

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Блишун А.П.

**МЕТОД R-ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ
ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ**

Сборник статей VII Международной научно-технической конференции
молодых специалистов, аспирантов и студентов
«Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных
и социальных проблем»

(Россия, г. Пенза, ПГУ, 28 – 31 мая 2013 г.). – С. 11 – 17.

МЕТОД R -ФУНКЦИЙ В ЧИСЛЕННОМ АНАЛИЗЕ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ

Блишун А.П.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков
alexander.blishun@gmail.com

1. Введение. Ухудшение экологической ситуации из-за обильных осадков и паводков делает актуальной проблему исследования фильтрационных течений – течений жидкости в пористом грунте. При математическом моделировании и численном анализе таких течений необходимо поставить и решить краевую задачу математической физики в области сложной геометрии. Построение решений такого класса задач требует развития принципиально новых методик.

Для решения задач математической физики, описывающих фильтрационные течения, используются различные точные и приближенные методы: разделения переменных, методы теории функций комплексного переменного, метод мажорантных областей, метод суммарных представлений, метод фиктивных областей, метод конечных элементов и др. Классические результаты по этим методам отражены в монографиях [3 – 6, 8]. Каждый из перечисленных методов обладает рядом достоинств и недостатков. К основным недостаткам точных методов следует отнести ограниченный круг областей, к которым они могут быть применены, а основным недостатком приближенных методов является то, что при их реализации обычно от рассмотрения геометрически сложных участков границы области фильтрации переходят к более простым, например, составленным из отрезков прямых.

Наиболее точно и полно учесть геометрическую и аналитическую информацию, содержащуюся в краевой задаче, позволяет метод R -функций академика НАН Украины В.Л. Рвачева [9]. Для численного решения задач фильтрации метод R -функций был применен в [1, 2, 10, 11].

Целью настоящей работы является разработка на основе методов R -функций и Ритца новых средств математического моделирования и численного анализа фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями при наличии шпунтов. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: построить структуру решения смешанной краевой задачи теории фильтрации; разработать алгоритм аппроксимации неопределенной компоненты построенной структуры на основании метода Ритца; провести вычислительные эксперименты

2. Постановка задачи и математическая модель. Рассмотрим задачу движения несжимаемой жидкости под гидротехническим сооружением (плотиной). На рис. 1 приведена схема фильтрации. Здесь D – область фильтрации, D_0 – подводная часть плотины (флютбет), $\partial\Omega_0$ – граница подземной части флютбета, $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ – проницаемые участки границы, $\partial\Omega_3$ – шпунт, $\partial\Omega_4$ – водоупор.

Плоскую стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости будем описывать в рамках линейного закона Дарси [8]. Функция тока $\psi(x, y)$, вводимая

соотношениями

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

где $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ – скорость фильтрации, удовлетворяется уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \text{ в } D, \quad (1)$$

где k – коэффициент фильтрации.

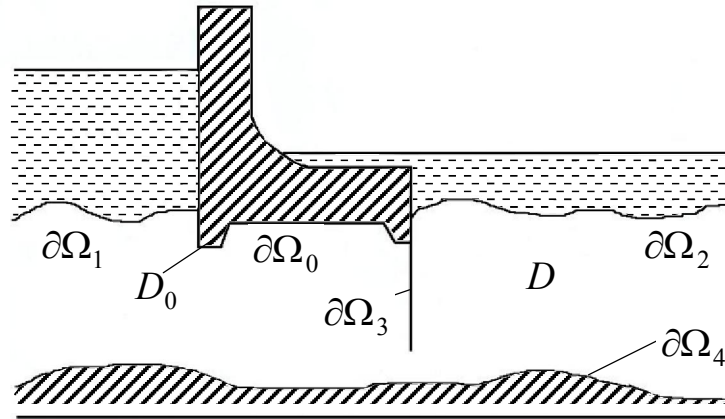


Рис. 1. Схема фильтрации

Дополним уравнение (1) краевыми условиями.

На проницаемых участках границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ следует поставить однородное условие Неймана

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2} = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{n} – внешняя к $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ нормаль. Физический смысл условия (2) заключается в постоянстве напора на $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Граница флютбета $\partial\Omega_0$ со шпунтами $\partial\Omega_3$ и водоупор $\partial\Omega_4$ водонепроницаемы, поэтому нормальная составляющая скорости \mathbf{v} на этих участках границы равна нулю, т.е. они являются линиями тока. Это приводит к следующим краевым условиям:

$$\psi \Big|_{\partial\Omega_4} = Q, \quad (3)$$

$$\psi \Big|_{\partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_3} = 0, \quad (4)$$

где величина Q задаёт общий расход жидкости.

Итак, для определения функции тока фильтрационного течения нужно в области D решить уравнение (1) при краевых условиях (2) – (4).

Будем считать, что все кривые в области фильтрации являются гладкими или кусочно-гладкими, а коэффициент фильтрации k есть непрерывная в \bar{D} функция, причем (1) – эллиптическое невырождающееся уравнение.

