

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ГРАНИЧНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОЛЕБАНИЯМИ СТРУНЫ

Резникова С.А.

Научный руководитель – канд. техн. наук, доц. Гибкина Н.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Науки, 14, каф. Прикладной математики,
тел. (057) 702-14-36), e-mail: svitlana.reznikova@nure.ua

Different mathematical models in many cases reduce to the differential equations of the hyperbolic type. These equations are most frequently found in physical problems concerned with processes of vibration, e.g. the problem of the vibration of a string, membrane, gas, electromagnetic oscillation etc. Characteristic property of the processes, describable by this kind of equations, is finite velocity of their propagation. The purpose of the paper is to investigate the problem of vibration processes, which defined by the hyperbolic equation, and optimal control of these processes.

Дифференциальные уравнения в частных производных являются одним из наиболее сложных и одновременно интересных разделов прикладной математики. Уравнениями в частных производных описывается множество разнообразных физических явлений, поэтому с их помощью можно с успехом моделировать самые сложные явления и процессы (задачи диффузии, гидродинамики, квантовой механики и т. д.).

Одним из основных типов дифференциальных уравнений в частных производных являются гиперболические уравнения. В данной работе рассматриваются уравнения с частными производными второго порядка гиперболического типа, которые наиболее часто встречаются в задачах математической физики, связанных с процессами колебаний.

Представляет интерес управление процессом колебаний с целью формирования таких режимов, которые будут обеспечивать наиболее эффективное протекание исследуемых процессов. Задачи оптимального управления процессом колебаний заключаются в том, чтобы из множества допустимых управлений выбрать наилучшие в определенном смысле управления.

Уравнения гиперболического типа, как правило, не позволяют применять классические методы исследований, что делает их изучение актуальной и сложной задачей.

Рассмотрим формальную постановку задачи для колебательного процесса в одномерном случае, который задается гиперболическим уравнением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \quad (1)$$

с краевыми и начальными условиями:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= \mu_1(t), & u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u|_{x=l} &= \mu_2(t), & \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= \psi(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ не заданы. Изменяя их значения, мы можем управлять процессом колебаний.

Управление будем осуществлять, подбирая краевые условия $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ так, чтобы в указанный момент времени T струна приняла заданное положение $z(x)$. Формально это условие записывается в виде функционала качества:

$$J = \int_0^l (u(x, T) - z(x))^2 dx \rightarrow \min. \quad (3)$$

Управляющие функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ в задаче (1)-(2) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= \sum_{k=1}^m r_k R_k(t), \\ \mu_2(t) &= \sum_{k=1}^m q_k Q_k(t), \end{aligned} \quad (4)$$

где $R_k(x, t)$, $Q_k(x, t)$ – базисные функции, r_k , q_k – неизвестные параметры, $k = \overline{1, m}$. В частности, функции $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ можно искать в виде отрезков ряда Фурье:

$$\begin{aligned} \mu_1(t) &= r_0^2 + \sum_{k=1}^m r_k^1 \sin \frac{\pi kt}{T} + \sum_{k=1}^m r_k^2 \cos \frac{\pi kt}{T}, \\ \mu_2(t) &= q_0^2 + \sum_{k=1}^m q_k^1 \sin \frac{\pi kt}{T} + \sum_{k=1}^m q_k^2 \cos \frac{\pi kt}{T}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для нахождения оптимального выражения для функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ из (4) необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$J = \int_0^l (u(x, T) - z(x))^2 dx \rightarrow \min_{r_k, q_k, k=\overline{1, m}}. \quad (6)$$

Здесь $u(x, T)$ – профиль струны в конечный момент времени T , полученный из решения задачи (1) с краевыми условиями (2) с помощью метода Фурье.

Минимизация функционала (6) по переменным r_k , q_k $k = \overline{1, m}$, позволяет найти такие значения этих параметров, которые обеспечивают оптимальное протекание процесса колебаний, например струны, в смысле близости значения фактического и заданного ее профиля в конечный момент времени T .