

Харьковский национальный университет радиотехники

Кафедра прикладной математики

Стадникова А.В.

**МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ
ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В МНОГОСВЯЗНЫХ
ОБЛАСТЯХ**

Радиотехника и информатика. – 2014. – № 1 (64). – С. 31 – 34.

МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

СТАДНИКОВА А.В.

(Системы и процессы управления)

Рассматривается применение методов R -функций и Ритца к численному анализу квазистационарного перемешивания вязкой несжимаемой жидкости в плоской многосвязной области. Решение задачи перемешивания разбивается на две части: определение поля скоростей течения жидкости и исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости.

Введение

Актуальность исследования. Необходимость численного анализа течений вязких жидкостей возникает во многих прикладных задачах, в частности в задачах перемешивания. Эта проблема связана, в частности, с многочисленными применениями в химической, фармацевтической и пищевой промышленности [3, 12, 18]. Кроме того, проблема перемешивания жидкостей является фундаментальной научной проблемой, связанной с современными концепциями хаотической и регулярной динамики [2, 17]. Однако большинство методов, используемых при моделировании таких процессов, не обладают свойством универсальности и их сложно применять для «непримитивных» областей. В работах Дж. М. Оттино, Х. Арефа, В.В. Мелешко, Т.А. Дунаевой, Т.С. Краснопольской и др. [4, 8, 10, 12] решалась задача перемешивания для таких простых областей, как круг, полукруг, круговой сектор и т.д., однако для изучения процесса перемешивания в более сложных областях, в частности, многосвязных, предложенный ими математический аппарат, не работает. Точно учесть геометрическую информацию, входящую в постановку задачи, можно, используя конструктивный аппарат теории R -функций, предложенный акад. НАН Украины В.Л. Рвачевым [13]. Таким образом, разработка новых методов численного анализа задачи перемешивания в многосвязных областях, основанных на применении метода R -функций, является актуальной научной проблемой.

Цели и задачи исследования. Целью данной работы является разработка нового метода численного анализа квазистационарного процесса перемешивания вязкой несжимаемой жидкости в многосвязной области методами R -функций и Ритца. Решение задачи перемешивания состоит из двух этапов:

1) определение поля скоростей течения жидкости (формализм Эйлера);

2) исследование траекторий движения отдельных частиц жидкости (формализм Лагранжа).

Для решения первой части задачи перемешивания необходимо разработать приближенно-аналитический метод, основанный на принципе суперпозиции и методе R -функций (разбить исходную краевую задачу на более простые, построить структуру решения каждой

из полученных краевых задач, разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты структуры методом Ритца). Для решения второй части задачи перемешивания необходимо составить и решить (используя численные методы решения задачи Коши) систему уравнений движения лагранжевой частицы.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоское квазистационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в области Ω . Пусть область Ω является $(n+1)$ -связной и её граница $\partial\Omega$ состоит из внешнего контура $\partial\Omega_0$ и внутренних контуров $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2, \dots, \partial\Omega_n$; $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n \partial\Omega_i$, причем

$\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 0, 1, \dots, n$, т.е. многосвязность вызывается внесением препятствия в поток. Будем считать, что граница $\partial\Omega$ твердая, а течение в области вызвано попеременным движением внешней и внутренних границ с заданными скоростями.

Решение первой части задачи перемешивания заключается в получении поля скоростей (v_x, v_y) в области течения Ω . Будем считать, что рассматриваемое течение относится к ползущим и нелинейными слагаемыми в уравнениях Навье-Стокса можно пренебречь, т.е. можно ограничиться рассмотрением т.н. приближения Стокса [9].

Плоское квазистационарное стоксово течение будем описывать с помощью функции тока $\psi(x, y, t)$, вводимой соотношениями [9]

$$V_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad V_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для функции тока $\psi(x, y, t)$ можно поставить следующую краевую задачу:

$$\Delta^2\psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$\psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = c_1(t), \dots, \psi|_{\partial\Omega_n} = c_n(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ g_n(t) & \text{на } \partial\Omega_n, \end{cases} \quad (3)$$

где $c_1(t), \dots, c_n(t)$ – некоторые неизвестные заранее функции времени t , \mathbf{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$, Δ^2 – бигармонический оператор,

$$\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Функции $g_0(t), g_1(t), \dots, g_n(t)$ задаются, исходя из заданных скоростей жидкости на $\partial\Omega_0, \partial\Omega_1, \dots, \partial\Omega_n$ соответственно [14].