Основные трудности, возникающие при численном решении задачи (1) – (4), вызваны неоднородностью грунта (коэффициент фильтрации k зависит от координат), криволинейностью границ области фильтрации и наличием шпунта, который может быть не единственным.

3. Метод численного анализа. Для решения задачи (1) – (4) воспользуемся методами R -функций [1] и Ритца [4].

Пусть функции $\omega_k(x, y)$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) таковы, что $\omega_k(x, y) = 0$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) – нормализованные уравнения соответствующих участков границ. Используя общий подход к построению структур решения смешанных краевых задач [1], показано, что краевым условиям (2) – (4) точно удовлетворяет пучок функций

$$\psi = \varphi + \tilde{\omega}_1 \Phi - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} \left[D_1^{(2)} \varphi + D_1^{(2)} (\tilde{\omega}_1 \Phi) - \tilde{\omega}_2 \Psi \right], \quad (5)$$

где $\varphi = Q \frac{\omega_0 \wedge_0 \omega_3}{\omega_4 + \omega_0 \wedge_0 \omega_3}$, Φ , Ψ – неопределенные компоненты структуры,

$$\tilde{\omega}_1 = \omega_0 \wedge_0 \omega_3 \wedge_0 \omega_4, \quad \tilde{\omega}_2 = \omega_1 \wedge_0 \omega_2, \quad D_1^{(2)} = \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\omega}_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \wedge_0 \quad - \quad \text{знак}$$

R -конъюнкции: $f \wedge_0 g = f + g - \sqrt{f^2 + g^2}$ [1].

Итак, построена структура решения (5) краевой задачи (1) – (4). В (5) положим $\Psi = 0$ и для аппроксимации неопределенных компоненты Φ воспользуемся методом Ритца [4] по схеме, описанной в [1]. Неопределённую компоненту Φ представим в виде $\Phi \approx \Phi_n = \sum_{i=1}^n c_i \tau_i$, где $\{\tau_i\}$ – любая полная в пространстве $L_2(D)$ система функций (тригонометрические или степенные полиномы, сплайны и пр.). Тогда система функций $\{\varphi_i\}$, где $\varphi_i = \tilde{\omega}_1 \tau_i - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} D_1^{(2)} (\tilde{\omega}_1 \tau_i)$, является координатной. Согласно методу Ритца для коэффициентов c_1, \dots, c_n получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^n [\varphi_i, \varphi_j] c_i = (F, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Здесь $F = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\kappa} \frac{\partial g}{\partial y} \right)$, где $g = \varphi - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} D_1^{(2)} \varphi$, $[\varphi_i, \varphi_j]$ – энергетическое скалярное произведение, (F, φ_j) – скалярное произведение в $L_2(D)$.

Сходимость последовательности приближенных решений задачи (1) – (4) $\psi_n = \varphi + \tilde{\omega}_1 \Phi_n - \frac{\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2}{\tilde{\omega}_1 + \tilde{\omega}_2} D_1^{(2)} (\tilde{\omega}_1 \Phi_n)$ к точному решению (вообще говоря, обобщенному) следует из теорем о сходимости метода Ритца [7].

4. Результаты вычислительного эксперимента

Вычислительный эксперимент был проведён для случая, когда флютбет имеет прямоугольное сечение. Для расчётов выбрана высота водопроницаемого слоя $H = 1$. Рассмотрен случай заглубления флютбета $h = 0,25$ с постоянной шириной, равной 1, случаи различного расположения шпунта. Было принято,

что границы $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ – плоские. Водоупор $\partial\Omega_4$ также считался плоским. Во всех случаях коэффициент фильтрации принимался постоянным: $k=1$, а расход жидкости $Q=1$.

1 случай. Заглубление флютбета $h=0,25$, водоупор плоский, один шпунт длины 0,25. На рис. 2 приведена картина линий уровня ($\delta\psi=0,1$) приближённого решения (для аппроксимации неопределенной компоненты использована 21 базисная функция).

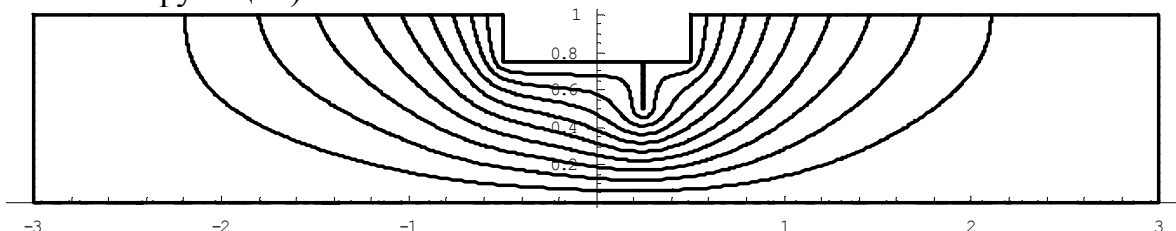


Рис. 2. Линии уровня функции тока

2 случай. Заглубление флютбета $h=0,25$, водоупор плоский, один шпунт длины 0,5. На рис. 3 приведена картина линий уровня ($\delta\psi=0,1$) приближённого решения (для аппроксимации неопределенной компоненты использована 21 базисная функция).

