

О ПОСТРОЕНИИ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К ПОЛОЖИТЕЛЬНОМУ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ЛАНЕ-ЭМДЕНА

Колосова С.В., канд. физ.-мат. наук, доцент, Луханин В.С., аспирант,
Сидоров М.В., канд. физ.-мат. наук, доцент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

lanakol@ukr.net, vovanot@mail.ru, mac_sim@list.ru

В работе рассматриваются вопросы существования, единственности и возможности построения двусторонних приближений, которые сходятся к положительному решению задачи Дирихле для уравнения Лане-Эмдена $-\Delta u = u^q$ в Ω , $u = 0$ на $\partial\Omega$. Для исследования указанной задачи используются методы теории нелинейных операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах. Рассматриваются два случая: $q > 0$ и $q < 0$. Получены условия для значений параметра q , при которых могут быть построены двусторонние приближения, сходящиеся к единственному положительному решению задачи.

Ключевые слова: двусторонние приближения, инвариантный конусный отрезок, вогнутость оператора, псевдовогнутость оператора, положительные решения.

ПРО ПОБУДОВУ ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ ДО ДОДАТНОГО РОЗВ'ЯЗКУ РІВНЯННЯ ЛАНЕ-ЕМДЕНА

Колосова С.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент, Луханін В.С., аспірант,
Сидоров М.В., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Харківський національний університет радіоелектроніки

lanakol@ukr.net, vovanot@mail.ru, mac_sim@list.ru

У роботі розглядаються питання про існування, єдиність та можливість побудови двобічних наближень для додатного розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лане-Емдена $-\Delta u = u^q$ в Ω , $u = 0$ на $\partial\Omega$. Дослідження цієї задачі проводиться методами теорії нелінійних операторних рівнянь у напівупорядкованих просторах. Розглядаються два випадки: $q > 0$ і $q < 0$. Отримано умови, яким повинен задовольняти параметр q , щоб для розглядуваної задачі можна було побудувати двобічні наближення до додатного розв'язку.

Ключові слова: двобічні наближення, інваріантний конусний відрізок, угнутість оператора, псевдоугнутість оператора, додатний розв'язок.

ON THE CONSTRUCTION OF TWO-SIDED APPROXIMATIONS TO THE POSITIVE SOLUTION OF THE LANE-EMDEN EQUATION

Kolosova S.V., Ph.D. in Physis and Maths, associate professor, Lukhanin V.S., postgraduate,
Sidorov M.V., Ph.D. in Physis and Maths, associate professor

Kharkov National University of Radioelectronics

lanakol@ukr.net, vovanot@mail.ru, mac_sim@list.ru

In this paper the existence, uniqueness and possibility of constructing the two-sided approximations for the Dirichlet problem for the Lane-Emden equation $-\Delta u = u^q$ in Ω , $u = 0$ on $\partial\Omega$ are considered. An investigation of the problem is based on methods in nonlinear operator equations theory. Two cases are considered: $q > 0$ and $q < 0$. In both of them nonlinear operator equation $u = Tu$ is set in correspondence to our problem in the cone K of functions that are non-negative over $C(\bar{\Omega})$, $Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})u^q(\mathbf{s})d\mathbf{s}$, $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ is the Green's function for the operator $-\Delta$ for the first boundary value problem in Ω . Operator T is monotone, if $q > 0$, and is antitone, if $q < 0$, that significantly affects properties of operator T . Investigated properties of operator T allowed us to draw a conclusion about the existence and uniqueness of the positive solution of the problem in both cases.

When $0 < q < 1$ the construction scheme of two-sided approximations looks like $v_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})v_n^q(\mathbf{s})d\mathbf{s}$,

$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) w_n^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$, $n = 1, 2, \dots$. As initial approximations we choose $u_1 = v_0$ and $u_1 = w_0$, where $\langle v_0, w_0 \rangle$ is an invariant cone segment to operator T such that $v_0 \leq u \leq w_0$ and $T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle$. It looks like $\langle v_0, w_0 \rangle = \langle \varepsilon \omega(\mathbf{x}), \alpha \rangle$, where ε and α are selected from the conditions $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{q-1} \int_{\Omega} \omega^{2q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \cdot \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$ and $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \alpha^{1-q}$. Here $\omega(\mathbf{x})$ is a function such that $\omega(\mathbf{x}) > 0$ in Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ on $\partial\Omega$. Herewith it has been proven that $\varepsilon \omega = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_k \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \alpha$.

When $q < 0$ the construction scheme of two-sided approximations looks like $w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_n^p(\mathbf{s})}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, where $p = -q$. As initial approximation we choose $w_0 = \beta = \text{const} > 0$, where β is selected from the condition $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta^{1+p}$. Herewith it has been proven that $w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n-1} \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta$.

In the paper the results of the computational experiment for $q = \frac{1}{2}$ and $q = -\frac{1}{2}$ are presented, that allow us to draw a conclusion about efficiency of the suggested method.

Keywords: two-sided approximations, invariant cone segment, operator concavity, operator pseudo-concavity, positive solutions.

