МЕТОД ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОНЕЧНОЙ СТРУНЫ

Лондаренко Ю.П.
Научный руководитель – канд. техн. наук, доц. Гибкина Н.В.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
(61166, Харьков, пр. Науки, 14, каф. Прикладной математики,
тел.(057)702-14-36), e-mail: londarenko.julia@gmail.com

The purpose of the paper is to investigate the problem of associated with the processes of the vibration.

Закрепленная на концах струна является источником звука многих музыкальных инструментов. Создателями инструментов и музыкантами были установлены свойства звучащей струны и закономерности, имеющие место при ее колебаниях. Теоретическое обоснование этих результатов может быть получено с помощью математического моделирования колебаний струны. Данные математические модели являются актуальными в наше время и находят свое применение в прикладных задачах физики, техники и других областей.

Особый интерес представляет задача управления колебаниями. Если натянутую струну немного отклонить от состояния равновесия и отпустить или слегка ударить по ней молоточком, то полученная энергия заставит струну совершать колебательные движения. В идеальном случае при отсутствии сопротивления струна будет колебаться бесконечно долго. При наличии сопротивления энергия затратится на преодоление этого сопротивления, колебания будут затухать и через некоторое время прекратятся. Но даже при наличии сопротивления колебания будут совершаться сколь угодно долго, если извне постоянно поступает энергия. В этом случае говорят о вынужденных колебаниях.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях конечной струны. Процесс задается неоднородным гиперболическим уравнением [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + p(x,t) \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

с краевыми начальными условиями:

$$u|_{t=0} = f(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = g(x), \tag{2}$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0.$$

Решением задачи (1), (2) является функция $u = u(x,t)$. Это решение может быть получено методом Фурье, с помощью замены $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где $v = v(x,t)$, является решением неоднородного уравнения, и удовлетворяет следующим краевым и начальным условиям:

$$v|_{t=0}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,$$
$$v|_{x=0}=0, \quad v|_{x=l}=0,$$
а $w=w(x,t)$ решением соответствующего однородного уравнения, и удовлетворяет следующим краевым и начальным условиям:
$$w|_{t=0}=f(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=g(x),$$
$$w|_{x=0}=0, \quad w|_{x=l}=0.$$

Решение v представляет собой вынужденные колебания струны, т.е. такие колебания, которые совершаются под действием внешней возмущающей силы, когда начальные возмущения отсутствуют.

Решение w представляет собой свободные колебания струны, т.е. такие колебания, которые происходят только вследствие начального возмущения.

Сформулируем задачу оптимального управления процессом колебания конечной струны с целью установления ее наилучшего в определенном смысле положения в конечный момент времени. Эта задача сводится к следующему: необходимо так определить оптимальное значение внешней силы $p(x,t)$, воздействующей на струну при $t\in[0,T]$, чтобы полученное решение задачи (1)-(2), было сколь угодно близко к заданному желаемому режиму $z(x)$.

Неизвестную функцию $p(x,t)$ будем искать в виде
$$p(x,t)=\sum_{k=1}^{m} r_k R_k(x,t),$$
где $R_k(x,t)$ – базисные функции, r_k – неизвестные параметры, $k=\overline{1,m}$.

Для нахождения оптимального выражения для функции $p(x,t)$ необходимо решить следующую задачу оптимизации:
$$I=\int_0^l \left(u(x,T)-z(x)\right)^2 dx \to \min. \tag{3}$$

Здесь $u(x,T)$– распределение положения струны, полученное методом Фурье как решение задачи (1) с краевыми условиями (2), в момент времени T.

Минимизация функционала (3) по переменным r_k, $k=\overline{1,m}$, позволяет найти такие значения этих параметров, которые обеспечивают оптимальное протекание процесса в смысле близости значения фактическим и заданным режимом $z(x)$ в конечный момент времени T.

1. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.-368 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XII.