Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Кафедра прикладной математики

Колосов А.И., Колосова С.В., Сидоров М.В.

КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вісник Запорізького національного університету.
Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – № 2. – С. 50 – 57.

УДК 517.95 : 517.988

КОНСТРУКТИВНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Колосов А.И., д. ф.-м. н., профессор

Харьковская национальная академия городского хозяйства

Колосова С.В., к. ф.-м. н., доцент, Сидоров М.В., к. ф.-м. н., доцент

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

В статье рассматриваются вопросы построения двусторонних приближений к положительным решениям краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Приведены конкретные примеры.

Ключевые слова: двусторонние приближения, нелинейные краевые задачи, положительные решения.

Колосов А.І., Колосова С.В., Сидоров М.В. КОНСТРУКТИВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ / Харківська національна академія міського господарства, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна

У статті розглядаються питання побудови двобічних наближень до додатних розв'язків крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних. Наведено конкретні приклади

Ключові слова: двобічні наближення, нелінійні крайові задачі, додатні розв'язки.

Kolosov A.I., Kolosova S.V., Sidorov M.V. CONSTRUCTIVE RESEARCH OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS / Kharkov National Academy of Municipal Economy, Kharkov National University of Radioelectronics, Ukraine

In the paper we consider nonlinear boundary value problem for ordinary differential equations and for partial differential equations. The two-sided approximations to converge to the positive solutions are constructed. There are concrete problems.

Keywords: the two-sided approximations, nonlinear boundary problems, the positive solutions.

В современной науке наблюдается повышенный интерес к процессам, происходящим в нелинейных средах. Здесь можно указать задачи физики плазмы, гидро- и газодинамики, теории химических реакций и др. В связи с постановкой новых задач возникает необходимость разработки новых подходов в исследовании нелинейных задач математической физики, являющихся математическими моделями процессов в нелинейных средах. Среди методов исследования нелинейных задач для дифференциальных уравнений следует выделить конструктивные методы, которые предлагают алгоритмы построения искомого решения. Среди таких методов особое место принадлежит двусторонним методам, позволяющим заключить решение в «вилку» и тем самым получать удобную апостериорную оценку погрешности приближений.

Указанные выше задачи могут быть конструктивно исследованы следующим путем. Краевая задача тем или иным способом преобразуется к эквивалентному нелинейному интегральному уравнению типа Гаммерштейна

$$u(t) = \int\limits_{\Omega} F(t, s, u(s))ds\,, \tag{1}$$

которое в дальнейшем рассматривается как нелинейное операторное уравнение

$$u = Au \tag{2}$$

в некотором полуупорядоченном пространстве.

Методы теории операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах, разработанные школой М.А. Красносельского [4, 6], позволяют доказывать существование решения уравнения (2) и строить двусторонние приближения, сходящиеся к решению. Достигается это в том случае, когда оператор A из уравнения (2) обладает следующими свойствами:

а) A – гетеротонный оператор;

б) $AK \subset K$, где K – конус неотрицательных функций в некотором пространстве функций (например, в пространстве L_p или в пространстве C);

в) для оператора A существует сильно инвариантный отрезок $<\overline{v}, \overline{u}>$ в конусе K ;

г) оператор A является псевдовогнутым;

д) оператор A непрерывен (вполне непрерывен) на указанном выше конусном отрезке $<\overline{v}, \overline{u}>$.

Вся указанная здесь терминология имеется в [4, 6].

Последовательные приближения решения уравнения (2) строятся по классической схеме

$$u^{(n+1)} = Au^{(n)}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{3}$$

В качестве $u^{(0)}$ берем концы конусного отрезка $<\overline{v}, \overline{u}>$ и получаем приближения, двусторонним образом сходящиеся к решению уравнения (2).

Необходимо отметить, что для нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений, которые являются математическими моделями реальных процессов, условия а) – д) для оператора A выполнимы.