Для определения $c_1(t), \dots, c_n(t)$ нужно привлечь

дополнительные соображения. Так, $c_1(t), \dots, c_n(t)$ можно найти из условий однозначности давления, которые имеют вид [15]

$$\int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\mathbf{n}} ds = 0, \quad i=1, \dots, n, \quad (4)$$

где Δ – оператор Лапласа,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

2. Решение первой части задачи перемешивания

Для решения задачи (1) – (4) воспользуемся принципом суперпозиции, методом R -функций [13, 15] и методом Ритца [11].

Решение задачи (1) – (4) можно представить в виде

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x, y, t) + \sum_{k=1}^n c_k(t) \cdot \psi_k(x, y), \quad (5)$$

где $\psi_0(x, y, t)$ – решение задачи

$$\Delta^2 \psi_0 = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$\psi_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \\ \dots & \dots \\ g_n(t) & \text{на } \partial\Omega_n, \end{cases} \quad (7)$$

а $\psi_k(x, y)$, $k=1, \dots, n$, – решение задачи

$$\Delta^2 \psi_k = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (8)$$

$$\psi_k|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_k} = 0, \quad \psi_k|_{\partial\Omega_k} = 1, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (9)$$

Если решения задач (6), (7) и (8), (9) найдены, то подставив (5) в (4), получим, что $c_1(t), \dots, c_n(t)$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k(t) \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial\mathbf{n}} ds = - \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial\mathbf{n}} ds, \quad i=1, \dots, n. \quad (10)$$

Единственность решения системы (10) доказывается по схеме аналогичной той, которая была использована в [1] для доказательства обобщения теоремы Стокса.

Решение задачи (6), (7) сведем к решению стационарных задач. Представим функцию $\psi_0(x, y, t)$ в виде

$$\psi_0(x, y, t) = \sum_{j=0}^n g_j(t) \sigma_j(x, y), \quad (11)$$

где $\sigma_j(x, y)$, $j=0, 1, \dots, n$, – решение задачи

$$\Delta^2 \sigma_j = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (12)$$

$$\sigma_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_j}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{на } \partial\Omega_j, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_j, \end{cases} \quad (13)$$

В соответствии с методом R -функций [13] построим структуры решения краевых задач (12), (13) и (8), (9), т.е. пучки функций, точно удовлетворяющие соответствующим краевым условиям.

Известно [14], что структура решения задачи Стокса

$$\Delta^2 \psi = F \quad \text{в } \Omega, \\ \psi|_{\partial\Omega} = \tilde{f}(s), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \tilde{g}(s), \quad s \in \partial\Omega,$$

имеет вид

$$\psi = f - \omega(D_1 f + g) + \omega^2 \Phi,$$

где $f = EC\tilde{f}$, $g = EC\tilde{g}$ – продолжения функций \tilde{f} , \tilde{g} в Ω , оператор D_1 определяется равенством

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y},$$

Φ – неопределенная компонента структуры, а функция $\omega(x, y)$ обладает свойствами

- а) $\omega = 0$ на $\partial\Omega$;
- б) $\omega > 0$ в Ω ;
- в) $\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1$ на $\partial\Omega$, \mathbf{n} – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Пусть $\omega(x, y) = 0$, $\omega_0(x, y) = 0$, ..., $\omega_n(x, y) = 0$ – нормализованные уравнения $\partial\Omega$, $\partial\Omega_0$, ..., $\partial\Omega_n$ соответственно, т.е. функции $\omega(x, y)$, $\omega_0(x, y)$, ..., $\omega_n(x, y)$ удовлетворяют условиям

$$\omega = 0 \quad \text{на } \partial\Omega; \quad \omega > 0 \quad \text{в } \Omega; \quad \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}} = -1 \quad \text{на } \partial\Omega,$$

$$\omega_0 = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_0; \quad \omega_0 > 0 \quad \text{в } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_0);$$

