ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ КІНЦЕВИМ ТЕМПЕРАТУРНИМ РЕЖИМОМ У ОДНОРІДНОМУ СТРИЖНІ

Гибкіна Н.В., Подусов Д.Ю., Сидоров М.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки
e-mail: denispodusov@gmail.com

У роботі розглядається задача оптимального керування нагріванням однорідного стрижня з метою встановлення у кінцевий момент часу у ньому температурного режиму, що є якнайближчим до бажаного розподілу температур.

Розглянемо однорідний стрижень $0 \le x \le L$ з теплоізольованою бічною поверхнею (внутрішні джерела тепла відсутні) і з заданим температурним режимом на його кінцях. Через $u = u(x,t)$ позначимо температуру в стрижні в момент часу t. Нехай $u\big|_{t=0} = \varphi(x)$, $0 \le x \le L$, – розподіл температури в стрижні в початковий момент часу $t = 0$. У роботі розв'язується наступна задача керування нагріванням стрижня: керуючи температурним режимом на кінцях стрижня, необхідно привести розподіл температури у стрижні у заданий момент часу $T > 0$ якомога ближче до заданого розподілу температур $y(x)$, $0 \le x \le L$.

Формальна постановка задачі оптимального керування кінцевим температурним станом стрижня полягає у мінімізації функціоналу:

$$J(\boldsymbol{\mu}) = \left\| u(x,T;\boldsymbol{\mu}) - y(x) \right\|^2_{L_2(0,\,L)} = \int_0^L \left(u(x,T;\boldsymbol{\mu}) - y(x) \right)^2 dx \tag{1}$$

за умови, що $u = u(x,t) = u(x,t;\boldsymbol{\mu})$ є розв'язком початково-крайової задачі:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le L, \tag{3}$$

$$\left(-\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_1 u \right)\Bigg|_{x=0} = \mu_1(t),\ t \ge 0, \left(\alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 u \right)\Bigg|_{x=L} = \mu_2(t),\ t \ge 0, \tag{4}$$

де a^2, L, α_1, α_2, β_1, β_2 – задані додатні константи, $\varphi(x)$ – задана функція з $L_2(0,L)$.

Керування крайовим режимом $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1(t), \mu_2(t))$ обиратимемо з множини $\mathrm{M} = \{\boldsymbol{\mu} = (\mu_1(t), \mu_2(t)) \in L_2(0,T) \times L_2(0,T)$, де

$$\mu_1^{\min} \le \mu_1(t) \le \mu_1^{\max},\ \mu_2^{\min} \le \mu_2(t) \le \mu_2^{\max} \text{ майже всюди на } [0,T]\}. \tag{5}$$

Розв'язок задачі (2)-(4), отриманий методом Фур'є, має вигляд:

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n a^2 t} \Phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t f_n(\tau)\, e^{-\lambda_n a^2 (t-\tau)} d\tau \cdot \Phi_n(x) + \\ + \frac{x^2}{2\alpha_2 L + \beta_2 L^2} \mu_2(t) + \frac{(x-L)^2}{2\alpha_1 L + \beta_1 L^2} \mu_1(t). \end{gathered} \tag{6}$$

Апроксимацію функцій керування $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ в (6) обиратимемо у вигляді

$$\mu_1(t) = \sum_{k=1}^{m_1} q_k Q_k(t), \quad \mu_2(t) = \sum_{j=1}^{m_2} r_j R_j(t),$$

де $\{Q_k\}$, $\{R_j\}$ – системи базисних функцій у $L_2(0,T)$, а коефіцієнти q_k, r_j, $k = \overline{1, m_1}$, $j = \overline{1, m_2}$, визначаються з розв'язку задачі мінімізації (1) з обмеженнями (5).

1. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 482 с.

2. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 368 с.