Если рассматривать первую краевую задачу (задачу Дирихле) для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных

$$Lu = f(t, u), \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{4}$$

где $Lu = -\sum\limits_{i,\, j=1}^{N} a_{ij}(t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_j} + \sum\limits_{i=1}^{N} a_i(t)\dfrac{\partial u}{\partial t_i} + a(t)u$, $t = (t_1, ..., t_N) \in \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$, то переход к операторному уравнению (2), как правило, делается с помощью функции Грина: задача (4) эквивалентна нелинейному интегральному уравнению

$$u(t) = \int\limits_{\Omega} G(t, s) f(s, u(s)) ds, \tag{5}$$

где $G(t, s)$ – функция Грина дифференциального оператора L при нулевых граничных условиях.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta u = e^{-u} \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6}$$

$$u\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Задача (6), (7) возникает, например, при математическом моделировании течения проводящей среды в цилиндре с непроницаемыми стенками [1] и математическом моделировании теплового самовоспламенения химически активной смеси газов в сосуде [8].

Задача (6), (7) в классе непрерывных функций эквивалентна интегральному уравнению

$$u(t) = \int\limits_{\Omega} G(t, s) e^{-u(s)} ds, \tag{8}$$

где $G(t,s)$ – функция Грина оператора Лапласа $-\Delta$ для первой краевой задачи в области Ω, $t = (t_1, ..., t_N)$, $s = (s_1, ..., s_N)$.

На конусе K неотрицательных в $C(\Omega)$ функций введем в рассмотрение нелинейное операторное уравнение $u = Tu$, где $Tu = \int\limits_{\Omega} G(t, s) e^{-u(s)} ds$.

Используя методы теории нелинейных операторных уравнений в полуупорядоченных пространствах [4, 6], нами доказана следующая лемма.

Лемма 1. Оператор T обладает следующими свойствами:

1) оператор T антитонный на конусе K, то есть для всех $u, v \in K$ таких, что $u \le v$, выполнено $Tu \ge Tv$;

2) существует конусный отрезок $<v_0, u_0>$ такой, что $T<v_0, u_0> \subset <v_0, u_0>$, где $v_0(t) \equiv 0$,

$u_0(t)=\int\limits_\Omega G(t,\,s)ds$;

3) оператор T вполне непрерывен на K ;

4) оператор A псевдовогнутый на $K(u_0)$.

Для уравнения (8) с антитонным оператором T строим итерационный процесс по схеме

$$u^{(n+1)}(t)=\int\limits_\Omega G(t,\,s)e^{-u^{(n)}(s)}ds\,,\quad n=0,\,1,\,2,\,\ldots\,. \tag{9}$$

Взяв в качестве начального приближения $u^{(0)}(t)=0$, получим $u^{(1)}(t)=\int\limits_\Omega G(t,\,s)ds=u_0(t)$, причем $u^{(0)}\le u^{(1)}=u_0$. Поскольку оператор T антитонный, то получим $u^{(2)}=Tu^{(1)}\le u^{(1)}=Tu^{(0)}$, то есть $u^{(2)}\le u^{(1)}$. Таким образом, $u^{(0)}\le u^{(2)}\le u^{(1)}$. Снова действуя оператором T , получим $u^{(0)}\le u^{(2)}\le u^{(3)}\le u^{(1)}$. Продолжая этот процесс, получим

$$u^{(0)}\le u^{(2)}\le\ldots\le u^{(2k)}\le\ldots\le u^*\le\ldots\le u^{(2k+1)}\le\ldots\le u^{(3)}\le u^{(1)}\,,$$

где $u^*\in<v_0,u_0>$ – точное решение задачи (6), (7).

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Задача (6), (7) в $C(\Omega)$ имеет единственное положительное решение, которое можно построить по схеме (9) с двусторонними приближениями, равномерно сходящимися к решению.

