УДК 621.391.175

Н.С. ПОДЦЫКИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАДЕЖНОСТИ ВОССТАНАВЛИВАЕМОЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Предлагается дискретная математическая модель надежности стареющей технической системы, состояние которой ухудшается со временем, возрастает вероятность отказа. Предполагается, что в целях оптимизации работоспособности системы в случайные моменты времени проводятся профилактические ремонты разной глубины. Цель работы – обосновать правило выбора таких ремонтов, обеспечивающих оптимальный уровень работоспособности.

1. Общая постановка задачи, актуальность и цель исследования

Известно, что все технические системы в процессе наблюдения и эксплуатации ухудшают свои характеристики, а также увеличивается вероятность их отказа. Во многих случаях вероятность отказа является наиболее важной для моделирования, так как приводит к длительному простаиванию системы и значительным затратам на ее восстановление. Вероятность отказа может быть уменьшена и доведена до оптимального уровня с помощью проведения профилактических ремонтов. Обычно такие ремонты определяются регламентом в заранее определенные моменты времени. Реально, в силу различных причин, их реализация происходит в случайные моменты времени. В модели, которая будет построена, учитывается это обстоятельство.

Цель исследования – построить математическую модель надежности и работоспособности управляемой технической системы с конечным числом состояний. В статье рассматривается наиболее перспективный подход к моделированию надежности технических систем, предполагающий введение состояния, от которого зависит уровень работоспособности и вероятность отказа. Такой подход позволяет учесть индивидуальные особенности системы, например, скорость износа, что в свою очередь даст возможность более адекватно принимать решения по ее профилактическому обслуживанию. Существующие методы моделирования [1] для выбора оптимальных решений пользуются статистическими данными, полученными по большой группе однотипных систем. Основной величиной при этом является “наработка на отказ”. Понятно, что индивидуальные особенности конкретной системы в этом случае не учитываются. Целью моделирования является поддержание оптимальной работоспособности отдельной системы с учетом ее состояния на неограниченном интервале времени. В основу моделирования положен марковский случайный процесс.

В предлагаемой работе автор развивает подход к моделированию надежности технических систем, представленный в [2].

2. Математическая модель

Пусть стохастическая система S контролируется через случайный период времени $\zeta = \min(\xi, \tau)$, где ξ – случайное время до отказа, зависящее от наблюденного состояния в последний момент контроля; τ – плановый случайный период контроля, имеющий распределение Эрланга k-го порядка. В каждый момент контроля система может находиться в одном из состояний конечного множества $E' = \{x_1, ..., x_N\}$. Будем считать, что наилучшим состоянием, в котором вероятность отказа минимальна, является x_1, а наихудшим – состояние x_N. Состоянию x_1 соответствует новая система, а состоянию x_N – максимально изношенная. Все остальные состояния – промежуточные, вероятность отказа в которых упорядочена по его возрастанию от минимального к максимальному. Нам будет удобно расширить множество состояний, снабдив каждый элемент $x_i \in E$ вторым индексом s, $s = 1,...,k+1$. При этом $s = 1,...,k$ указывает на фазу эрланговского распределения [2] периода τ, а $s = k+1$ указывает на состояние планового контроля. Обозначим $E'' = \{x_{is}\}$, $i = 1,..., N$, $s = 1,...,k+1$. Таким образом, полное множество состояний $E = E'' \cup \{x_0\}$.

Пусть в плановый момент контроля система находится в состоянии x_{jk+1}, $j = 1,...,N$, в котором применяется одно из возможных профилактических ремонтов. Положим, что множество допустимых профилактических ремонтов, которое назовем множеством управлений и обозначим $Y = \{y_1,...y_m\}$, конечно. Элемент этого множества, управление y_i, определяет глубину обновления системы. Оно определяет интенсивности μ_{js} перехода системы из состояния x_{jk+1} в состояние x_{s1}, $s = 1,...j$. Будем считать, что чем глубже управление обеспечивает обновление системы, тем больше интенсивность перехода в состояние с меньшим номером s. Однако будем учитывать, что чем глубже обновление системы, тем больше стоит это управление.