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке наблюдается большой интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Математическими моделями таких процессов зачастую являются нелинейные краевые задачи вида

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f(u) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbf{R}^n, \\ u &> 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Среди аналитических методов исследования краевых задач вида (1) следует выделить методы, которые можно назвать конструктивными, т.е. которые указывают конкретные пути построения искомого решения. К таким методам относятся различные итерационные методы, которые в силу простоты вычислительных схем легче, чем другие методы, реализуются на ЭВМ. Среди итерационных методов выделим класс двусторонних процессов, которые монотонно сверху и снизу аппроксимируют искомые решения. Двусторонние методы обладают тем важным преимуществом по сравнению с другими приближенными методами, что они дают возможность на каждом шаге итерационного процесса заключить искомое решение в «вилку» и тем самым получить удобную апостериорную оценку погрешности вычислений.

Известно [2, 3], что в классе непрерывных функций задача (1) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) f(u(\mathbf{s})) d\mathbf{s}, \tag{2}$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функция Грина оператора $-\Delta$ для первой краевой задачи в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)$.

Исследование ряда вопросов, связанных с положительными решениями краевой задачи (1), а, следовательно, и эквивалентного ей операторного уравнения (2), таких, как доказательство существования и единственности положительного решения, сходимость последовательных приближений, будем проводить методами теории нелинейных операторных уравнений в полупорядоченных пространствах [2 – 4].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Целью работы является рассмотрение возможности построения двусторонних приближений к положительному решению краевой задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^q \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

в зависимости от значений параметра q . Дифференциальное уравнение задачи (3) называется уравнением Лане-Эмдена, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная область. Если $q > 0$, задача (3) является математической моделью задачи о распределении плотности газа в звёздах [1].

На конусе K неотрицательных в $C(\Omega)$ функций (такой конус является нормальным [2, 3]) введем в рассмотрение нелинейное операторное уравнение

$$u = Tu,$$

где

$$Tu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) u^q(\mathbf{s}) ds. \quad (4)$$

Свойства оператора T существенно зависят от значений параметра q . В связи с этим дальнейшее рассмотрение разобьем на две части: $q > 0$ и $q < 0$.

2. ПОСТРОЕНИЕ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ (СЛУЧАЙ МОНОТОННОГО ОПЕРАТОРА)

Пусть $q > 0$. Тогда, очевидно, из $u_1 \leq u_2$ ($u_1, u_2 \in K$) следует $Tu_1 \leq Tu_2$, и, следовательно, оператор T является монотонным на конусе K . Кроме того, оператор T вполне непрерывен на K [3, 4].

Из свойства u_0 -вогнутости оператора T вида (4), $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) ds$, при условии неубывания

функции $f(u) = u^q$ следует единственность положительного решения задачи (1) [3, 4].

u_0 -вогнутость определяется выполнением условия: при любой $u > 0$ и любом $t \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$f(tu) - tf(u) > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega. \quad (5)$$

В рассматриваемом случае условие (5) принимает вид:

$$(tu)^q > tu^q,$$

откуда $t^{q-1} > 1$. Последнее имеет место при значении q таком, что $0 < q < 1$.

Выделим для оператора T инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\}$ такой, что $T \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle$. Для этого достаточно положить $v_0 = 0$ и найти элемент w_0 , удовлетворяющий неравенству $Tw_0 \leq w_0$ [2]. В нашем случае для $v_0 = 0$ имеем $Tv_0 = 0$, следовательно, левый конец конусного отрезка при использовании схемы последовательных приближений

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

остаётся неподвижным, т.е. вместо двусторонних приближений получаем только приближение сверху. Мы предлагаем положить $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon \omega(\mathbf{x})$, $\varepsilon = \text{const} > 0$, $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω , $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, при этом для определения значения ε воспользуемся соотношением

$$v_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) v_0^q(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \geq v_0(\mathbf{x}),$$

что приводит к условию

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega(\mathbf{x}) \leq \varepsilon^{q-1} \int_{\Omega} \omega^{2q}(\mathbf{s}) d\mathbf{s} \cdot \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}. \quad (6)$$

Далее, положим $w_0 = \alpha = \text{const} > 0$. Условие $Tw_0 \leq w_0$ приводит к следующему:

$$Tw_0 = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \alpha^q d\mathbf{s} = \alpha^q \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \alpha^q u_0 \leq \alpha,$$

откуда имеем

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \alpha^{1-q}. \quad (7)$$

Таким образом, конусный отрезок $\langle \varepsilon \omega(\mathbf{x}), \alpha \rangle$ является инвариантным для оператора T вида (4) при $0 < q < 1$, если ε и α выбраны из условий (6) и (7). Для ускорения сходимости последовательных приближений желательно брать α как можно меньшим, а ε – как можно большим.

Функция $\omega(\mathbf{x})$ с указанными свойствами может быть построена с использованием конструктивного аппарата теории R -функций [5].