Вычислительный эксперимент был проведен для случая, когда область Ω представляет собой прямоугольник со сторонами a и b . В таблице 1 приведены значения $u^{(2)}(t)$ и $u^{(3)}(t)$, построенных по схеме (9), при $t_2=\dfrac{1}{2}$ и различных t_1 ($a=b=1$). Норма разности между приближениями $u^{(2)}(t)$ и $u^{(3)}(t)$ составила $\left\|u^{(2)}-u^{(3)}\right\|_{C(\Omega)}=0{,}13\cdot10^{-3}$.

Таблица 1

x_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$u^{(3)}$	0,02800	0,04738	0,06043	0,06756	0,07004	0,06756	0,06043	0,04738	0,02800
$u^{(2)}$	0,02797	0,04731	0,06033	0,06744	0,06991	0,06744	0,06033	0,04731	0,02797

Как видно из таблицы 1, точное решение $u^*(t)$ задачи (6), (7) на прямой $t_2=\dfrac{1}{2}$ заключено в «вилку», образованную функциями $u^{(2)}(t)$ и $u^{(3)}(t)$.

Имеются и другие пути перехода от исходной краевой задачи для дифференциального уравнения к интегральному уравнению вида (2).

Если область, в которой рассматривается краевая задача, имеет сложную геометрию, то исследование такой задачи с помощью функции Грина неэффективно. Более эффективно конструктивное исследование краевой задачи с помощью квазифункции Грина.

Пусть $\omega(t)=0$ – нормализованное до первого порядка уравнение границы $\partial\Omega$ области Ω , т.е. функция $\omega(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

а) $\omega(t)>0$ в Ω ; б) $\omega(t)=0$ на $\partial\Omega$; в) $\dfrac{\partial\omega}{\partial\mathbf{n}}=1$ на $\partial\Omega$,

где $\mathbf{n}$ – внутренняя к $\partial\Omega$ нормаль.

Если граница $\partial\Omega$ состоит из конечного числа кусочно-гладких кривых (без точек возврата), каждая из которых допускает аналитическое задание с помощью элементарной функции, то такая $\omega(t)$ может быть построена практически для любой Ω методом *R*-функций в виде элементарной функции [7].

Следуя [7], нами доказано, что решение задачи (6), (7), принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, также является решением нелинейного интегрального уравнения

$$u(t) = \int\limits_{\Omega} G_{\kappa в.}(t,s)e^{-u(s)}ds + \int\limits_{\Omega} u(s)K(t,s)ds\,, \tag{10}$$

где

$$G_{\kappa в.}(t,s) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r} - q(t,s)\right],\quad q(t,s) = -\frac{1}{2}\ln\left[r^2 + 4\omega(t)\omega(s)\right],\quad r = |t-s|,\quad K(t,s) = -\frac{1}{2\pi}\Delta_s q(t,s)\,.$$

Применяя к интегральному уравнению (10) метод последовательных приближений, сводим его к последовательности линейных интегральных уравнений

$$u^{(n)}(t) - \int\limits_{\Omega} u^{(n)}(s)K(t,s)ds = \int\limits_{\Omega} G_{\kappa в.}(t,s)e^{-u^{(n-1)}(s)}ds\,,\ n = 2,\,3,\,\ldots, \tag{11}$$

где положили $u^{(1)}(t) \equiv 0$.

Приближенное решение уравнения (11) на каждом шаге итерационного процесса предлагается находить методом Бубнова-Галеркина [5], что позволяет получить результат в аналитическом виде.

В таблице 2 приведены значения $u^{(4)}(t)$, построенного по схеме (11), в тех же точках, что и в таблице 1.

Таблица 2

x_1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$u^{(4)}$	0,02791	0,04756	0,06031	0,06751	0,06984	0,06751	0,06031	0,04755	0,02791

Как видно, полученные двумя методами приближенные решения задачи (6), (7) хорошо согласуются.

Для краевых задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений переход от краевой задачи к эквивалентному операторному уравнению может быть осуществлен с помощью т.н. метода двойного отображения [3]. Этот метод позволяет свести краевую задачу к нелинейному интегральному уравнению вида $\varphi = A\varphi$ не прибегая к функции Грина.