Естественно считать, что отказ системы возможен в любом состоянии x_{js}, $j = 1,...,N$, $s = 1,...,k$, причем интенсивность отказа ν_j не зависит от фазы s. Считаем формально, что отказ системы приводит к переходу ее в состояние x_0. В состоянии x_0 система восстанавливается в одно из состояний x_{j1}, с интенсивностью ϕ_j, $j = 1,...,N$.

Обозначим интенсивность перехода между фазами через l.

Основная задача моделирования будет состоять в выборе оптимальной стратегии управления, т.е. в выборе вида профилактического ремонта для каждого состояния в каждый момент контроля.

Система уравнений Колмогорова для вероятностей состояний предложенной выше модели имеет следующий вид [4]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}P_{11}(t) = -(\nu_1 + \lambda_1 + l)P_{11}(t) + \phi_1 P_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\mu_{i1}P_{ik}(t),\\
&\frac{d}{dt}P_{s1}(t) = -(\nu_s + \lambda_s + l)P_{s1}(t) + \phi_s P_0(t) + \sum_{i=s}^{N}\mu_{is}P_{ik+1}(t) + \lambda_{s-1}P_{s-11}(t),\ s = 2,...,N-1,\\
&\frac{d}{dt}P_{N1}(t) = -(\nu_N + l)P_{N1}(t) + \phi_N P_0(t) + \mu_{NN}P_{Nk+1}(t) + \lambda_{N-1}P_{N-11}(t),\\
&\frac{d}{dt}P_{1s}(t) = -(\nu_1 + \lambda_1 + l)P_{1s}(t) + lP_{1s-1}(t),\ s = 2,...,k, \qquad (1)\\
&\frac{d}{dt}P_{qs}(t) = -(\nu_q + \lambda_q + l)P_{qs}(t) + lP_{qs-1}(t) + \lambda_{q-1}P_{q-1s}(t),\ q = 2,...,N-1,\ s = 2,...,k,\\
&\frac{d}{dt}P_{Ns}(t) = -(\nu_q + l)P_{Ns}(t) + lP_{Ns-1}(t) + \lambda_{N-1}P_{N-1s}(t),\ s = 2,...,k,\\
&\frac{d}{dt}P_{qk+1}(t) = -\sum_{i=1}^{q}\mu_{qi}P_{qk+1}(t) + lP_{qk}(t),\ q = 1,...,N,\\
&\frac{d}{dt}P_0(t) = -\sum_{i=1}^{N}\phi_i P_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\nu_i P_{ij}(t),\\
&P_0(t) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k+1}P_{ij}(t) = 1.
\end{aligned}
$$

Заметим, что одно из уравнений системы, кроме условия нормировки, может быть опущено при ее решении.

Пусть в начальный момент времени система находится в состоянии x_{11}. Тогда начальное распределение вероятностей имеет следующий вид:

$$P_{11}(0) = 1,\ P_0(0) = 0,\ P_{ij}(0) = 0 \text{ для всех } i, j, \text{ кроме } i = j = 1.$$

Рассмотрим случай, когда существует стационарный режим функционирования системы [4]. При этом существуют пределы вероятностей состояний $P_{ij}(t), P_0(t)$ при $t \to \infty$ и, следовательно, в этом режиме все производные этих вероятностей равны 0. Тогда приведенная система дифференциальных уравнений перейдет в неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Такая система может быть решена, например, с помощью компьютерной программы MAPLE.

3. Определение параметров системы

Состояние системы определяется набором контролируемых параметров, содержащих информацию о надежности системы, и на практике часто может быть сведено с помощью некоторой весовой функции к скалярной величине. Размерность модели при этом существенно снижается. Заметим, что выбор информативного набора параметров может быть проведен, например, с помощью методов теории распознавания образов [4].