Учитывая рассмотренные свойства оператора T приходим к выводу, что последовательные приближения, построенные по схеме

$$u_{n+1} = Tu_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

сходятся по норме пространства $C(\bar{\Omega})$ к единственному неотрицательному решению u^* задачи (3) при $0 < q < 1$, каково бы ни было начальное приближение $u_1 \in \langle v_0, w_0 \rangle$ [2]. Выбирая в качестве начальных приближений $u_1 = v_0$ и $u_1 = w_0$, получаем неравенства

$$\varepsilon \omega = v_0 \leq v_1 \leq \dots \leq v_k \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_k \leq \dots \leq w_1 \leq w_0 = \alpha.$$

3. ПОСТРОЕНИЕ ДВУСТОРОННИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ (СЛУЧАЙ АНТИТОННОГО ОПЕРАТОРА)

Пусть $q < 0$. Обозначим $q = -p$, $p > 0$. Задача (3) принимает вид

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{u^p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &> 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Аналогично разделу 2 на конусе K неотрицательных в $C(\bar{\Omega})$ функций, который является нормальным, вводим в рассмотрение нелинейное операторное уравнение

$$u = Bu,$$

где

$$Bu = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{1}{u^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s}. \quad (9)$$

В этом случае из $u_1 \leq u_2$ ($u_1, u_2 \in K$) следует $Bu_1 \geq Bu_2$, и, следовательно, оператор B явля-

ется антитонным на конусе K . Кроме того, оператор B вида (9) является вполне непрерывным в $C(\bar{\Omega})$, т.к. $f(u) = \frac{1}{u^p}$ при $0 < u < +\infty$, $p > 0$ является непрерывной функцией [3, с. 264].

Учитывая антитонность оператора B , проведем построение инвариантного конусного отрезка $\langle v_0, w_0 \rangle = \{u \mid v_0 \leq u \leq w_0\}$, такого, что $B \langle v_0, w_0 \rangle \subset \langle v_0, w_0 \rangle$, следующим образом.

Рассмотрим схему последовательных приближений

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_n^p(\mathbf{s})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

В (10) положим $w_0 = \beta = \text{const} > 0$, получаем

$$w_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{\beta^p} = \frac{1}{\beta^p} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{u_0(\mathbf{x})}{\beta^p}.$$

Нашей целью является выбором β достичь выполнения неравенства $w_1 \leq w_0$, или $\frac{u_0(\mathbf{x})}{\beta^p} \leq \beta$, откуда для β получим условие

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta^{1+p}. \quad (11)$$

Далее, элемент $w_2(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_1^p(\mathbf{s})}$ вследствие антитонности оператора B удовлетворяет неравенствам $w_1 \leq w_2 \leq w_0 = \beta$. Продолжая процесс (10), получим неравенства

$$w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n-1} \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta,$$

и, следовательно, можно положить

$$v_0 = w_1(\mathbf{x}).$$

Для исследования оператора B вводим в рассмотрение сопутствующий [3, 4] оператор

$$\hat{B}(v, w) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w^p(\mathbf{s})}.$$

Оператор B является псевдогогнутым [3, 4], если существуют положительные числа A, A^* , такие, что для всех $v, w \in K$ и фиксированной функции $u_0(\mathbf{x}) \in K$ выполняется условие

$$Au_0 \leq \hat{B}(v, w) \leq A^*u_0, \quad (12)$$

и, кроме того, для всех $t \in (0; 1)$ выполняется неравенство

$$\hat{B}\left(tv, \frac{w}{t}\right) > t\hat{B}(v, w). \quad (13)$$

Пусть $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$. Построив инвариантный конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle$, где v_0 и w_0 являются ограниченными функциями, тем самым доказали выполнение условия (12).

Рассмотрим условие (13):

$$\int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{t^p}{w^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} - t \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{1}{w^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{t^p - t}{w^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} = (t^p - t) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w^p(\mathbf{s})} > 0,$$

откуда следует, что $t^p - t > 0$, или $t^{p-1} > 1$, последнее неравенство выполняется при $p-1 < 0$, и, следовательно, $0 < p < 1$.

u_0 -псевдогогнутость оператору B обеспечивает условие: для всех $v, w \in K$ и $t \in (0; 1)$ существует функция $\eta(v, w, t) > 0$ такая, что

$$\hat{B}\left(tv, \frac{w}{t}\right) \geq t\hat{B}(v, w)[1 + \eta(v, w, t)]. \quad (14)$$

Составляем условие (14):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{t^p}{w^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} - (1 + \eta)t \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{1}{w^p(\mathbf{s})} d\mathbf{s} = \\ & = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left[\frac{t^p}{w^p(\mathbf{s})} - (1 + \eta) \frac{t}{w^p(\mathbf{s})} \right] d\mathbf{s} = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{w^p(\mathbf{s})} [t^p - (1 + \eta)t] d\mathbf{s} \geq 0. \end{aligned}$$

Чтобы последнее выполнялось, достаточно потребовать выполнение условия $t^p - (1 + \eta)t \geq 0$, откуда получаем для η : $\eta \leq t^{p-1} - 1$.

Поскольку ранее на p было наложено условие $0 < p < 1$ и так как $t \in (0; 1)$, приходим к выводу, что (14) выполняется при любой $\eta(v, w, t)$, удовлетворяющей условию $0 < \eta \leq t^{p-1} - 1$, что и доказывает u_0 -псевдогогнутость оператора B .