Рассматривается следующая краевая задача для уравнения n-го порядка

$$\begin{gathered} x^{(n)} = f(t,\, x,\, x',\, \ldots,\, x^{(n-1)}),\ t_0 < t < t_*, \\ x^{(j)}(t_0) = a_j\,,\ \ x^{(s)}(t_*) = a_s\,,\ \ x^{(p)}(t_*) = b\,,\ \ x^{(p+1)}(t) > 0\ \ (<0)\ \ (t_0 < t < t_*) \\ (\,j = \overline{0,\,k}\,;\ \ s = \overline{k+1,\,n-1}\,;\ \ 0 \le p \le k\,), \end{gathered} \tag{12}$$

здесь t_* – неизвестная величина, а краевая задача (12) – задача на незакрепленном интервале (со свободной границей).

Под решением задачи (12) будем понимать пару $(x(t),\, t_*) \subset C^{(n-1)}[t_0,\, t_*] \cap C^{(n)}(t_0,\, t_*) \times (t_0, \infty]$.

Условие $x^{(p+1)}(t) > 0\ \ (<0)$ в задаче (12) естественно для многих конкретных прикладных задач.

Суть метода, о котором идет речь, рассмотрим на некоторых прикладных задачах.

В статистической теории атома [2] рассматривается дифференциальное уравнение, известное как уравнение Томаса-Ферми,

$$x'' = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{t}}\,. \tag{13}$$

Случаю свободных нейтральных атомов соответствуют такие краевые условия:

$$x(0)=1,\quad \lim_{t\to\infty} x(t)=0. \tag{14}$$

Задача (13), (14) известна в физике как задача Томаса-Ферми. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. Пусть $x(t)$ – неотрицательное решение задачи (13), (14). Тогда $x'(t)\le 0$ при $0\le t<\infty$.

Сопоставим задаче (13), (14) следующую задачу:

$$x''=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{t}},$$

$$x(0)=1,\quad x(t_*)=0,\quad x'(t_*)=-a\ (a\ge 0),\quad x'(t)<0\ (t_0<t<t_*). \tag{15}$$

Положим $x'=-\sqrt{\varphi(x)}$ и приведем задачу (15) к следующей:

$$\frac{d\varphi}{dx}=2\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{t}},\quad \frac{dt}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \tag{16}$$

$$\varphi(0)=a^2,\quad t(0)=t_*,\quad t(1)=0.$$

Ищем положительные решения задачи (16) и под её решением понимаем $(\varphi,\, t,\, t_*)$.

Задача (16) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi(x)=(\Gamma\varphi)(x)\equiv a^2+2\int_0^x \sigma\sqrt{\sigma}\left[\int_\sigma^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\varphi(\omega)}}\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma, \tag{17}$$

где

$$t(x,\,a)=\int_x^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\varphi(\omega,\,a)}}\ (0\le x\le 1),\quad t_*(a)=\int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{\varphi(\omega,\,a)}}.$$

При любом $a\ge 0$ оператор Γ обладает свойствами:

а) оператор Γ монотонен в конусе K неотрицательных функций в $C[0,\,1]$;

б) существует инвариантный для Γ конусный отрезок $<\varphi_0,\,\psi_0>\subset K$:

$$\Gamma:<\varphi_0,\,\psi_0>\to<\varphi_0,\,\psi_0>;$$

в) оператор Γ u_0-вогнут в конусе K.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. При каждом $a\ge 0$ краевая задача (15) имеет единственное решение, которое может быть получено с двусторонними приближениями, сходящимися к нему.

Исследование интегрального уравнения (17) наиболее сложно (и интересно) при $a=0$. В этом случае получаем, что $t_*=\infty$.