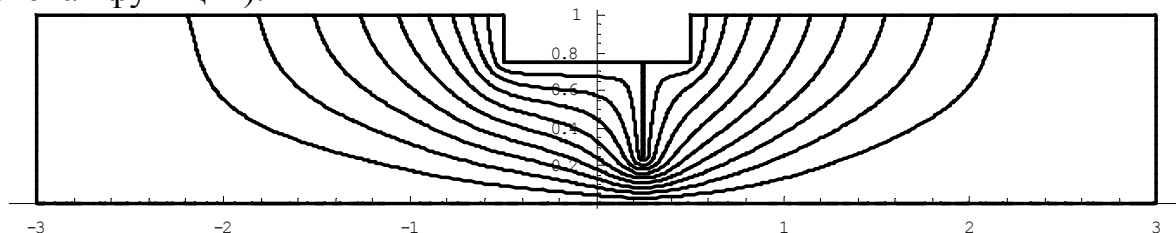


Рис. 3. Линии уровня функции тока

3 случай. Заглубление флютбета $h=0,25$, водоупор плоский, два шпунта длины 0,25 и 0,5, расположенные симметрично. На рис. 4 приведена картина линий уровня ($\delta\psi=0,1$) приближённого решения для $N=5$ (21 базисная функция).

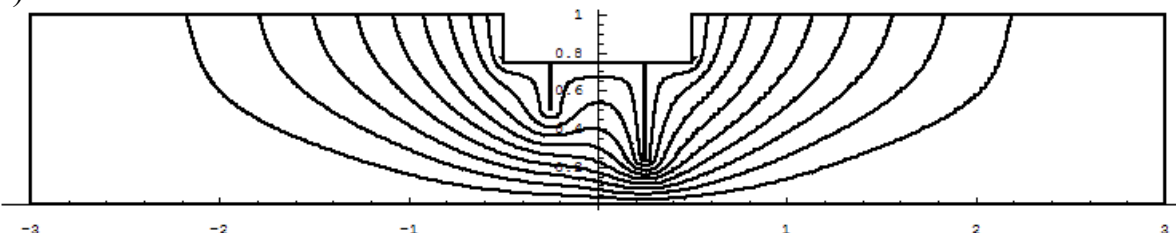


Рис. 4. Линии уровня функции тока

Полученные приближенные решения сравнивались с решениями, полученными в [3] с помощью метода фиктивных областей. Результаты хорошо согласуются.

Анализ приближенного решения позволяет сделать следующие выводы.

1. Если увеличить длину одного или нескольких шпунтов, то все линии тока снизятся, расход уменьшится, выходная скорость уменьшится. Если стре-

миться уменьшить выходную скорость, то наиболее эффективным является удлинение крайнего правого шпунта.

2. Если увеличить длину одного шпунта, то давление на флютбет слева от этого шпунта увеличится, а справа – уменьшится; в частности, увеличение длины крайнего правого шпунта увеличит давление на флютбет всюду.

Эти выводы полностью согласуются с инженерной практикой и теоретическими результатами [8].

5. Заключение. В работе для численного решения задач фильтрации под гидротехническими сооружениями применены методы R -функций и Ритца. Предлагаемый метод численного анализа показал свою эффективность на модельных задачах и может быть использован для технических расчетов, что и определяет научную новизну и практическую значимость результатов.

Библиографический список

1. Блишун А.П., Сидоров М.В., Яловега И.Г. Математическое моделирование и численный анализ фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями с помощью метода R -функций // Радиоэлектроника и информатика. – 2010. – № 2. – С. 40 – 46.
2. Блишун А.П. Метод R -функций в задачах стационарной фильтрации со свободной границей // Вісник Запорізького національного університету. – 2011. – № 2. – С. 29 – 37.
3. Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1991. – 156 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Лань, 2002. – 688 с.
5. Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, Н.В. Сергиенко, Г.Е. Мистецкий, В.В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1977. – 288 с.
6. Ляшко Н.И., Великоиваненко Н.М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – К.: Наук. думка, 1973. – 264 с.
7. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 511 с.
8. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
9. Рвачев В.Л. Теория R -функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
10. Семерич Ю.С., Сидоров М.В. Метод R -функций в задаче стационарной фильтрации // Современные проблемы машиностроения. Тезисы докладов конференции молодых ученых и специалистов. Харьков, 29 ноября – 1 декабря 2005 г. – С. 30.
11. Сидоров М.В., Стороженко А.В. Математическое и компьютерное моделирование некоторых фильтрационных течений // Радиоэлектроника и информатика. – 2004. – № 4. – С. 58 – 61.