Рассмотренные свойства оператора B позволяют сделать вывод, что задача (8) имеет единственное положительное решение u^* , последовательные приближения к которому можно получить по схеме

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \frac{d\mathbf{s}}{w_n^p(\mathbf{s})}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

при этом имеем неравенства

$$v_0 = w_1 \leq w_3 \leq \dots \leq w_{2n+1} \leq \dots \leq u^* \leq \dots \leq w_{2n} \leq \dots \leq w_2 \leq w_0 = \beta.$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Вычислительный эксперимент для задачи (3) проведен в области

$$\Omega = \{ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1 \} \subset \mathbf{R}^2$$

для $q = \frac{1}{2}$ и $q = -\frac{1}{2}$.

Для $q = \frac{1}{2}$ имеем задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \sqrt{u} \quad \text{в } \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

с монотонным оператором T (см. раздел 2). Последовательные приближения к решению задачи (15) формируем по схеме

$$u_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \sqrt{u_n(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\rho r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}}{r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}}$ – функция Грина оператора Лапласа для первой краевой задачи в круге единичного радиуса, $\rho = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$, точки \mathbf{s} и \mathbf{s}^1 симметричны относительно окружности единичного радиуса, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}}$, $r_{\mathbf{x}\mathbf{s}^1}$ – расстояния между точками \mathbf{x} , \mathbf{s} и \mathbf{x} , \mathbf{s}^1 соответственно.

Очевидно, что функция $\omega(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2$ удовлетворяет условиям $\omega(\mathbf{x}) > 0$ в Ω и $\omega(\mathbf{x}) = 0$ на $\partial\Omega$, кроме того, $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \omega(\mathbf{x}) = 1$ и $\int_{\Omega} \omega(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{\pi}{2}$. Тогда из условия (6) для определения ε получаем неравенство

$$1 \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\pi}{2} \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}.$$

Нами получено, что $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G^2(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{1}{8\pi}$. Тогда $\sqrt{\varepsilon} \leq \frac{1}{16}$, или $\varepsilon \leq \frac{1}{256}$.

Для определения α воспользуемся условием (7)

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \sqrt{\alpha}.$$

Поскольку $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = \frac{1}{4}$, то $\sqrt{\alpha} \geq \frac{1}{4}$, или $\alpha \geq \frac{1}{16}$.

Пусть $\alpha = \frac{1}{16}$, $\varepsilon = \frac{1}{256}$ и положим $w_0(\mathbf{x}) = \alpha$, $v_0(\mathbf{x}) = \varepsilon\omega(\mathbf{x})$. В таблицах 1 и 2 приведены соответственно значения $w_n(\mathbf{x})$ и $v_n(\mathbf{x})$ при $n = 0, 2, 4, 6, 8$ в точках области Ω с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0, 2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0, 4}$, $j = \overline{0, 5}$ (значения в остальных четвертях симметричны).

Как видно из таблиц 1 и 2, в каждой из выбранных точек $w_n(\mathbf{x}) \geq v_n(\mathbf{x})$, значения $w_n(\mathbf{x})$ убывают, а значения $v_n(\mathbf{x})$ – возрастают, причем к десятой итерации значения приближений $w_n(\mathbf{x})$, $v_n(\mathbf{x})$ установились в третьем знаке после запятой.

В таблице 3 приведены значения $w_{10}(\mathbf{x})$ (в числителе) и $v_{10}(\mathbf{x})$ (в знаменателе) в точках области Ω с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0, 2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0, 4}$, $j = \overline{0, 5}$ (значения в остальных четвертях симметричны).

Поскольку $v_{10} \leq u^* \leq w_{10}$ и $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} (w_{10}(\mathbf{x}) - v_{10}(\mathbf{x})) = 0,14 \cdot 10^{-3}$, то с точностью $0,7 \cdot 10^{-4}$ имеем

$$u^* \approx u_{10} = \frac{w_{10} + v_{10}}{2}.$$

На рис. 1 и 2 приведены соответственно поверхность и линии уровня приближенного решения $u_{10}(x_1, x_2)$, а на рис. 3 приведены графики $w_n(x_1, 0)$ (сплошная линия) и $v_n(x_1, 0)$ (пунктирная линия) при $n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$.