Итерационный процесс имеет вид:

$$\varphi^{(n+1)}(x)=(\Gamma\varphi^{(n)})(x),\quad \psi^{(n+1)}(x)=(\Gamma\psi^{(n)})(x),\quad n=0,1,\ldots, \tag{18}$$

где $\varphi^{(0)}(x)=\varphi_0(x)=\dfrac{\sqrt[3]{36}}{4}x^2\cdot\sqrt[3]{x}$, $\psi^{(0)}(x)=\psi_0(x)=\sqrt[3]{6\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{s\sqrt{s}}{\sqrt{1-s}}ds$.

В силу свойств оператора Γ получаем $\varphi^{(0)}\le\varphi^{(1)}\le\ldots\le\varphi^*\le\ldots\le\psi^{(1)}\le\psi^{(0)}$, $\lim_{n\to\infty}\varphi^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\psi^{(n)}=\varphi^*$, φ^* – решение уравнения (17). Результаты вычисления четырех итераций приведены в таблице 3, где $t_{\text{н.}}(x)\le t(x)\le t_{\text{в.}}(x)$, $x'_{\text{н.}}(x)\le x'(x)\le x'_{\text{в.}}(x)$.

Таблица 3

x	$t_{н.}(x)$	$t_{в.}(x)$	$x'_{н.}(x)$	$x'_{в.}(x)$
0,2	2,41660	2,42461	–0,08907	–0,08878
0,4	1,09053	1,09419	–0,25058	–0,24975
0,6	0,51383	0,51557	–0,48043	–0,47883
0,8	0,19107	0,19172	–0,80901	–0,80627
1,0	0,00000	0,00000	–1,59204	–1,58656

При исследовании ламинарного пограничного слоя в двумерном потоке несжимаемой электропроводимой жидкости, находящейся под действием магнитного поля, рассматривается такая краевая задача:

$$x''' + \alpha \cdot x \cdot x'' + \beta(1 - x'^2) + \gamma(1 - x') = 0,$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} x'(t) = 1, \quad x''(t) > 0 \quad (0 < t < \infty). \tag{19}$$

При $\gamma = 0$ имеем задачу Фокнера-Скэн [9] из теории погранслоя (γ – характеристика напряженности магнитного поля).

В дальнейшем (в целях краткости изложения) будем рассматривать $\gamma = 0$.

Сопоставим задаче (19) соответствующую ей задачу со свободной границей

$$x''' + \alpha \cdot x \cdot x'' + \beta(1 - x'^2) = 0,$$

$$x(0) = x'(0) = 0, \quad x'(t_*) = 1, \quad x''(t_*) = 0, \quad x''(t) > 0 \quad (0 < t < \infty). \tag{20}$$

Этой задаче отвечает интегральное уравнение

$$\varphi(z) = (\Gamma\varphi)(z) \equiv 2\alpha\int_z^1 \sqrt{\varphi(s)}\left[\int_0^s \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\varphi(\omega)}}\right]ds + 2\beta\int_z^1 (1 - s^2)ds, \tag{21}$$

рассматриваемое на множестве

$$Q = \left\{\varphi(z) \in C[0,\, 1] \middle| \varphi(z) \ge 0 \;\; \forall z \in [0,\, 1]\right\}.$$

При этом

$$x' = z, \quad x'' = \sqrt{\varphi(z)}, \quad x = \int_0^z \frac{sds}{\sqrt{\varphi(s)}}, \quad t = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}, \quad t_* = \lim_{z\to 1}\int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}.$$

Справедливы следующие утверждения:

а) Γ – гетеротонный на Q оператор: $\hat{\Gamma}(\varphi,\, \psi) \equiv 2\alpha\int_z^1 \sqrt{\varphi(s)}\left[\int_0^s \frac{\omega d\omega}{\sqrt{\psi(\omega)}}\right]ds + 2\beta\int_z^1 (1 - s^2)ds$;

б) оператор Γ имеет сильно инвариантный конусный отрезок $< \varphi_0,\, \psi_0 > \subset K(u_0)$,

$$\hat{\Gamma}(\varphi,\, \psi) : < \varphi_0,\, \psi_0 > \to < \varphi_0,\, \psi_0 >,$$

$$\varphi_0(z) = k_1^2(1 - z)^2 \ln\frac{C_1}{1 - z}, \quad \psi_0(z) = \frac{4\alpha^2}{k_1^2}(1 - z)^2 \ln\frac{C_2}{1 - z}, \tag{22}$$

где k_1 – достаточно малая величина, C_1 – достаточно большая величина.