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial\mathbf{n}} = -1 \quad \text{на } \partial\Omega_0,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\omega_n = 0 \quad \text{на } \partial\Omega_n; \quad \omega_n > 0 \quad \text{в } \Omega \cup (\partial\Omega \setminus \partial\Omega_n);$$

$$\frac{\partial\omega_n}{\partial\mathbf{n}} = -1 \quad \text{на } \partial\Omega_n,$$

где \mathbf{n} – внешняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Функции $\omega(x, y)$, $\omega_0(x, y)$, ..., $\omega_n(x, y)$ с указанными свойствами могут быть построены с помощью R -функций для достаточно широкого класса областей [13].

Тогда структура решения задачи (12), (13) имеет вид

$$\sigma_j = -\omega \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i \right)^{-1} + \omega^2 \Phi_j, \quad (14) \\ j = 0, 1, \dots, n,$$

а структура решения задачи (7), (8) имеет вид

$$\psi_k = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} - \omega D_1 \left(\frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} \right) + \omega^2 \Upsilon_k, \quad (15)$$

$$k = 1, \dots, n.$$

Здесь Φ_j , $j = 0, 1, \dots, n$, Υ_k , $k = 1, \dots, n$, – неопределенные компоненты структур.

Для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах (14), (15) воспользуемся методом Ритца [11].

В каждой из задач (8), (9) сделаем замену

$$\psi_k = p_k + u_k, \quad (16)$$

$$\text{где } p_k = \frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} - \omega D_1 \left(\frac{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i}{\sum_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i} \right), \quad u_k = \omega^2 \Phi_k -$$

новая неизвестная функция, $k = 1, \dots, n$. После подстановки (16) в (8), (9) для функций u_k , $k = 1, \dots, n$, получим задачи с однородными краевыми условиями:

$$\Delta^2 u_k = -\Delta^2 p_k \text{ в } \Omega, \quad (17)$$

$$u_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18)$$

С краевыми задачами (17), (18) свяжем оператор A этих краевых задач, действующий по правилу

$$A = \Delta^2$$

на области определения

$$D_A = \left\{ u \mid u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\}.$$

Можно доказать [11], что такой оператор будет положительно определенным. Замкнув множество D_A в норме, порожденной скалярным произведением

$$[u, v] = \iint_{\Omega} \Delta u \Delta v dx dy,$$

получим энергетическое пространство H_A . Тогда по теореме о функционале энергии [11] обобщенное решение задач (17), (18) может быть найдено как

$$u_k = \arg \inf_{u \in H_A} \iint_{\Omega} [(\Delta u)^2 + 2\Delta u \Delta p_k] dx dy, \quad k = 1, \dots, n.$$

Согласно методу Ритца [11] приближенные решения этих вариационных задач будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_k &= \omega^2 \Phi_k \approx u_{k, N} = \omega^2 \Phi_{k, N} = \\ &= \omega^2 \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(k)} \tau_i = \sum_{i=1}^N \alpha_i^{(k)} \varphi_i, \end{aligned}$$

где $k = 1, \dots, n$, $\{\tau_i\}$ – полная в $L_2(\Omega)$ система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.п.), $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$.

По построению последовательность $\{\varphi_i\}$ является координатной:

- 1) $\varphi_i \in D_A \quad \forall i$;
- 2) $\forall N \quad \varphi_1, \dots, \varphi_N$ линейно независимы;
- 3) $\{\varphi_i\}$ полна в H_A .