Таблица 1

$\frac{\varphi}{\rho}$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	n
0	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0
	0,053293	0,053293	0,053293	0,053293	0,053293	0,053293	2
	0,045773	0,045773	0,045773	0,045773	0,045773	0,045773	4
	0,043993	0,043993	0,043993	0,043993	0,043993	0,043993	6
	0,043558	0,043558	0,043558	0,043558	0,043558	0,043558	8
	0,043450	0,043450	0,043450	0,043450	0,043450	0,043450	10
0,2	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0
	0,050791	0,050802	0,050815	0,050779	0,050825	0,050856	2
	0,043583	0,043593	0,043603	0,043570	0,043609	0,043634	4
	0,041888	0,041897	0,041907	0,041875	0,041912	0,041937	6
	0,041474	0,041483	0,041493	0,041461	0,041498	0,041522	8
	0,041371	0,041380	0,041390	0,041358	0,041395	0,041419	10
0,4	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0
	0,043433	0,043448	0,043477	0,043407	0,043519	0,043580	2
	0,037157	0,037169	0,037193	0,037130	0,037224	0,037273	4
	0,035710	0,035722	0,035745	0,035684	0,035774	0,035822	6
	0,035357	0,035369	0,035392	0,035332	0,035421	0,035468	8
	0,035270	0,035282	0,035304	0,035244	0,035333	0,035380	10
0,6	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0
	0,031778	0,031821	0,031880	0,031693	0,031933	0,032077	2
	0,027055	0,027090	0,027138	0,026976	0,027174	0,027291	4
	0,026000	0,026034	0,026080	0,025925	0,026114	0,026226	6
	0,025743	0,025777	0,025822	0,025668	0,025856	0,025967	8
	0,025679	0,025713	0,025758	0,025605	0,025792	0,025903	10
0,8	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0
	0,016748	0,016835	0,016897	0,016592	0,016910	0,017141	2
	0,014173	0,014243	0,014292	0,014039	0,014293	0,014474	4
	0,013620	0,013688	0,013735	0,013491	0,013734	0,013908	6
	0,013485	0,013552	0,013599	0,013358	0,013599	0,013770	8
	0,013452	0,013519	0,013565	0,013325	0,013565	0,013736	10
1	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0,062500	0
	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	8
	0	0	0	0	0	0	10

Таблица 2

$\frac{\varphi}{\rho}$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	n
0	0,043315	0,043315	0,043315	0,043315	0,043315	0,043315	10
	0,043018	0,043018	0,043018	0,043018	0,043018	0,043018	8
	0,041852	0,041852	0,041852	0,041852	0,041852	0,041852	6
	0,037493	0,037493	0,037493	0,037493	0,037493	0,037493	4
	0,024131	0,024131	0,024131	0,024131	0,024131	0,024131	2
	0,003906	0,003906	0,003906	0,003906	0,003906	0,003906	0
0,2	0,041242	0,041251	0,041261	0,041230	0,041266	0,041290	10
	0,040960	0,040969	0,040979	0,040947	0,040984	0,041008	8
	0,039849	0,039858	0,039867	0,039837	0,039872	0,039896	6
	0,035699	0,035707	0,035715	0,035688	0,035720	0,035741	4
	0,022978	0,022983	0,022988	0,022971	0,022992	0,023006	2
	0,003750	0,003750	0,003750	0,003750	0,003750	0,003750	0
0,4	0,035160	0,035172	0,035194	0,035134	0,035223	0,035269	10
	0,034919	0,034931	0,034953	0,034894	0,034982	0,035028	8
	0,033972	0,033984	0,034005	0,033947	0,034033	0,034078	6
	0,030434	0,030444	0,030464	0,030412	0,030489	0,030529	4
	0,019595	0,019602	0,019615	0,019582	0,019631	0,019658	2
	0,003281	0,003281	0,003281	0,003281	0,003281	0,003281	0
0,6	0,025599	0,025633	0,025678	0,025525	0,025712	0,025822	10
	0,025424	0,025457	0,025502	0,025350	0,025536	0,025645	8
	0,024735	0,024767	0,024810	0,024663	0,024843	0,024950	6
	0,022159	0,022188	0,022227	0,022094	0,022256	0,022351	4
	0,014274	0,014293	0,014318	0,014233	0,014338	0,014400	2
	0,002500	0,002500	0,002500	0,002500	0,002500	0,002500	0
0,8	0,013410	0,013477	0,013523	0,013283	0,013523	0,013694	10
	0,013318	0,013384	0,013430	0,013192	0,013430	0,013600	8
	0,012957	0,013021	0,013066	0,012834	0,013066	0,013231	6
	0,011607	0,011665	0,011705	0,011498	0,011705	0,011853	4
	0,007482	0,007519	0,007545	0,007411	0,007545	0,007642	2
	0,001406	0,001406	0,001406	0,001406	0,001406	0,001406	0
1	0	0	0	0	0	0	10
	0	0	0	0	0	0	8
	0	0	0	0	0	0	6
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 3

$\varphi \backslash \rho$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0,043450	0,043450	0,043450	0,043450	0,043450	0,043450
	0,043315	0,043315	0,043315	0,043315	0,043315	0,043315
0,2	0,041371	0,041380	0,041390	0,041358	0,041395	0,041419
	0,041242	0,041251	0,041261	0,041230	0,041266	0,041290
0,4	0,035270	0,035282	0,035304	0,035244	0,035333	0,035380
	0,035160	0,035172	0,035194	0,035134	0,035223	0,035269
0,6	0,025599	0,025633	0,025678	0,025525	0,025712	0,025822
	0,025599	0,025633	0,025678	0,025525	0,025712	0,025822
0,8	0,013410	0,013477	0,013523	0,013283	0,013523	0,013694
	0,013410	0,013477	0,013523	0,013283	0,013523	0,013694
1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0