в) оператор Γ u_0-псевдовогнут на $K(u_0)$, где $u_0(z) = (1 - z)^2 \ln\dfrac{1}{1 - z}$.

Как следует из свойств а) – в) оператора Γ, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Задача (19) при $\alpha \ge 0$, $\beta > 0$ имеет единственное решение, которое может быть получено с двусторонними приближениями, сходящимися к нему (по норме пространства $C[0,1]$).

Двусторонние приближения решения уравнения (21) могут быть получены по схеме

$$\varphi^{(n+1)} = \hat{\Gamma}(\varphi^{(n)}, \psi^{(n)}), \quad \psi^{(n+1)} = \hat{\Gamma}(\psi^{(n)}, \varphi^{(n)}), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

$$\varphi_0 = \varphi^{(0)} \le \varphi^{(1)} \le \ldots \le \varphi^* \le \ldots \le \psi^{(1)} \le \psi^{(0)} = \psi_0 .$$

При этом для задачи (19) имеем

$$x(z) = \int_0^z \frac{sds}{\sqrt{\varphi(s)}}, \quad x'(z) = z, \quad x''(z) = \sqrt{\varphi(z)}, \quad t(z) = \int_0^z \frac{ds}{\sqrt{\varphi(s)}}, \quad \lim_{z\to 1} t(z) = \infty .$$

Результаты 15-й итерации приведены в таблице 4.

Таблица 4

z	$x_{н.}(z)$	$x_{в.}(z)$	$x''_{н.}(z)$	$x''_{в.}(z)$
0	0	0	1,23001	1,23883
0,1	0,04404	0,05045	0,94877	0,96315
0,3	0,16116	0,17948	0,69302	0,71199
0,5	0,31856	0,35678	0,49530	0,52012
0,7	0,54517	0,62849	0,30856	0,34186
0,9	0,92038	1,21521	0,11173	0,16035

В работе рассмотрены основные методы конструктивного исследования краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений. Один из методов такого исследования основан на использовании точной функции Грина, что позволяет получить двусторонние приближения к решению рассматриваемой задачи. Другой метод использует квазифункцию Грина, которая строится, используя конструктивный аппарат теории *R*-функций, что позволяет приближенно решить нелинейную краевую задачу в областях практически произвольной геометрии, для которых функция Грина либо неизвестна, либо сложна в построении. Для нелинейных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений конструктивное исследование проводится методом двойного отображения, который проиллюстрирован решением задачи Фокнера-Скэн и задачи Томаса-Ферми. Отметим, что двусторонние приближения, сходящиеся к решению, как для задачи Фокнера-Скэн, так и для задачи Томаса-Ферми, ранее отсутствовали. Предлагаемые методы могут быть использованы при решении прикладных задач, математическими моделями которых служат краевые задачи для нелинейных дифференциальных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 183 с.

2. Гамбош П. Статистическая теория атома и её применения. – М.: ИЛ, 1951. – 398 с.

3. Колосов А.И. Нелинейные краевые задачи со свободной границей для обыкновенных дифференциальных уравнений математической физики: дис. … доктора физ.-мат. наук : 01.01.03 / Колосов Анатолий Иванович. – Москва, 1991. – 267 с.

4. Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 394 с.

5. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

6. Опойцев В.И., Хуродзе Т.А. Нелинейные операторы в пространствах с конусом. – Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1984. – 246 с.

7. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.

8. Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. – М.: Интеллект, 2008. – 408 с.

9. Falkner V.M., Skan S.W. Some approximate solutions of boundary layer equations. – Phil. Mag., 1931. – Vol. 12. – P. 865 – 896.