Тогда для определения неизвестных чисел $\alpha_1^{(k)}$, ..., $\alpha_N^{(k)}$, $k = 1, \dots, n$, необходимо решить систему Ритца

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N [\varphi_i, \varphi_j] \alpha_i^{(k)} &= -(\Delta p_k, \Delta \varphi_j), \\ j &= 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Из теорем сходимости метода Ритца [11] следует, что при $N \rightarrow \infty$ последовательности функций $u_{k, N}$, $k = 1, \dots, n$, сходятся к единственным обобщенным решениям краевых задач (17), (18) как в норме $L_2(\Omega)$, так и в норме H_A . Это значит, что последовательности функций $\psi_{k, N} = p_k + u_{k, N}$, $k = 1, \dots, n$, сходятся в норме $L_2(\Omega)$ к единственным обобщенным решениям задач (8), (9). Условия применимости описанного численного метода формулируются в виде условий $\Delta p_k \in L_2(\Omega)$, $k = 1, \dots, n$.

Аналогично метод Ритца применим для решения задач (12), (13).

В каждой из задач (12), (13) сделаем замену

$$\sigma_j = q_j + v_j, \quad (19)$$

где $q_j = -\omega \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \omega_i \left(\frac{\prod_{k=0}^n \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \omega_i}{\prod_{i \neq k}^n \omega_i} \right)^{-1}$, $v_j = \omega^2 \Upsilon_j$ – новая неизвестная функция, $j = 0, 1, \dots, n$. После подстановки (19) в (12), (13) для функций v_j , $j = 0, 1, \dots, n$, получим задачи с однородными краевыми условиями:

$$\Delta^2 v_j = -\Delta^2 q_j \text{ в } \Omega, \quad (20)$$

$$v_j|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial v_j}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (21)$$

По теореме о функционале энергии [11] обобщенное решение задач (20), (21) может быть найдено как

$$v_j = \arg \inf_{v \in H_A} \iint_{\Omega} [(\Delta v)^2 + 2\Delta v \Delta q_j] dx dy, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Согласно методу Ритца [11] приближенные решения этих вариационных задач будем искать в виде

$$\begin{aligned} v_j &= \omega^2 \Upsilon_j \approx v_{j, M} = \omega^2 \Upsilon_{j, M} = \\ &= \omega^2 \sum_{i=1}^M \beta_i^{(j)} \tau_i = \sum_{i=1}^M \beta_i^{(j)} \varphi_i, \end{aligned}$$

где $j = 0, 1, \dots, n$, $\{\tau_i\}$ – полная в $L_2(\Omega)$ система функций (степенные или тригонометрические полиномы, сплайны и т.п.), $\varphi_i = \omega^2 \tau_i$.

Тогда для определения неизвестных чисел $\beta_1^{(j)}$, ..., $\beta_M^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, n$, необходимо решить систему Ритца

$$\sum_{i=1}^M [\varphi_i, \varphi_k] \alpha_i^{(j)} = -(\Delta q_j, \Delta \varphi_k),$$

$$k = 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, n.$$

Из теорем сходимости метода Рунге [11] следует, что при $M \rightarrow \infty$ последовательности функций $v_{j, M}$, $j = 0, 1, \dots, n$, сходятся к единственным обобщенным решениям краевых задач (20), (21) как в норме $L_2(\Omega)$, так и в норме H_A . Это значит, что последовательности функций $\sigma_{j, M} = q_j + v_{j, M}$, $j = 0, 1, \dots, n$, сходятся в норме $L_2(\Omega)$ к единственным обобщенным решениям задач (12), (13), а последовательность функций $\psi_{0, M} = \sum_{j=0}^n g_j(t) \sigma_{j, M}$ сходится в норме $L_2(\Omega)$ к единственному обобщенному решению задачи (6), (7). Условия применимости описанного численного метода формулируются в виде условий $\Delta q_j \in L_2(\Omega)$, $j = 0, 1, \dots, n$.

3. Решение второй части задачи перемешивания

Для решения второй части задачи перемешивания нужно составить и решить (с использованием численных методов решения задачи Коши) систему уравнений движения лагранжевой частицы:

$$\frac{dx}{dt} = V_x \equiv \frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y \equiv -\frac{\partial \psi(x, y, t)}{\partial x}, \quad (22)$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Далее, полученные траектории движения следует исследовать на наличие и характер хаотического поведения с помощью методов нелинейной динамики (найти и проанализировать стационарные точки, построить фазовые портреты, исследовать эволюции линейного и плоского элементов).