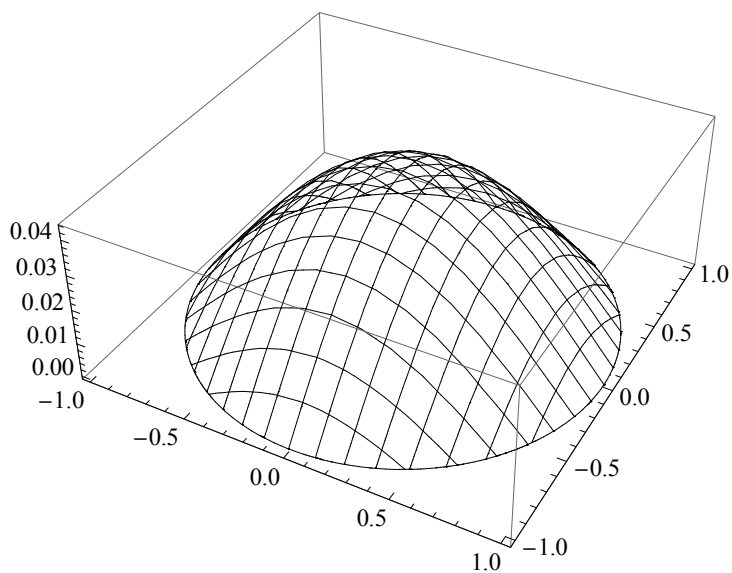


Рис. 1 – Поверхность приближенного решения $u_{10}(x_1, x_2)$ задачи (15)

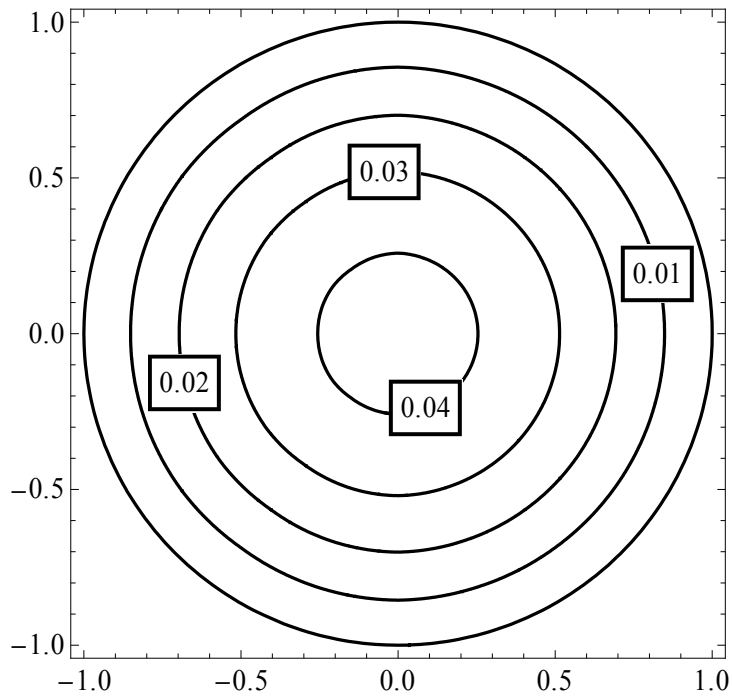


Рис. 2 – Линии уровня приближенного решения $u_{10}(x_1, x_2)$ задачи (15)

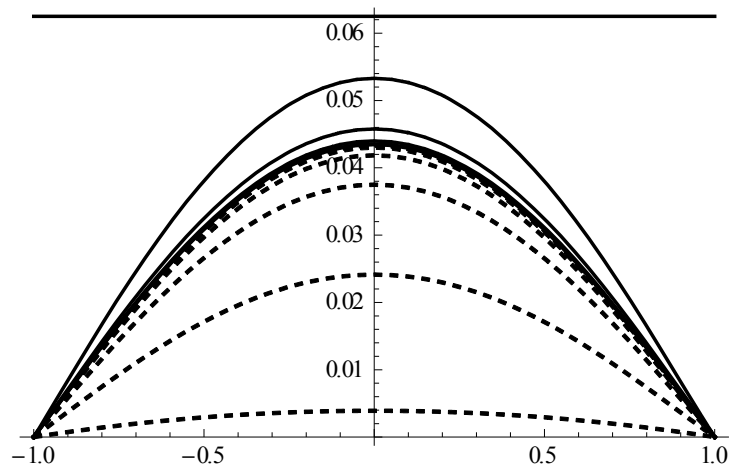


Рис. 3 – Графики $w_n(x_1, 0)$ и $v_n(x_1, 0)$ при $n = 0, 2, 4, 6, 8, 10$

Для $q = -\frac{1}{2}$ имеем задачу

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\
 u|_{\partial\Omega} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

с антитонным оператором T (см. раздел 3). Последовательные приближения к решению задачи (16) формируем по схеме

$$w_{n+1}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{G(\mathbf{x}, \mathbf{s})}{\sqrt{w_n(\mathbf{s})}} d\mathbf{s}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функция Грина оператора Лапласа для первой краевой задачи в круге единичного радиуса.

Из условия (10) получаем для определения β неравенство

$$\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} \leq \beta \sqrt{\beta}.$$

Поскольку $\max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s} = 0,25$, то $\beta \sqrt{\beta} \geq 0,25$, или $\beta \geq \sqrt[3]{0,25^2}$. Возьмем $\beta = 0,6$ и положим $w_0(\mathbf{x}) = \beta$. В таблице 4 приведены значения $w_n(\mathbf{x})$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ в точках области Ω с полярными координатами (ρ_i, φ_j) , где $\rho_i = 0,2i$, $\varphi_j = \frac{\pi j}{10}$, $i = \overline{0, 4}$, $j = \overline{0, 5}$ (значения в остальных четвертях симметричны).