Процесс износа технической системы достаточно адекватно описывается с помощью интенсивностей перехода λ_i, $i=1,...,N-1$, между соседними состояниями $x_{ij} \to x_{i+1j}$, $i=1,...,N-1$, $j=1,...,k$. Действительно, в состоянии x_{11} система находится случайное время, распределенное по показательному закону, что соответствует отсутствию износа, и переход в состояние отказа за счет “случайных” факторов, т.е. с постоянной условной вероятностью. Увеличение степени последействия за счет переходов в новые состояния отражает увеличение степени износа и, значит, увеличение со временем условной вероятности отказа [1]. Оценка интенсивности λ_i, $i=1,...,N-1$, перехода между состояниями легко может быть получена методами математической статистики на основе имеющейся информации [6].

Интенсивности ν_i, $i=1,...,N$, могут быть получены методами математической статистики на основе имеющейся информации.

Получим оценки интенсивности l перехода между фазами и порядка k случайной величины η, имеющей распределение ФУР Эрланга k-го порядка. Пусть $t_1, t_2, ..., t_n$ – реализации периода времени между плановыми остановками системы на профилактический ремонт. Так как $M\eta = \frac{k}{l}$, а дисперсия $D\eta = \frac{k}{l^2}$, то метод моментов дает следующие оценки параметров l и k: $\tilde{l} = \frac{\bar{t}}{\tilde{\sigma}^2}$, $\tilde{k} = \left[\frac{\bar{t}^2}{\tilde{\sigma}^2}\right]$, где: $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$, $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2$, квадратные скобки означают целую часть.

Интенсивность ремонта в состоянии x_0 может быть оценена методами математической статистики. Здесь следует заметить, что удобно оценить отдельно интенсивность ϕ выхода из состояния x_0 и вероятности перехода π_i из этого состояния в состояния x_{i1}, $i=1,...,N$, $\sum_{i=1}^{N}\pi_i = 1$. Тогда искомые интенсивности следует положить равными $\phi_i = \phi\pi_i$.

Определим далее параметры управления. Управления, т.е. профилактические ремонты разной глубины обновления системы, как правило, не могут ухудшить ее состояние. Поэтому будем считать, что из состояния x_{ik+1}, $i=1,...,N$, под действием управления возможен переход лишь в состояние x_{j1}, $j=1,...,i$. Аналогично предыдущему, методы статистики легко позволяют оценить вероятности $p_j(y)$, $j=1,...,i$, такие, что $\sum_{j=1}^{i} p_j = 1$, для каждого $y \in Y$, каждого состояния профилактики x_{ik+1}, а также интенсивность μ выхода из состояния x_{ik+1}. Тогда искомые интенсивности для выхода из состояния x_{ik+1} равны $\mu_{ij}(y) = \mu p_j(y)$, $j=1,...,i$.

Работа системы связана с некоторыми затратами, обеспечивающими ее функционирование, в частности с проведением профилактических ремонтов. Кроме того, работа системы в штатном режиме приносит, как правило, определенный доход в единицу времени, возможно, зависящий от состояния. Обозначим доход системы в единицу времени в состоянии x_{ij} через $w(x_{ij})$. Пусть стоимость проведения ремонтных регламентных работ в единицу времени в состоянии x_{ik+1} составляет величину $r(x_{ik+1}, y)$, где $y \in Y$ – управление, определяющее глубину проведения профилактического ремонта (номер управления), а стоимость восстановления системы из состояния отказа в единицу времени в состоянии x_0 – величину r_0.

4. Оптимизация системы

Отображение $E \to Y$ назовем решающей функцией и обозначим f, а последовательность решающих функций $\pi = \{f_1, f_2, ...\}$ назовем стратегией. Стратегия вида $\pi^{(\infty)} = \{f, f, ...\}$ называется стационарной. Для заданной стационарной стратегии $\pi^{(\infty)}$ средний доход в единицу времени L в стационарном режиме для рассматриваемой системы определяется так:

$$L(\pi^{(\infty)}) = \sum_{i=1}^{N} w(x_{ij}) \left(\sum_{j=1}^{k} p_{ij} \right) - \sum_{i=1}^{N} r(x_{ik+1}, f(x_{ik+1})) p_{ik+1} - r_0 p_0 \ ,$$

где $f(x_{ik+1}) \in Y$ – управление, определяемое решающей функцией f в стратегии $\pi^{(\infty)}$.