Тем самым, качественный анализ системы (22) позволяет выделить зоны эффективного перемешивания, что иллюстрируется результатами вычислительного эксперимента.

Результаты работы были доложены на трёх международных конференциях:

- Международный симпозиум «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Харьков-Херсон, 10 – 15 июня 2013 г.) [5];

- Международная молодёжная научная конференция «ХЛ Гагаринские чтения» (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 7 – 11 апреля 2014) [7];

- XVIII Международный молодежный форум «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 14 – 16 апреля 2014) [16].

Выводы

Таким образом, в работе впервые предложен и

обоснован метод численного анализа задачи перемешивания вязкой жидкости в многосвязной области. При этом, благодаря использованию метода R -функций, приближенное выражение для функции тока получается в аналитическом виде, что выделяет наш метод среди остальных методов решения задач этого типа. Ещё одним преимуществом предложенного метода является то, что решение может быть получено для достаточно сложной области, что делает его универсальным. Решение второй части задачи перемешивания позволяет моделировать процесс перемешивания, анализировать его эффективность, основываясь на изучении поведения отдельных частиц. Этим и определяется *научная новизна и практическая значимость* работы.

Литература: 1. *Алексидзе М.А.* Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М.: Наука, 1987. 336 с. 2. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3 – 45. 3. *Андреевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Управление хаосом: методы и приложения. II. Приложения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 4. С. 3 – 34. 4. *Ареф Х.* Развитие хаотической адвекции // Нелинейная динам. 2006. Т. 2. № 1. С. 111 – 133. 5. *Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В.* Математическое моделирование процессов перемешивания в многосвязных областях // Труды XVI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2013) (Харьков-Херсон, 10 – 15 июня 2013 г.). С. 132 – 135. 6. *Гибкина Н.В., Роговой Н.С., Сидоров М.В., Стадникова А.В.* Численный анализ процессов перемешивания методом R -функций // Радиоэлектроника и информатика. 2012. № 3. С. 28 – 34. 7. *Гибкина Н.В., Стадникова А.В.* Численный анализ процессов перемешивания в многосвязных областях // Научные труды Международной молодёжной научной конференции «ХЛ Гагаринские чтения» в 9 томах (Москва, «МАТИ» – РГТУ им. К.Э. Циолковского, 7 – 11 апреля 2014). Т. 5. С. 86 – 88. 8. *Дунаева Т.А., Гуржий А.А., Мелешко В.В.* Перемешивание вязкой жидкости в полукруге при малых числах Рейнольдса // Прикладна гідромеханіка. 2001. Т. 3. № 2. С. 15 – 24. 9. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с. 10. *Мелешко В.В., Краснопольская Т.С.* Смешивание вязких жидкостей. // Нелинейная динам. 2005. Т. 1. № 1. С. 69 – 109. 11. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с. 12. *Оттино Дж. М.* Перемешивание жидкостей // В мире науки. 1989. № 3. С. 34 – 44. 13. *Рвачев В.Л.* Теория R -функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. 14. *Сидоров М.В.* О построении структур решений задачи Стокса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. №3. С. 39 – 42. 15. *Сидоров М.В.* Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений // Радиоэлектроника и информатика. 2003. № 1. С. 42 – 44. 16. *Стадникова А.В.* Метод R -функций в задаче математического моделирования процессов перемешивания в многосвязных областях // Материалы XVIII Международного молодежного форума «Радиоэлектроника и молодежь в XXI веке» (Харьков, ХНУРЭ, 14 – 16 апреля 2014). Т. 7. С. 152 – 153. 17. *Табор М.* Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с. 18. *Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей* / Под. ред. А.В. Борисова, И.С.

Мамаева и М.А. Соколовского. Москва-Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2003. 704 с.

Поступила в редколлегию 00.00.0000

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.
Стадникова Анна Викторовна, ассист. каф. прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, численные методы, теория R-функций и её приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (057) 7021436.