Как видно, точное решение $u^*(\mathbf{x})$ задачи (16) в области Ω заключено в «вилку», образованную функциями $w_4(\mathbf{x})$ и $w_5(\mathbf{x})$. Норма разности между приближениями $w_4(\mathbf{x})$ и $w_5(\mathbf{x})$ составила

$$\|w_5(\mathbf{x}) - w_4(\mathbf{x})\|_{C(\bar{\Omega})} = 0,35 \cdot 10^{-2}.$$

Тогда с точностью $0,18 \cdot 10^{-2}$ имеем

$$u^* \approx u_{4,5} = \frac{w_4 + w_5}{2}.$$

На рис. 4 и 5 приведены соответственно поверхность и линии уровня приближенного решения $u_{4,5}(x_1, x_2)$, а на рис. 6 приведены графики $w_n(x_1, 0)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Таблица 4

$\frac{\varphi}{\rho}$	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	n
0	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0
	0,541100	0,541100	0,541100	0,541100	0,541100	0,541100	2
	0,469525	0,469525	0,469525	0,469525	0,469525	0,469525	4
	0,434664	0,434664	0,434664	0,434664	0,434664	0,434664	5
	0,403033	0,403033	0,403033	0,403033	0,403033	0,403033	3
	0,322749	0,322749	0,322749	0,322749	0,322749	0,322749	1
0,2	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0
	0,523900	0,523943	0,523929	0,523495	0,523644	0,523694	2
	0,454439	0,454464	0,454411	0,453961	0,454013	0,453967	4
	0,420711	0,420733	0,420680	0,420257	0,420299	0,420249	5
	0,389945	0,389970	0,389933	0,389559	0,389623	0,389605	3
	0,309877	0,309928	0,309975	0,309749	0,309955	0,310085	1
0,4	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0
	0,469964	0,470002	0,469985	0,468975	0,469426	0,469517	2
	0,406635	0,406642	0,406550	0,405536	0,405783	0,405694	4
	0,376447	0,376451	0,376358	0,375407	0,375622	0,375525	5
	0,348666	0,348677	0,348613	0,347764	0,348006	0,347966	3
	0,270996	0,271064	0,271178	0,270697	0,271231	0,271490	1
0,6	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0
	0,375672	0,376026	0,376281	0,373460	0,375182	0,375948	2
	0,323416	0,323686	0,323794	0,321171	0,322442	0,322864	4
	0,299384	0,299631	0,299720	0,297275	0,298429	0,298801	5
	0,276973	0,277211	0,277321	0,275096	0,276208	0,276606	3
	0,206448	0,206702	0,207004	0,205643	0,207013	0,207778	1
0,8	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0
	0,231257	0,232884	0,233752	0,226444	0,231604	0,234574	2
	0,197372	0,198705	0,199298	0,192950	0,196956	0,199073	4
	0,182679	0,183910	0,184449	0,178558	0,182238	0,184169	5
	0,168709	0,169847	0,170368	0,164975	0,168374	0,170167	3
	0,116233	0,116968	0,117436	0,114566	0,117097	0,118799	1
1	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0,600000	0
	0	0	0	0	0	0	2
	0	0	0	0	0	0	4
	0	0	0	0	0	0	5
	0	0	0	0	0	0	3
	0	0	0	0	0	0	1

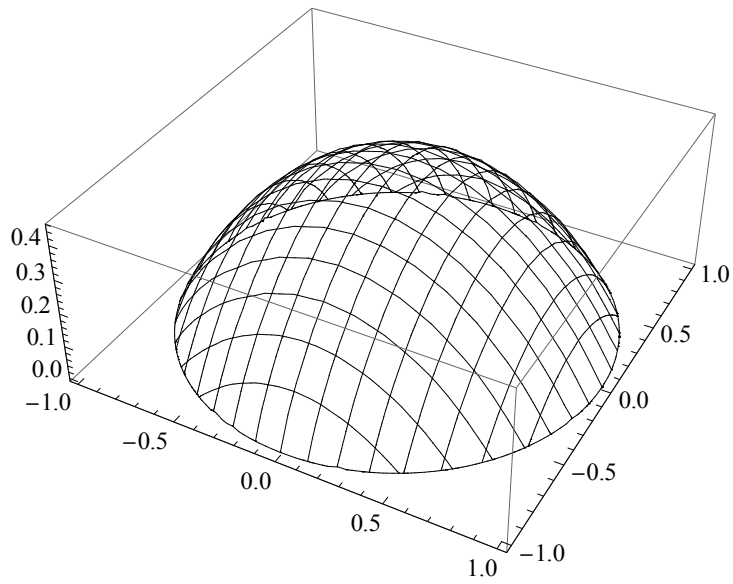


Рис. 4 – Поверхность приближенного решения $u_{4,5}(x_1, x_2)$ задачи (16)