Задача состоит в том, чтобы найти стратегию $\pi^{(\infty)}$, максимизирующую функцию L. Стационарных стратегий конечное множество, поэтому такая стратегия существует. В нашем случае она легко может быть найдена с помощью вычислительной программы MAPLE. Далее рассмотрим модельный пример. Все громоздкие вычисления предполагается провести в системе MAPLE V R4 [7].

5. Пример

Пусть в результате обработки статистических данных получено, что длительность периода регламентных профилактических ремонтов является случайной величиной, распределенной по закону Эрланга k-го порядка с параметрами $l = 1.5$ и $k = 2$. Это определяет множество состояний системы $E = \{x_0, x_{ij}\}$, $i = 1,...,3$, $j = 1,...,3$. В состояниях x_{i3}, $i = 1,...,3$, проводятся профилактические ремонты, а в состоянии x_0 – восстановление системы после отказа.

Систему уравнений для вероятностей состояний в стационарном режиме получим из (1). Она примет следующий вид:

$$-(\nu_1 + \lambda_1 + l)P_{11} + \mu_{21}P_{23} + f_1 P_0 + \mu_{11}P_{13} + \mu_{31}P_{33} = 0,$$
$$-(\nu_2 + \lambda_2 + l)P_{21} + \mu_{32}P_{33} + f_2 P_0 + \mu_{22}P_{23} + \mu_{31}P_{33} + \lambda_1 P_{11} = 0,$$
$$-(\nu_{31} + l)P_{31} + \mu_{21}P_{23} + f_3 P_0 + \mu_{33}P_{33} + \lambda_2 P_{21} = 0,$$
$$-\mu_{11}P_{13} + lP_{12} = 0,$$
$$-(\mu_{21} + \mu_{22})P_{23} + lP_{22} = 0,$$
$$-(\mu_{31} + \mu_{32} + \mu_{33})P_{33} + lP_{32} = 0,$$
$$-(f_1 + f_2 + f_3)P_0 + \nu_1(P_{11} + P_{12}) + \nu_2(P_{21} + P_{22}) + \nu_3(P_{31} + P_{32}) = 0,$$
$$-(\nu_2 + \lambda_2 + l)P_{22} + lP_{21} + \lambda_1 P_{12} = 0,$$
$$-(\nu_3 + l)P_{32} + \lambda_2 P_{22} = 0,$$
$$P_0 + P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{21} + P_{22} + P_{23} + P_{31} + P_{32} + P_{33} = 1.$$

В состояниях x_{i3}, $i = 1,...,3$, система простаивает, в них проводятся профилактические ремонты. Суммарная интенсивность выхода из каждого состояния x_{i3}, $i = 1,...,3$, равна $\mu = 3$. Вероятности же переходов из указанных состояний в рабочие состояния зависят от глубины профилактического ремонта. Положим, что управление y_1 в наибольшей степени обновляет систему, управление y_2 – в меньшей степени, а управление y_3 – в наименьшей степени. Интенсивность μ_{ij} определяет переход из состояния x_{i3} в состояние x_{jl}, $j = 1,...,i$. Значения интенсивностей для управления y_1: $\mu_{11} = \mu$, $\mu_{21} = 0.9\mu$, $\mu_{22} = 0.1\mu$, $\mu_{31} = 0.75\mu$, $\mu_{32} = 0.15\mu$, $\mu_{33} = 0.1\mu$; для управления y_2: $\mu_{11} = \mu$, $\mu_{21} = 0.5\mu$, $\mu_{22} = 0.5\mu$, $\mu_{31} = 1/3\mu$, $\mu_{32} = 1/3\mu$, $\mu_{33} = 1/3\mu$; для управления y_3: $\mu_{11} = \mu$, $\mu_{21} = 0.15\mu$, $\mu_{22} = 0.85\mu$, $\mu_{31} = 0.1\mu$, $\mu_{32} = 0.15\mu$, $\mu_{33} = 0.75\mu$.

