную область $\Omega^{(k+1)}$. На следующей $(k+2)$ -й итерации строится приближенное решение $u_m^{(k+2)}$ для новой области $\Omega^{(k+1)}$. Итерация проводится до тех пор, пока “расстояние” между $\partial\Omega_*^{(k)}$ и $\partial\Omega_*^{(k+1)}$ не станет достаточно малым:

$\max_{1 \leq l \leq N} \sqrt{(x_l^{(k+1)} - x_l^{(k)})^2 - (y_l^{(k+1)} - y_l^{(k)})^2} < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ – наперед заданное достаточно малое число.

Выводы

Для краевой задачи теории фильтрации со свободной границей в работе впервые получена структура решения и предложен алгоритм уточнения уравнения свободной границы. Предложенные методы можно использовать при проектировании различных гидротехнических сооружений, в частности, для предотвращения последствий паводков. Этим и определяется *научная новизна и практическая значимость* полученных результатов.

Список литературы: 1. Бурак Я.Й., Чапля С.Я., Чернуха О.Ю. Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. К.: Наук. думка, 2006. 272 с. 2. Бомба А.Я., Присяжнюк І.М. Задачі типу “фільтрація-конвекція” у трьохзв’язних областях з умовами усереднення // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2005. Т. 48, № 2. С. 53 – 58. 3. Ляшко И.И., Сергиенко Н.В., Мистецкий Г.Е., Скопецкий В.В. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ. К.: Наук. думка, 1977. 288 с. 4. Ляшко И.И., Великоиваненко Н.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. К.: Наук. думка, 1973. 264 с. 5. Шаманский В.Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ. К.: Наук. думка, 1969. 376 с. 6. Вабищевич П.Н. Численные методы решения задач со свободной границей. М., Изд-во Моск. ун-та, 1987. 164 с. 7. Сидоров М.В., Стороженко А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. 2004. №4. С. 58 – 61. 8. Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R-функций // Радиоэлектроника и информатика. 2010. № 2. С. 24-30. 9. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.

Поступила в редколлегию 16.02.2010

Блишун Александр Павлович, ст. гр. ПМм-09-1 факультета прикладной математики и менеджмента ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы математической физики. Увлечения и хобби: покер, футбол. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Сидоров Максим Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, математическая физика, теория R-функций и её приложения, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: всемирная история, история искусств. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.

Яловега Ирина Георгиевна, канд. техн. наук, ст. преп. кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, анализ динамических систем, стохастический анализ и его приложения. Увлечения и хобби: оригами. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.