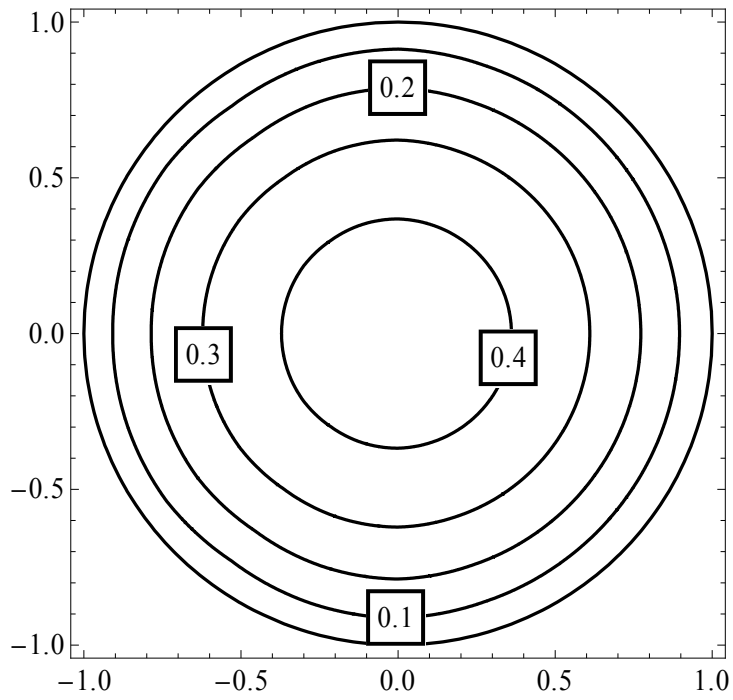


Рис. 5 – Линии уровня приближенного решения $u_{4,5}(x_1, x_2)$ задачи (16)

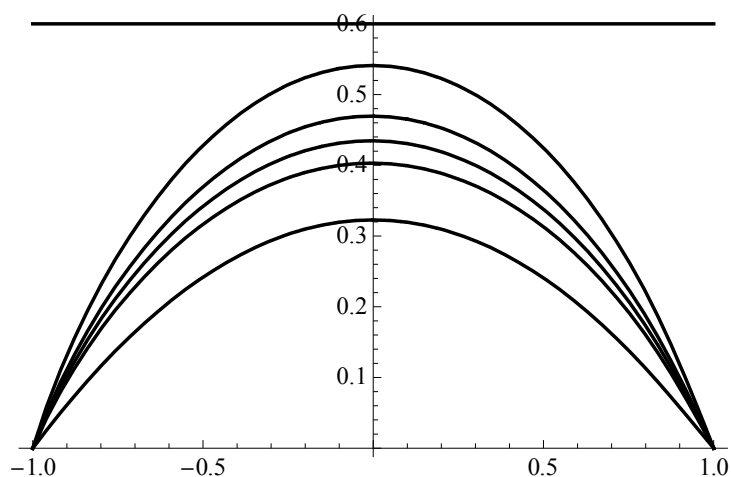


Рис. 6 – Графики $w_n(x_1, 0)$ при $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована возможность построения двусторонних приближений к положительному решению задачи Дирихле для уравнения Лане-Эмдена $-\Delta u = u^q$. Рассмотрены два случая значений параметра q : $q > 0$ и $q < 0$, при этом исследования этих двух задач существенно отличаются одно от другого. В случае $q > 0$ при построении конусного отрезка, если следовать рекомендациям в [2], получаем односторонние приближения сверху. Нами впервые предложен новый подход к построению левого конца конусного отрезка, что позволило получить двусторонние приближения, при этом был использован аппарат теории R-функций [5]. Вычислительные эксперименты, проведенные для $q = -\frac{1}{2}$ и $q = \frac{1}{2}$, продемонстрировали эффективность предложенных методов. Предлагаемый подход может быть использован при решении прикладных задач, математическими моделями которых служат краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галахов Е.И. Положительные решения квазилинейных эллиптических уравнений // Матем. заметки. – Т. 78, вып. 2. – С. 202 – 211.
2. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
3. Опойцев В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов // Труды Моск. матем. общества. – Т. 36, 1978. – С. 237 – 273.
4. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.
5. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

REFERENCES

1. Galakhov, E.I. (2005), "Positive Solutions of Quasilinear Elliptic Equations", *Math. Notes*, vol. 78, Issue 1-2, pp 185-193.
2. Krasnosel'skij, M.A. (1962), *Polozhytel'nye reshenija operatornyh uravnenij* [Positive Solutions of Operator Equations], Fizmatgiz, Moscow, USSR.
3. Opojtcsev, V.I. (1978), "A generalization of the theory of monotone and concave operators",

Trans. Mosc. Math. Soc., vol. 36, pp. 237-273.

4. Opojtsev, V.I. and Khurodze, T.A. (1984), *Nelinejnye operatory v prostranstvakh s konusom* [Nonlinear Operators in Spaces with a Cone], Izdatel'stvo Tbilisskogo Universiteta, Tbilisi, USSR.

5. Rvacev, V.L. (1982), *Teoria R-funkcyj i nekotorye eye prilozhenia* [Theory of R-functions and its some applications], Naukova dumka, Kiev, USSR.