Стоимость профилактического ремонта в единицу времени в состоянии x_{i3} составляет величину $r(x_{i3}, y_j)$, если применяется управление $y_j \in Y$, $j = 1,...,3$. Эти величины выбраны следующими: $r(x_{13}, y_1) = 5$, $r(x_{23}, y_1) = 5.5$, $r(x_{33}, y_1) = 6$; $r(x_{13}, y_2) = 4$, $r(x_{23}, y_2) = 4.2$, $r(x_{33}, y_2) = 4.6$; $r(x_{13}, y_3) = 3$, $r(x_{23}, y_3) = 3.2$, $r(x_{33}, y_3) = 3.4$.

Пусть выбрана единица измерения дохода и затрат. Система приносит доход в единицу времени в состояниях x_{11}, x_{12} равный 30, в состояниях x_{21}, x_{22} равный 22, в состояниях x_{31}, x_{32} равный 14 единиц. Восстановление отказавшей системы стоит $r_0 = 18$ условных единиц в единицу времени.

Для остальных параметров выбраны следующие значения. Интенсивность перехода между состояниями $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 2$. Интенсивность отказа в состояниях x_{ij}: для $i = 1$ и $j = 1{,}2$ равна $\nu_1 = 0.1$, для $i = 2$ и $j = 1{,}2$ $\nu_2 = 0.2$, для $i = 3$ и $j = 1{,}2$ $\nu_3 = 1$. Интенсивность восстановления системы из отказа в состояние x_{11} равна $\phi_1 = 0.6$, в состояние x_{21} равна $\phi_2 = 0.4$, в состояние x_{31} равна $\phi_3 = 0.3$.

Получен следующий результат. Наилучшей стратегией является та, которая предписывает управление y_1 во всех состояниях, в которых предусмотрен профилактический ремонт. Использование программы MAPLE V R4 для решения поставленной задачи дало следующий результат. Применение управления y_1 приводит к доходу 15.25437722, управления y_2 – к доходу 14.53419191, управления y_3 – к доходу 14.00128186 в единицу времени при неограниченном времени эксплуатации системы.

6. Выводы

Предложен новый подход к моделированию стареющих технических систем, вероятность возможного отказа которых возрастает со временем. Он состоит в том, что для описания эволюции процесса старения технической системы вводится последовательность состояний, которые она проходит по очереди. При этом такой показатель системы как интенсивность отказа монотонно возрастает. Показано, что при определенных условиях эволюция системы может быть описана марковским процессом и, следовательно, модель может быть основана на системе уравнений Колмогорова.

Целью моделирования явилось нахождение такой стратегии профилактических обновлений системы, которая бы оптимизировала ее работоспособность и надежность. Практическое значение полученных результатов состоит в том, что решение этой актуальной задачи легко может быть получено с помощью математических вычислительных программ, например MAPLE. Следует учесть, что в модели принят случайный период контроля. Последнее расширяет круг систем, которые адекватно могут быть описаны предложенной моделью.

Список литературы: 1. *Вопросы* математической теории надежности / Под ред. Б.В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376с. **2.** *Подцыкин Н.С.* Дискретная модель надежности восстанавливаемой системы // АСУ та прилади автоматики. 2004. Вип. 129. С. 14-18. **3.** *Боровков А.А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1976. 352с. **4.** *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. М.: Наука, 1971. 288 с. **5.** *Горелик А.Л., Скрипкин В.А.* Методы распознавания. М.: Высшая школа, 1984. 208с. **6** .*Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. **7.** *Дьяконов В.П.* Математическая система MAPLE V R3/R4/R5, М.: СОЛОН, 1998. 400с.

Поступила в редколлегию 27.11.2009

Подцыкин Николай Серафимович, канд. техн. наук, доцент кафедры математического моделирования и программного обеспечения ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование управляемых стохастических систем и методы их оптимизации, информатика. Адрес: Украина, 61115 Харьков, ул. 2-й Пятилетки, 2-Г, кв. 115, тел. 707-54-68.